Applied probability and statistics

应用概率统计学习指导及习题解析

杨玲玲　韩宁宁　宋占杰　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

应用概率统计
学习指导及习题解析

杨玲玲　韩宁宁　宋占杰　编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是天津大学传统教材《应用概率统计》(普及类·第五版)配套使用的学习参考书.共分 9 章编写，包括该教材的全部习题解析，同时为便于教学，还参考了全国硕士研究生入学统一考试大纲精神，在每章开始部分都给出了教学要求与该章的重点和难点内容。本书配有教学课件，以便学生自学使用.

图书在版编目(CIP)数据

应用概率统计学习指导及习题解析/杨玲玲，韩宁宁，宋占杰编. —天津：天津大学出版社，2015.9

ISBN 978-7-5618-5433-4

Ⅰ.①应… Ⅱ.①杨… ②韩… ③宋… Ⅲ.①概率统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 220886 号

出版发行	天津大学出版社
地　　址	天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
电　　话	发行部：022-27403647
网　　址	publish.tju.edu.cn
印　　刷	天津泰宇印务有限公司
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	185mm×260mm
印　　张	10
字　　数	250 千
版　　次	2015 年 9 月第 1 版
印　　次	2015 年 9 月第 1 次
定　　价	20.00 元

前　言

为了深化应用概率统计教学内容和课程体系改革，顺应“卓越工程师培养计划”的要求，在天津大学本科教学综合改革立项项目的支持下，结合天津大学概率统计二十余年教学改革的成功经验，由宋占杰教授和孙晓晨副教授对传统教材进行了大幅度修订，编写了《应用概率统计》(普及类·第五版)教材. 本书是与之相配套的习题解析，同时本书亦可作为一本概率统计的习题解析独立使用，以帮助读者解除“做题难”的困扰. 因为概率统计和高等数学思维方式有所区别，历年来有很多学生反映：高等数学课堂上听懂了，课后习题就有思路做，但概率统计课堂上听懂了，课后习题常常感到无从下手. 这是由确定性数学和随机数学的思维方式决定的，随机数学的技巧性强，并相对独立，使学生学习产生了困惑，很有必要给出一些难题的解答.

本书习题由杨玲玲和韩宁宁编写，宋占杰对书中内容进行了总结修正，并负责统稿.

本书的出版得到了天津大学本科教学综合改革立项的支持，得到了天津大学教务处和数学系领导的热忱帮助，在此一并致以衷心的感谢.

由于作者水平有限，疏漏和不当之处恳请同行与读者指正.

联系邮箱：

zhaosm999@sohu. com

yanglingling@tju. edu. cn

ning_ninghan@tju. edn. cn

zhanjiesong@tju. edu. cn

编者

2015 年 7 月于天津大学

目　录

第1章

随机事件与概率

🕮 知识要点概述

一、样本空间与随机事件

二、概率的定义及性质

三、古典概型

四、几何概型

五、条件概率

六、事件的独立性

🕮 习题解析

知识要点概述

一、样本空间与随机事件

1. 随机试验

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律的一门数学分支，属于随机数学范围. 概率论中的一个基本概念是随机试验，它是指虽然预先知道所有结果但不能准确预言，且在相同条件下可以重复进行的试验.

2. 样本空间

设 E 为一随机试验，则试验 E 的所有可能的“基本结果”(指试验的最简单的、不可或不必再细分的结果)构成的集合称为 E 的样本空间或基本空间，记为 Ω. 样本空间的每个元素(即 E 的每个基本结果)称为样本点，常用 ω 表示.

3. 随机事件

设 E 为随机试验，称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 中的随机事件，简称事件，记为 $A,B,C,\cdots$ 在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生. 由一个样本点组成的单点集称为基本事件.

4. 必然事件与不可能事件

在随机试验中，每次试验必然发生的事件称为必然事件，每次试验都不发生的事件称为不可能事件. 必然事件用 Ω 表示，不可能事件用 $\varnothing$ 表示.

5. 事件的关系与事件的运算

(1)包含：若事件 A 发生时，必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

(2)相等：若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

(3)并：表示事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的并事件，记为 $A\cup B$. 也称为事件 A 与事件 B 的和事件.

(4)积：表示事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A\cap B$或 AB，也称为事件 A 与 B 的交事件.

(5)差：表示事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$.

(6)互不相容：若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是互不相容事件，或称互斥事件. 一般地，若 A 与 B 互不相容时，A 与 B 的并也称为 A 与 B 的和，记为 $A+B$.

(7)逆：若事件 A 与 B 满足 $A\cup B=\Omega$，且 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件，亦称事件 A 与事件 B 互为对立事件. A 的对立事件记为 $\overline{A}$，则 $\overline{A}=\Omega-A=B$.

事件运算顺序约定为先进行逆运算，再进行交运算，最后进行并或差运算. 如果恰当运用各种括号就能通过简单事件表示复杂的事件.

常用的事件运算规律：

交换律 $A\cup B=B\cup A$， $AB=BA$；

结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$， $A(BC)=(AB)C$；

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$， $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

对偶律(De Morgan 公式) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}$， $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

分配律和对偶律都可以推广到有限个事件情形，也可以推广到可列无穷多个事件的情形.

$$A\cup(\bigcap_{i=1}^{n}B_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup B_i),\quad A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}B_i)=\bigcup_{i=1}^{n}AB_i;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i;$$

$$A\cup(\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i)=\bigcap_{i=1}^{\infty}(A\cup B_i),\quad A\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}AB_i;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i.$$

虽然教材定义了事件的三种运算"并""交"及"逆"，其实在本质上只需要两种运算："并与逆"或"交与逆"即可. 这可由事件运算性质和对偶律推算出来. 例如，$A\cup B=\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$，$A\cap B=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$. 至于差运算可以表示为

$$A-B=A\cap\overline{B} \text{ 或 } A-B=\overline{\overline{A}\cup B}.$$

另外，记住一些事件之间关系的常用结论，也有助于分析事件和进行概率计算. 下面给出常用的关系式：

(1)$A\subset B$，当且仅当 $\overline{A}\supset\overline{B}$；

(2)$\varnothing\subset A\subset\Omega$；

(3)$A\cup\Omega=\Omega$， $A\cup\varnothing=A$， $A\cap\Omega=A$， $A\cap\varnothing=\varnothing$， $A-\varnothing=A$， $A-\Omega=\varnothing$；

(4)$AB\subset A\subset A\cup B$， $A-B\subset A\subset A\cup B$；

(5)$A\cap\overline{A}=\varnothing$， $A\cup\overline{A}=\Omega$， $\overline{A}=\Omega-A$；

(6)$(A-B)\cup A=A$， $(A\cup B)\cap A=A$；

(7)$(A-B)\cap AB=\varnothing$， $A=(A-B)\cup(AB)$， $A-B=A-AB$；

(8)$(A-B)\cap B=\varnothing$， $A\cup B=(A-B)\cup B=A\cup(B-A)$.

借助文氏图容易理解并记住上述各式.

二、概率的定义及性质

1. 定义

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，A 是 E 中任意一事件，$P(A)$是 A 的实函数，且满足：

(1)$P(A)\geqslant 0$ （非负性）；

(2)$P(\Omega)=1$ （规范性）；

(3)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \quad (\text{可列可加性}),$$

称 $P(A)$是事件 A 的概率.

2. **性质**

(1)不可能事件的概率为0,即$P(\varnothing)=0$.

(2)概率具有有限可加性,即若$A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

(3)设A为任一事件,则有

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

(4)设A,B是两个事件,若$A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\quad P(B)\geqslant P(A).$$

更一般地,对任意事件A,B,均有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB).$$

(因为$P(B-A)=P(B-AB)\xlongequal{AB\subset B}P(B)-P(AB)$.)

(5)对任意事件A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

对任意事件A,B,C,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

一般地,对于n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$
$$-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n);$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

三、古典概型

1. **定义**

若随机试验E的样本空间Ω中只含有限个样本点,$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$,且每个样本点出现的可能性(概率)相同,则称$E$为古典型随机试验,简称古典概型.

2. **概率计算公式**

设A是古典型随机试验E中的任意事件,则有

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}.$$

四、几何概型

1. **定义**

向某一可度量的区域G内任投一点,如果所投的点落在G中任意区域g内的可能性大小只与g的度量成正比,而与g的位置和形状无关,则称这一随机试验为几何概型试验,简称几何概型.

上述“度量”是指一维时的线段长度、二维时的可求积平面区域的面积或三维时的可求积空间区域的体积. 几何概型试验的样本点可用 G 内的点表示，因此样本空间就是 $\Omega=G$.

2. **概率计算公式**

设 A 是几何概型试验中的任意事件，则有

$$P(A)=\frac{A\text{ 的度量}}{\Omega\text{ 的度量}}.$$

五、条件概率

1. **定义**

设 A,B 为两事件，且 $P(B)>0$，则在事件 B 已发生条件下，事件 A 发生的条件概率为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

2. **乘法公式**

设 A,B 为两事件，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A),\quad P(A)>0;$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B),\quad P(B)>0.$$

一般地，有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}),$$

$$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0.$$

由条件概率的定义，易得

$$P(AB|C)=P(A|C)P(B|AC),\quad P(AC)>0,$$

称上式为条件概率的乘法公式.

3. **全概率公式**

设 E 是随机试验，若 $B,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 E 中的事件，且满足：

(1) $P(A_i)>0,\quad i=1,2,\cdots,n$;

(2) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，并且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

在全概率公式中满足条件(2)的一组事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 称为样本空间 Ω 的一个分割(或称为样本空间 Ω 的一个划分，或称为一个完备事件组).

4. **逆概率公式**

设 E 是随机试验，若 $B,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 E 中的事件，且满足：

(1) $P(A_i)>0,\quad i=1,2,\cdots,n$;

(2) 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是样本空间 Ω 的一个分割，即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$；

(3) $P(B)>0$，则有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

六、事件的独立性

1. 两个事件的独立性

若事件 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A,B 是相互独立的.

定理 1 若 $P(B)>0$ 时，则事件 A,B 相互独立 $\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)$.

定理 2 若 $0<P(B)<1$ 时，则事件 A,B 相互独立 $\Leftrightarrow P(A|B)=P(A|\bar{B})$.

定理 3 若事件 A,B 相互独立，则 $\bar{A}$ 与 B，A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 均相互独立.

注意 当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时，若事件 A,B 相互独立，则 A,B 必相容；若事件 A,B 互不相容，则 A,B 必不相互独立，即事件 A,B 相互独立与互不相容不能同时成立.

2. 三个事件的独立性

对于事件 A,B,C，若满足

$$\left.\begin{aligned}P(AB)=P(A)P(B),\\P(AC)=P(A)P(C),\\P(BC)=P(B)P(C),\end{aligned}\right\}\text{则称 } A,B,C \text{ 两两独立.}$$

又有 $\quad P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，

则称事件 A,B,C 是相互独立的. 由此可知 A,B,C 相互独立 $\rightleftarrows$ 两两独立.

3. n 个事件的独立性

对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若对所有的可能组合 $1\leqslant i<j<k<\cdots\leqslant n$，有(共计 2^n-1-n 个等式)

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),\quad P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k),\cdots,$$
$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

定理 4 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则把其中任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个事件换成对立事件，所得的诸事件仍然是相互独立的.

习题解析

1. 写出下列随机试验的样本空间.

(1) 同时掷 3 颗骰子，记录 3 颗骰子点数之和；

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品总件数；

(3) 把 a,b 两个球随机地放到 3 个盒子中去；

(4) 一个口袋中有 5 只外形完全相同的球，编号分别为 1,2,3,4,5，从中同时取 3 只球.

解：(1)$\Omega=\{3,4,5,\cdots,18\}$；

(2)$\Omega=\{10,11,12,\cdots\}$；

(3)记 $a_i=\{$将 a 球置于第 i 个盒子中$\}$，$b_j=\{$将 b 球置于第 j 个盒子$\}$，其中，$i,j=1,2,3$. 则

$$\Omega=\{a_1b_1,a_1b_2,a_1b_3,a_2b_1,a_2b_2,a_2b_3,a_3b_1,a_3b_2,a_3b_3\}.$$

(4)记ⓘ＝{取出的3个球中包含 i 号球}，则

Ω＝{①②③，①②④，①②⑤，①③④，①③⑤，①④⑤，②③④，②③⑤，②④⑤，③④⑤}.

2. 设 $\Omega=\{1,2,3,\cdots,10\}$，$A=\{2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，$C=\{5,6,7\}$，求下列事件：(1) $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$；(2) $\overline{A\cap(\overline{B\cap C})}$.

解：(1)$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=A\cup B=\{2,3,4,5\}$；

(2)$\overline{A\cap(\overline{B\cap C})}=\overline{A}\cup(B\cap C)=\{1,5,6,7,8,9,10\}$.

3. 设 A,B,C 是3个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(CB)=0$，$P(AC)=\dfrac{1}{8}$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

解：因为 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，所以 $P(ABC)=0$.

由加法公式：$P(A\cup B\cup C)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=\frac{3}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}.$$

4. 在房间里有10个人，分别佩戴着从1号到10号的纪念章，任意选3个人记录其纪念章的号码.

(1) 求最小的号码为5的概率；

(2) 求最大的号码为5的概率.

解：随机试验为从10个人中任选3个，故 Ω 中共有 C_{10}^3 个样本点.

(1)设 $A=\{$3个人中最小的号码为5$\}$，即纪念章号为5的人必在此次所选的3个人之中，而另外2个人的纪念章号都比5大，只能从6，7，8，9，10的5个人中任选2个，故 A 中样本点个数为 C_5^2，于是

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}.$$

(2)设 $B=\{$3个人中最大的号码为5$\}$，即纪念章号为5的人必在此次所选的3个人之中，而另外2个人的纪念章号都比5小，只能是从1，2，3，4的4个人中任选2个，故 B 中样本点个数为 C_4^2，于是

$$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}.$$

5. 将Probability中的11个字母分别写在11张卡片上，从中任意连抽7张，求其排列结果为ability的概率.

解：设 $A=\{$7张卡片排列为ability$\}$，则 $P(A)=\dfrac{4}{A_{11}^7}=\dfrac{4}{1\,663\,200}=2.41\times10^{-6}$.

6. 在1 500个产品中有400个次品，1 100个正品，任意抽取200个. 求：

(1) 恰有 90 个次品的概率；

(2) 至少有 2 个次品的概率.

解:随机试验为从 1 500 个产品中任意抽取 200 个,故 Ω 中共有 $C_{1\,500}^{200}$个样本点.

(1)设 $A=\{$恰有 90 个次品$\}$,即“从 400 个次品中抽取 90 个”,而“从 1 100 个正品中抽取 110 个”,故 A 共含有 $C_{400}^{90}C_{1\,100}^{110}$个样本点,故

$$P(A)=\frac{C_{400}^{90}C_{1\,100}^{110}}{C_{1\,500}^{200}}.$$

(2)设 $A_k=\{$恰有 k 个次品$\}$,则

$$P(A_k)=\frac{C_{400}^{k}C_{1\,100}^{200-k}}{C_{1\,500}^{200}}.$$

设 $B=\{$至少有 2 个次品$\}$,可表示为 $B=\bigcup\limits_{k=2}^{200}A_k$,或 $B=\Omega-A_0-A_1$,故

$$P(B)=P(\bigcup_{k=2}^{200}A_k)=\sum_{k=2}^{200}\frac{C_{400}^{k}C_{1\,100}^{200-k}}{C_{1\,500}^{200}},$$

或 $$P(B)=P(\Omega-A_0-A_1)=1-\frac{C_{1\,100}^{200}}{C_{1\,500}^{200}}-\frac{C_{400}^{1}C_{1\,100}^{199}}{C_{1\,500}^{200}}.$$

7. 设有 n 个房间,分给 n 个不同的人,每人都以 $\frac{1}{n}$ 的概率进入每一个房间,而且每个房里的人数无限制. 试求“不出现空房”的概率及“恰恰出现一间空房”的概率.

解:设 $A=\{$不出现空房$\}$,则 $P(A)=\frac{n!}{n^n}=\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$;

设 $B=\{$恰出现一间空房$\}$,则 $P(B)=\frac{C_n^1C_n^2(n-1)!}{n^n}$.

8. 一个人要开他的房间的门,他共有 n 把钥匙,其中仅有一把是能开门的,若他随意地选取钥匙去开门,问在第 r 次才开门成功的概率是多少? 若他逐个地取钥匙(用后不放回)来试开,这个试开的过程可能需要 $1,2,\cdots,n$ 次,试证明这 n 个结果的每一个概率均为 $\frac{1}{n}$.

解:在第 r 次开门成功的概率:$\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{r-1}$.

逐个地取钥匙(用后不放回)试开,此问题相当于将 n 个编号分别为 $1,2,\cdots,n$ 的球置于编号为 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个盒子中时,编号为 r 的球恰置于编号为 r 的盒子中,故 $P=\frac{1}{n}$.

9. 从 5 双不同鞋子中任意取 4 只,4 只鞋子中至少有 2 只鞋子能配成一双的概率是多少?

解:随机试验为从 10 只鞋子中任取 4 只,故 Ω 共有 C_{10}^4个样本点.

设 $A=\{$至少有 2 只配成一双$\}$,

$A_1=\{$恰有 2 只配成一双$\}$,$A_2=\{$恰有 4 只配成两双$\}$,

$A=A_1\cup A_2$,且 $A_1A_2=\varnothing$,于是

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2).$$

A_2 共有 C_5^2 个样本点,A_1 共有 $C_5^1(C_8^2-C_4^1)$个样本点,故

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{C_5^2+C_5^1(C_8^2-C_4^1)}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

10. 将3只球随机地放入4个杯子中，问杯子中球的最大个数分别为1,2,3的概率各为多少？

解：Ω共有4^3个样本点.

记$A=\{$杯子中球的最大个数为1$\}$，共有$4\times3\times2$个样本点；

$B=\{$杯子中球的最大个数为2$\}$；

$C=\{$杯子中球的最大个数为3$\}$，共有4个样本点.

显然A,B,C互不相容，$A\cup B\cup C=\Omega$.

$$P(A)=\frac{4\times3\times2}{4^3}=\frac{3}{8},P(C)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16},P(B)=1-P(A)-P(C)=\frac{9}{16}.$$

11. 从一副扑克牌(共52张)中一张一张地取牌，求在第r次取牌时第一次取出A牌的概率和第二次取出A牌的概率.

解：随机试验为从52张牌中依次取出r张排成一列，故Ω中共有A_{52}^r个样本点.

设$A=\{$第r次取牌时首次取到A$\}$，即前$r-1$次取牌是从除去4个A的48张牌中取的.而第r次取的A是从4个A中任取的一张.故A中样本点的个数为$A_{48}^{r-1}C_4^1$.

于是 $$P(A)=\frac{A_{48}^{r-1}C_4^1}{A_{52}^r}.$$

设$B=\{$第r次取牌时第二次取到A$\}$，即前$r-1$次取牌中有$r-2$次是从除去4个A的48张牌中取的，而在前$r-1$次取牌中必有一次是从4个A中取的，第r次是从剩下的3个A中取的，故B中样本点的个数为$A_{48}^{r-2}C_{r-1}^1C_4^1C_3^1$，于是

$$P(B)=\frac{A_{48}^{r-2}C_{r-1}^1C_4^1C_3^1}{A_{52}^r}.$$

12. 一盒子中有4只次品晶体管，6只正品晶体管，随机地逐个抽取测试，直到4只次品管子都找到为止，求第4只次品管子在第5次测试发现和在第10次测试发现的概率.

解：随机试验为把已经编号的10只晶体管任取5只排成一列，Ω中共有A_{10}^5个样本点.

设$A=\{$第4只次品晶体管在第5次测试中发现$\}$，即3只次品晶体管在前4次测试中发现，而第5次测试中是次品.

于是A共有$C_4^3C_6^1 4!$个样本点，则

$$P(A)=\frac{C_4^3C_6^1 4!}{10\times9\times8\times7\times6}=\frac{2}{105}.$$

随机试验为把已经编号的10只晶体管全取出排成一列，故Ω中共有A_{10}^{10}个样本点.

设$B=\{$第4只次品晶体管在第10次测试中发现$\}$，即在“前9次中发现3只次品和6只正品”，共有C_9^3种情况，每一种情况都有$C_4^1C_3^1C_2^1C_6^1C_5^1C_4^1C_3^1C_2^1C_1^1$种可能，故

$$P(B)=\frac{C_4^3 9!}{10!}=\frac{2}{5}.$$

13. 某油漆公司发出17桶油漆，其中白漆10桶，黑漆4桶，红漆3桶.在搬运中所有标签都脱落，交货人随意将这些标签重新贴上.问一个订购4桶白漆、3桶黑漆和2桶红漆的顾客，按所定的颜色如数得到订货的概率是多少？

解：按所定的颜色如数得到订货的概率为$\frac{C_{10}^4C_4^3C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{1}{24\,310}$.

14. 4 名女同学和 3 名男同学决定用抽签的方法分配 4 张电影票，问分到电影票的是 2 名女同学和 2 名男同学的概率是多少？

解：4 女 3 男中随机选出 4 个，Ω 中共有 C_7^4 个样本点.

设 $A=\{$选出的 4 个人中分别为 2 女 2 男$\}$，A 中有 $C_4^2C_3^2$ 个样本点. 故

$$P(A)=\frac{C_4^2C_3^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}.$$

15. 10 个人中有一对夫妇，他们随意地坐在一张圆桌周围，问这对夫妇正好坐在一起的概率是多少？

解：这是一个环形排列的问题，随机试验为 10 个人围成一圈，故 Ω 中共有 9! 个样本点.

设 $A=\{$一对夫妇坐在相邻的位置$\}$. 可以把夫妇二人视为一组，与其他 8 人共 9 个元素做环形排列，共 8! 种可能，夫妇二人交换位置有两种可能，故 A 共有 $2\times8!$ 个样本点，则

$$P(A)=\frac{2\times8!}{9!}=\frac{2}{9}.$$

16. 在整数 0～9 中任取 4 个数，能构成一个 4 位偶数的概率是多少？

解：Ω 中共有 A_{10}^4 个样本点. 设 $A=\{$构成 4 位偶数$\}$，可先从 0,2,4,6,8 中任取一个作为个位数，再从余下的 9 个数中取 3 个作为前 3 位数，这共有 $C_5^1A_9^3$ 种可能，但要去掉 0 作为千位数的情形. 即个位数从 2,4,6,8 中任取 1 个，而 0 是千位数，其余两位从剩下 8 个数中任选 2 个的情形，共 $C_4^1A_8^2$ 种可能，故 A 共有 $C_5^1A_9^3-C_4^1A_8^2$ 个样本点.

$$P(A)=(C_5^1A_9^3-C_4^1A_8^2)/A_{10}^4.$$

17. 某公共汽车线路共有 15 个停车站，从始发站开车时共有 10 名乘客，假设这 10 名乘客在各站下车的概率相同（始发站除外），试求下列事件的概率：

(1) $A=\{$10 人各在不同站下车$\}$；

(2) $B=\{$10 人在同一站下车$\}$；

(3) $C=\{$10 人都在第 3 站下车$\}$；

(4) $D=\{$10 人中恰有 3 人在终点站下车$\}$.

解：Ω 中共有 14^{10} 个样本点.

(1)设 $A=\{$10 人各在不同站下车$\}$，$P(A)=\frac{A_{14}^{10}}{14^{10}}$；

(2)设 $B=\{$10 人在同一站下车$\}$，$P(B)=\frac{C_{14}^1}{14^{10}}$；

(3)设 $C=\{$10 人都在第 3 站下车$\}$，$P(C)=\frac{1}{14^{10}}$；

(4)设 $D=\{$10 人恰有 3 个在终点站下车$\}$，$P(D)=\frac{C_{10}^3\times13^7}{14^{10}}$.

18. 甲、乙是位于某省的两个城市，考察这两个城市六月份下雨的情况，以 A,B 分别表示甲、乙两个城市出现雨天这一事件，根据以往的气象记录知 $P(A)=P(B)=0.4$，$P(AB)=0.28$，求 $P(A|B)$，$P(B|A)$ 及 $P(A\cup B)$.

解：$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.28}{0.4}=0.7$；

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.28}{0.4}=0.7;$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.4-0.28=0.52.$$

19. 为了寻找一本专著，一个学生决定到3个图书馆去试一试.每一个图书馆有这本书的概率为50%，如果有这本书，则已借出的概率为50%，若已知各图书馆藏书是相互独立的，求这个学生能借到这本书的概率.

解：设 A={这个学生能借到这本书}；

A_1={这个学生能在第1个图书馆借到这本书}，$P(A_1)=50\%\times50\%=\frac{1}{4}$；

A_2={这个学生可在第2个图书馆借到这本书}；

A_3={这个学生可在第3个图书馆借到这本书}，则因为 A_1,A_2,A_3 独立，故

$$P(A_1A_2)=P(A_2A_3)=P(A_1A_3)=\frac{1}{16},$$

$$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{64}.$$

$$A=A_1\cup A_2\cup A_3, P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{4},$$

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{37}{64},$$

即 $$P(A)=\frac{37}{64}.$$

20. 已知在10只晶体管中有2只次品，在其中取2次，每次随机地取1只，作不放回抽样，求下列事件的概率：

(1) 2只都是正品；

(2) 2只都是次品；

(3) 1只是正品，1只是次品；

(4) 第二次取出的是次品.

解：随机试验为从10只晶体管中任取2只，Ω 中共有 C_{10}^2 个样本点.

(1)A={2只都是正品}，共有 C_8^2 个样本点，$P(A)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$；

(2)B={2只都是次品}，共有 C_2^2 个样本点，$P(B)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$；

(3)C={1只是正品，1只是次品}，共有 $C_8^1C_2^1$ 个样本点，$P(C)=\frac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$；

(4)D={第二次取出的是次品}，共有 C_9^1 个样本点，$P(D)=\frac{C_9^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{5}$.

21. 袋中有9个白球及1个红球，10个人依次从袋中各取1球，取后不放回，问第 $k(k=1,2,3,\cdots,10)$ 个人取得红球的概率是多少？又若袋中原有8个白球，2个红球，10个人依次