面向“十二五”高等院校人才培养规划教材

概率论与数理统计

Probability Theory and Mathematical Statistics

主 编 欧启通

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

概率论与数理统计

主　编　欧启通
副主编　钟俊江　甄　新
　　　　杨海涛　吴春红

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内容简介

本书是应用型本科基础课程教材，是针对普通高等学校应用型本科教学的概率论与数理统计课程编写的. 全书以易于学生接受的方式介绍概率论与数理统计的基本内容，并突出概率论与数理统计中主要内容的思想方法. 全书共10章，前五章为概率论部分，主要包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理，是学习数理统计的必备基础. 第六至九章为数理统计部分，主要包括样本及抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析. 第十章介绍了MATLAB软件在概率统计中的应用. 书后附有习题答案及常用的一些统计分布表.

本书可作为高等院校理工科、经济学、管理学等各专业概率论与数理统计课程的教材，也可作为教师、学生和科技工作者学习概率论与数理统计知识的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/欧启通主编. —杭州：浙江大学出版社，2014.2

ISBN 978-7-308-12859-9

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①欧… Ⅲ. ①概率论—教材 ②数理统计—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第019756号

概率论与数理统计

主编 欧启通

责任编辑 邹小宁
文字编辑 叶梦箫
封面设计 王聪聪
出　　版 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州教联文化发展有限公司
印　　刷 浙江国广彩印有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 16
字　　数 389千
版 印 次 2014年2月第1版 2014年2月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-12859-9
定　　价 31.80元

前　言

本书是根据教育部数学教学指导委员会制定的关于概率论与数理统计课程教学基本要求，在参考了国内外许多同类优秀教材的基础上，结合编者多年讲授概率论与数理统计课程所积累的经验而编写的，可作为高等院校理工科、经济学、管理学等各专业概率论与数理统计课程的教材.

本书在充分了解当前教学现状的基础上，在教材基本理论知识的编写和实践应用能力的培养方面做了改革尝试，以保证基本理论知识够用，同时强化学生的实践应用能力. 主要特点如下：

(1)本书在概念的引入、结论的推证、理论体系的完善、材料的安排等方面，都从教学的实际要求出发，教学适用性强；

(2)从课程特点出发，分析人才培养的需求差异及课程体系系统性、严密性与应用型人才培养需求的关系，兼顾学生的知识学习与能力，使教材适宜于培养应用型人才；

(3)注重渗透现代化教学思想和手段、重视应用能力的培养. 介绍了如何使用MATLAB中的相关命令进行概率和统计计算以及绘制统计图形的方法. 希望通过学习既有益于学生对概率统计基本理论的理解，又能初步使用现代计算技术进行统计分析.

全书共10章. 第1～5章为概率论部分，主要包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理，是数理统计的必备基础. 第6～9章为数理统计部分，内容包括样本及抽样分布、参数估计、假设检验和回归分析. 第十章介绍了MATLAB软件在概率统计中的应用，供读者因需选用. 本书第1、2章由欧启通编写，第3、4章由钟俊江编写，第5、6、7章由甄新编写，第8、9章由杨海涛编写，第10章由吴春红编写. 全书由欧启通统稿、定稿.

在本书的编写过程中，参考了书后所列参考文献，作者在此对这些参考书的作者表示感谢！

本书的编写得到了单位领导、有关专家的关心和指导，及浙江大学出版社领导和有关编辑的支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢！

由于编者的水平所限，虽经多次修改，书中一定还存在许多错误和不足，恳请读者批评指正.

编　者

2013年12月

目　录

第1章　随机事件及概率

在自然界及人类的社会生活中，事物都是相互联系和不断发展的. 在事物彼此联系和发展过程中，人们经常会遇到两类不同的现象：一类是在一定条件下必然发生(或必然不发生)某一确定结果的现象. 例如，每天早晨太阳从东方升起；上抛一枚硬币，必然下落；同性电荷互相排斥，异性电荷互相吸引等，这类现象被称为**确定性现象(或必然现象)**. 我们所学的高等数学、线性代数等数学课程都是专门研究这类确定性现象规律性的数学学科. 另一类是在一定条件下可能出现多种结果，但事先又不能肯定出现哪种结果的现象. 例如，在相同条件下上抛一枚硬币，其结果可能是国徽一面朝上，也可能是数字一面朝上，但在每次抛掷之前无法肯定到底哪一面朝上；又如，为了了解产品质量，从一批某种产品中任意抽查一件，可能是正品，也可能是次品，事先同样无法确定；再如，投掷一枚骰子，可能出现1、2、3、4、5、6点，至于将掷出哪一点，也是不能事先准确预知的，这类现象被称为**随机现象(或偶然现象)**. 对于随机现象，由于人们事先无法肯定将出现哪种结果，从表面上看似乎难以捉摸，其结果纯属偶然，其实并非如此. 实践证明：在相同条件下，只要对随机现象进行大量的重复性试验，就会发现各种结果出现的可能性会呈现出某种规律性，这就叫做**随机现象的统计规律性**.

概率论是研究和揭示随机现象统计规律的一门数学学科. 数理统计则是以概率论为基础，研究如何依据大量次数的随机试验中所得到的数据，推断事物本质特征的各种方法.概率统计的理论与方法在工业、农业、天文、军事、医学、金融、保险、试验设计等人类活动的各个领域中发挥着越来越重要的作用. 在理论联系实践方面，可以说概率统计是当今世界上发展最迅速且最活跃的数学分支.

§1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机试验

为了研究随机现象的统计规律性，需要对随机现象进行大量的重复观察或试验. 这里的试验是一个很广泛的术语，它包括各种各样的科学试验，也可以是对自然现象或社会现象所进行的观察. 例如，某地的年降雨量，某交通路口1小时内的汽车流量，在相同条件下某汽车站售票处一天内售出的车票数等.

定义1 具有下述三个特点的试验称为**随机试验**，简称为**试验**，通常用大写英文字母E表示.

(1)**可重复性**：可以在相同条件下重复进行.

(2)**多样性和明确性**：每次试验的可能结果不止一个，并且可以预知试验的所有可能结果.

(3)**不确定性**：进行一次试验前不能确定将会出现何种结果.

下面再举几个随机试验的例子.

例1 设E_1：上抛一枚硬币并观察出现正面还是反面.

E_2：上抛两枚硬币并观察出现正面和反面的情况.

E_3：掷一颗骰子，观察出现的点数.

E_4：在一个班级中选一名学生，观察其《高等数学》课程期末考试的得分(以百分制记分).

E_5：记录某市110报警台每天收到的报警电话数.

E_6：在一批电子元件中任意抽取一只，测试其使用寿命.

E_7：在单位圆中任取一点，记录其坐标.

1.1.2 样本空间

虽然在试验之前不可预知会出现哪种结果，但是所有可能出现的结果是已知的.为了方便处理，我们给出以下定义.

定义2 随机试验的所有可能出现的结果组成的集合称为该试验对应的**样本空间**，样本空间通常记为Ω. 样本空间的元素称为**样本点**，用ω表示.

例2 在例1中随机试验E_1、E_2、E_3、E_4、E_5、E_6、E_7对应的样本空间分别为

$\Omega_1=\{H,T\}$，“H”表示正面朝上，“T”表示反面朝上，则$\omega=H$表示硬币正面朝上，$\omega=T$表示硬币反面朝上；

$\Omega_2=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$；

$\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$\Omega_4=\{0,1,2,\cdots,100\}$；

$\Omega_5=\{0,1,2,3,\cdots\}$；

$\Omega_6=\{t|0\leqslant t\leqslant T\}$，$T$为这批元件最长使用寿命；

$\Omega_7=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$.

根据样本点的个数不同，样本空间可以分为有限集或无限集，如Ω_1、Ω_2、Ω_3、Ω_4是有限集，而Ω_5、Ω_6、Ω_7是无限集；也可以分为一维点集或多维点集，如Ω_1、Ω_3、Ω_4、Ω_5、Ω_6是一维点集，Ω_2、Ω_7是多维点集.

1.1.3 随机事件

定义3 随机试验E的样本空间Ω的子集称为E的**随机事件**，简称**事件**.通常用大写字母A，B，C表示事件，如图1-1所示. 任何一个样本点ω构成的单点集$\{\omega\}$，称为**基本事件**，而由若干基本事件组合而成的随机事件称为**复合事件**.

在概率论中，事件A发生，是指当且仅当A所包含的某一样本点发生. 即，如果在一次试验当中，出现的结果$\omega \in A$，则称随机事件A**发生**，否则称其不**发生**.

定义4　样本空间Ω，称为**必然事件**. 因为Ω本身也是Ω的一个子集，因此也是事件. 在一次试验当中，不管出现什么结果，它必属于样本空间Ω，所以必然事件必定会发生. 空集$\varnothing$是任何集合的子集，它不包含样本空间的任何样本点，它必然不会发生，称之为**不可能事件**.

例3　抛掷一枚骰子，观察其点数的情况. 设A={出现的点数是6}，它是一个基本事件；设B表示出现偶数点的事件，则B是一个随机事件；设C={出现的点数不超过6}，任何一次试验其结果都不超过6，所以C是一个必然事件，即$C=\Omega$；设D={出现的点数是7}，显然它是不会发生的，它是一个不可能事件，即$D=\varnothing$.

1.1.4　事件的关系与运算

在一个样本空间中，可以有许多随机事件，希望通过对较简单的事件的了解去掌握较复杂的事件.为此需要研究事件之间的关系与事件之间的运算.

既然随机事件是一个集合，因此事件之间的关系及其运算可以按照集合论中集合之间的关系与集合之间的运算来处理.

1. 事件的包含关系

定义5　若事件A中每个样本点都属于事件B，则称事件A**包含于**事件B或事件B**包含**事件A，记为$A \subset B$（或$B \supset A$）. 其含义是若A发生，必然导致B发生. 如图1–2所示.

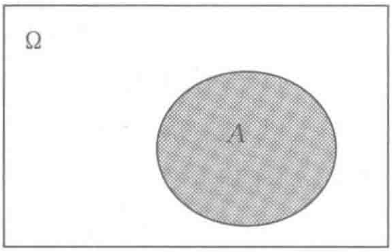

图1–1　事件A

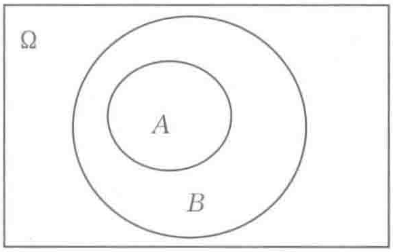

图1–2　$A \subset B$

2. 事件的相等关系

定义6　若事件A包含事件B，同时事件B包含事件A，即$B \subset A$且$A \subset B$，则称事件A与事件B**相等**，记为$A=B$.

例4　如例3中抛掷骰子试验中，有$A \subset B \subset C$，若再设E={出现的点数是2, 4, 6}，则有$B=E$.

3. 事件的并（和）

定义7　由事件A与事件B中一切样本点所组成的集合称为事件A与事件B的**并（或和）**. 其含义是事件A与事件B至少有一个发生，记为$A \cup B$，如图1–3所示.

n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和事件记为$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，它表示n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一

个发生；可列个事件$A_1, A_2, \cdots$的和事件记为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，它表示的是可列个事件$A_1, A_2, \cdots$中至少有一个事件发生.

4. 事件的交（积）

定义 8 由既属于事件A又属于事件B的样本点所构成的集合称为事件A与事件B的**交（或积）**. 其含义是事件A与事件B同时发生，记为$A \cap B$或AB，如图 1-4 所示.

n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的积事件记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，它表示$n$个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生；可列个事件$A_1, A_2, \cdots$的积事件记为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，它表示的是可列个事件$A_1, A_2, \cdots$同时发生.

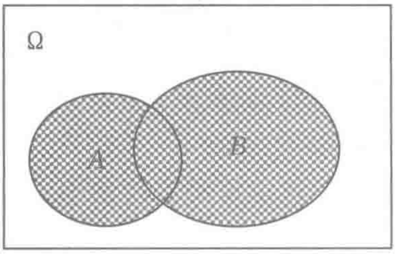

图 1-3 $A \cup B$

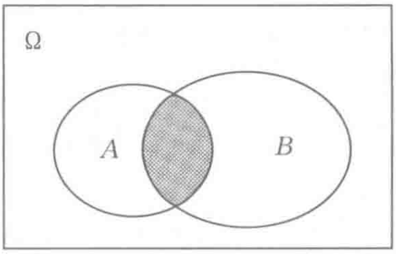

图 1-4 $A \cap B$

例 5 在抛掷骰子的试验中，记事件A={出现的点数小于 4}，事件B={出现的点数是奇数}，则$A \cup B$={出现的点数为 1, 2, 3, 5}，而AB={出现的点数是 1, 3}.

5. 互斥事件（互不相容事件）

定义 9 若事件A与事件B没有公共的样本点，则A与B为**互斥事件或互不相容事件**. 其含义是事件A与事件B不能同时发生，即$AB=\varnothing$，如图 1-5 所示.

设试验E的样本空间为Ω，对于不等的i, j，基本事件$\{\omega_i\}$与基本事件$\{\omega_j\}$是互斥事件.

若$A_iA_j=\varnothing (i \neq j; i, j=1, 2, 3, \cdots, n)$，则称事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$**两两互不相容**.

6. 对立事件（互逆事件）

定义 10 若两个事件A与B的积为不可能事件，和事件为必然事件，即$AB=\varnothing$且$A \cup B=\Omega$，则称A与B为**对立事件（或互逆事件）**. 其含义是事件A与事件B不能同时发生且事件A与事件B至少有一个发生. 这时，我们称B为A的对立事件，记号为$\bar{A}$；同样，A也为B的**对立事件**，记号为$\bar{B}$. 如图 1-6 所示.

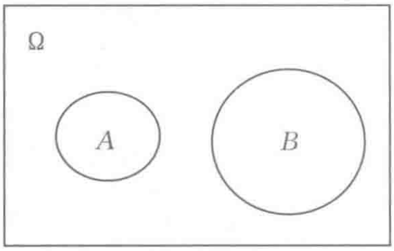

图 1-5 $A \cap B=\varnothing$

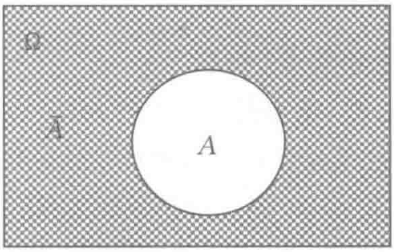

图 1-6 $\bar{A}=\Omega-A$

对于对立事件，我们有$A\bar{A}=\varnothing$，$A\cup\bar{A}=\Omega$，$\bar{\bar{A}}=A$.

例6 在一个班级中选一名学生，观察他的《高等数学》课程期末考试的得分. 令A={得分≥60分}，B={得分<60分}，则$AB=\varnothing$，且$A\cup B=\Omega$，所以$B=\bar{A}$.

7. 差事件

定义11 由属于事件A但不属于事件B的样本点组成的集合称为**A与B之差**. 其含义是事件A发生但事件B不发生，记号为$A-B$，如图1-7所示.

不难发现$A-B=A-AB=A\bar{B}$，$\bar{A}=\Omega-A$.

例7 某种圆柱形零件的长度与外径都合格时才算合格，事件A表示“长度合格”，事件B表示“外径合格”. 则差事件$A-B$表示“长度合格但外径不合格”.

8. 完备事件组

定义12 设Ω为试验E的样本空间，$A_1,A_2,\cdots,A_n$为E的一组事件，它们两两互不相容且$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，则$A_1,A_2,\cdots,A_n$称为$E$的一个**完备事件组**，或称为样本空间$\Omega$的一个**有限划分**，如图1-8所示.

设试验E中有一事件组$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，它们两两互不相容，且$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\Omega$，则$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$也称为$E$的一个**完备事件组**，或称$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$为样本空间$\Omega$的一个**可列无穷划分**.

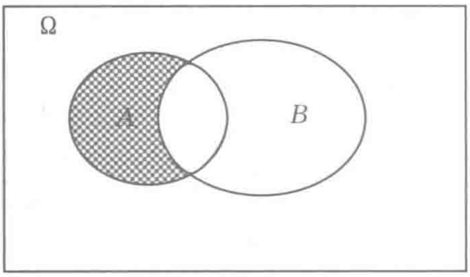

图1-7 $A-B=A\bar{B}$

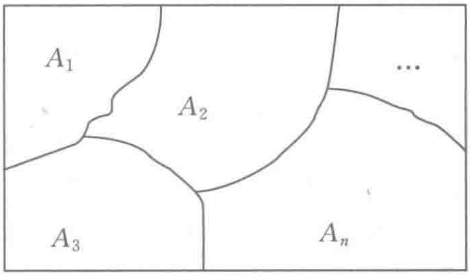

图1-8 有限划分

同集合运算相一致，事件之间的运算也有以下几个性质.

(1)**幂等律**：$A\cup A=A$， $A\cap A=A$.

(2)**交换律**：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(3)**结合律**：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$， $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(4)**分配律**：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$， $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(5)**对偶律**：$\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{A\cap B}$， $\bar{A}\cap\bar{B}=\overline{A\cup B}$.

上述运算对有限个或可列个事件的情况也同样成立.

例8 某重型机械厂一周内生产了三台挖掘机，设事件A_i表示“出厂时经检验第i台挖掘机合格”，$i=1,2,3$，试用A_1,A_2,A_3表示下列随机事件.

(1)第1台挖掘机合格；

(2)只有第1台挖掘机合格；

(3)恰有1台挖掘机合格；

(4)恰有2台挖掘机合格；

(5)至少有1台挖掘机合格；

(6)至多有1台挖掘机合格.

解：事件$\overline{A_i}$表示“出厂时经检验第i台挖掘机不合格”，$i=1,2,3$.

(1)这时第2台、第3台挖掘机可能合格，也可能不合格. 因此该事件可表示为A_1.

(2)这时只有第1台挖掘机合格，而第2台、第3台挖掘机肯定不合格，因此该事件可表示为$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(3)“恰有1台挖掘机合格”没有指明哪一台合格，因此该事件可表示为$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

(4)“恰有2台挖掘机合格”没有指明哪两台合格，因此该事件可表示为$A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$.

(5)“至少有1台挖掘机合格”可以看成A_1,A_2,A_3这三个事件中至少有一个发生，因此该事件可表示为$A_1\cup A_2\cup A_3$.另一方面，“至少有1台挖掘机合格”的对立事件是“三台挖掘机均不合格”，于是所求事件也可表示为$\overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}}$，根据对偶律可以知道$\overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}}=A_1\cup A_2\cup A_3$.

(6)“至多有1台挖掘机合格”是“恰有1台挖掘机合格”和“3台挖掘机均不合格”这两个互斥事件的并，因此所求事件可表示成$A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

例9 一工人生产了n个零件，设$A_i=\{$第i个零件是正品$\}(i=1,2,\cdots,n)$.试用文字叙述下列事件：

$$(1)\bigcap_{i=1}^{n}A_i;\ (2)\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i;\ (3)\bigcup_{i=1}^{n}[\bar{A}_i\cap(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}A_k)]$$

解：(1)$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$表示n个零件全是正品；

(2)$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i$表示至少有一个零件不是正品；

(3)$\bigcup_{i=1}^{n}[\bar{A}_i\cap(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}A_k)]$表示仅有一个零件不是正品.

习题 1.1

1. 判断下列试验是否为随机试验：(1)在恒力作用下一质点作匀加速运动；(2)在一定条件下进行射击，观察是否击中靶上的红心；(3)在5个同样的球(标号1,2,3,4,5)中，任意取一个，观察所取球的标号；(4)在分析天平上称量一小包白糖，并记录称量结果.

2. 写出下列试验的样本空间Ω与随机事件A.

(1)记录一个小班一次高等数学考试的平均分数(以百分制记分，班级人数为30人)；事件A表示“高等数学平均分及格”；

(2)同时掷2颗骰子一次,记录骰子点数之和;事件A表示"出现的点数之和为奇数";

(3)对一个目标进行射击,一旦击中便停止射击,观察射击的次数;事件A表示"射击不超过4次";

(4)某十字路口每小时通过的机动车数量.

3. 设A,B,C为三个事件,试将下列事件用A,B,C的运算关系表示出来:(1)三个事件都发生;(2)三个事件都不发生;(3)三个事件至少有一个发生;(4)A发生,B,C不发生;(5)A,B都发生,C不发生;(6)三个事件中至少有两个发生;(7)不多于一个事件发生;(8)不多于两个事件发生.

4. 甲、乙、丙三人各向靶子射击一次,设A_i表示"第i人击中靶子"$i=1,2,3$. 试说明下列各式表示的事件.(1) $A_1\overline{A_2}A_3$;(2) $(A_1\cup A_2)\overline{A_3}$;(3) $A_1A_2\cup A_2A_3\cup A_1A_3$;(4) $A_1\overline{A_2}\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\overline{A_2}A_3$.

5. 请叙述下列事件的对立事件.(1)A="掷2枚硬币,皆为正面";(2)B="射击三次,皆命中目标";(3)C="加工4个产品,至少有1个正品".

§1.2 事件的频率与概率

随机试验中有若干个随机事件,而对于其中一个事件(除必然事件和不可能事件外)在这次试验中有可能发生,也有可能不发生,在试验前是无法预知的. 我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性有多大. 例如,我们学校在确定某一天举办田径运动会时,都想知道这一天天晴的可能性大小. 工厂生产某种元件时,在出厂检验时都希望这批元件中出现次品的可能性是否尽可能小,那么如何定量来描述这种可能性大小呢? 为此,首先引入频率,它描述了事件发生的频繁程度;进而引入表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1.2.1 概率的统计定义

定义 13 在相同条件下重复进行n次试验,在这n次试验中,若事件A发生了n_A次,则n_A称为事件A发生的**频数**,$\frac{n_A}{n}$称为事件A发生的**频率**,记为$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

由定义可知,频率具有以下三个性质:

(1)**非负性**:$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

(2)**规范性**:$f_n(\Omega)=1$.

(3)**频率的有限可加性**:若$A_1,A_2,\cdots,A_m$是m个两两互不相容的随机事件,则$f_n(\bigcup_{i=1}^{m}A_i)=\sum_{i=1}^{m}f_n(A_i)$.

为研究事件的概率，历史上人们曾作过投硬币的试验，并将其频率统计列表，如表1–1所示.

表1–1 抛硬币试验

试验者	抛掷次数n	出现正面次数n_A	频率$\frac{n_A}{n}$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

从上述数据不难看出，在相同的条件下进行的重复试验，同一事件出现的频率是不同的，也就是说频率具有波动性. 但是，当试验次数很大时，频率总是在某一个固定的数值p（上述试验中$p=0.5$）附近摆动，并且随着试验的次数无限增大，频率与数值p越来越接近. 这就是说，频率具有稳定性，数值p便是频率的稳定值. 显然，频率如果稳定于较小的数值，则表明相应事件出现的可能性较小，反之，表明事件出现的可能性较大.

大量的随机试验表明：尽管频率具有波动性，但频率也具有稳定性. 频率的稳定性，我们称之为**随机事件的统计规律性**. 频率的稳定值p正是相应事件发生的可能性大小的数值度量. 由于频率的稳定值是客观存在的，因此对于任何一个事件A，描述它发生的可能性大小的概率值$p(A)$也是客观存在的，因此我们将频率的稳定值作为相应事件的概率是合理的.

定义 14 在相同条件下大量重复试验，随机事件A出现了n_A次，随机事件A发生的频率$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$稳定在某个常数p的附近，我们称这个稳定值p为随机事件A的**概率**，记为$P(A)=p$.

上述我们用频率的稳定值来定义事件的概率，称之为概率的统计定义.

1.2.2 概率的公理化定义

概率的统计定义只是一个模糊定义，因而存在严重不足之处，不能作为严格的数学定义. 1933年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫（Konmoropob）提出了概率的公理化定义，使概率论成为一门严谨的数学分支，对概率论的迅速发展起到了积极的作用. 下面给出建立在严密的逻辑基础上的概率公理化定义.

定义 15 设E是随机试验，Ω是试验E的样本空间，对于E的每一个事件A，将其对应于一个实数$P(A)$，如果$P(A)$满足下列三个公理化条件，则称$P(A)$为事件A发生的

概率.

(1)**非负性**:对于任意事件A,有$P(A)\geqslant 0$;

(2)**规范性**:$P(\Omega)=1$;

(3)**可列可加性**:设$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是两两互不相容的可列可数个事件,则有$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

由概率的公理化定义可知,每一个随机事件A都有一个实数$P(A)$与之对应,因此事件A的概率是一个客观的确定值,这个值对随机事件发生可能性的大小作定量化的度量.

1.2.3　概率的性质

利用概率定义的三条公理化条件,我们可以推出概率的另外一些重要性质.

性质1　$P(\varnothing)=0$.

证明　令$A_i=\varnothing(i=1,2,\cdots)$,则$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$,且$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$,由概率的可列可加性可得

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

由概率的非负性知,$P(\varnothing)\geqslant 0$,故必有$P(\varnothing)=0$.

由概率的性质知,必然事件的概率为1,不可能事件的概率为0,现提出一个问题,概率为1的随机事件是必然事件吗? 概率为0的随机事件是不可能事件吗? 请读者思考,该问题会在第2章第3节§2.3给予回答.

性质2(有限可加性)　设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是两两互不相容的事件,则有$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

证明　令$A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,即有$A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$,由概率的可加性和性质1可得

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)+0=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

性质3(逆事件的概率)　对于任一事件A,有$P(\bar{A})=1-P(A)$.

证明　因为$A\cup\bar{A}=\Omega$,$A\bar{A}=\varnothing$,由规范性和性质(1)、(2)可得

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A}).$$

性质4(正常差)　设A和B是两个事件,若$A\subset B$,则有$P(B-A)=P(B)-P(A)$.

证明　由$A\subset B$,知$B=A\cup(B-A)$且$A(B-A)=\varnothing$,再由概率的有限可加性可得$P(B)=P(A)+P(B-A)$,故有

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

性质5(减法公式)　设A和B是两个事件,有$P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)$.

证明　因为$B=BA\cup B\bar{A}$且$BA\cap B\bar{A}=\varnothing$,与性质4同理可证得$P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)$

成立.

性质6(单调性) 设A和B是两个事件,若$A\subset B$,则有$P(A)\leqslant P(B)$.

证明 由性质4可得$P(B-A)=P(B)-P(A)$,因为概率的非负性,所以$P(A)\leqslant P(B)$成立.

性质7(有界性) 对于任一事件A,有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

证明 因为$\varnothing\subset A\subset\Omega$,根据单调性可得$0\leqslant P(A)\leqslant 1$成立.

性质8(加法公式) 设A和B是任意两个事件,有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证明 因$A\cup B=A\cup(B-AB)$且$A(B-AB)=\varnothing$,$AB\subset B$,由性质2和性质4可得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

为加强对概率性质的理解,可把样本空间看成面积为1的矩形,$P(A)$理解为事件A的面积,如$P(A\cup B)$是$A\cup B$的面积,必然等于A的面积加上B的面积再减去AB的面积,如图1–9所示.

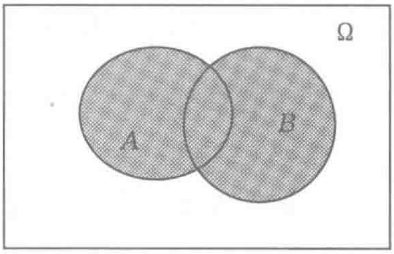

图1–9

概率的加法公式可以推广到多个事件的情况,例如,设A_1,A_2,A_3为任意三个事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

一般地,对于任意n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$,可用数学归纳法证得:

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

性质9(次可加性) 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是任意n个事件,有$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

本性质可用数学归纳法证明,这里从略.

例10 设A、B、C是三个事件,若$P(\bar{A})=0.5$,$P(\bar{A}B)=0.2$,$P(B)=0.4$,求(1)$P(AB)$;(2)$P(A\bar{B})$;(3)$P(A\cup B)$;(4)$P(\bar{A}\bar{B})$.

解:(1)因为$B=AB+\bar{A}B$,所以$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$,从而$P(AB)=P(B)-P(\bar{A}B)=0.4-0.2=0.2$;

(2)$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0.5=0.5$,故$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=0.5-0.2=0.3$;

(3)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7$;

(4)$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0.7=0.3$.

也可由减法公式来计算,即

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A}-B)=P(\bar{A})-P(\bar{A}B)=0.5-0.2=0.3.$$

例11 设A、B、C是三个事件,且$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(BC)=\frac{1}{8}$,$P(AC)=0$,求$A,B,C$都不发生的概率.

解:A、B、C都不发生可以表示为$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$,易知$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=1-P(A\cup B\cup C)$,由$ABC\subset AC$,且已知$P(AC)=0$,得$0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AC)=0$,故$P(ABC)=0$.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=\frac{1}{2}.$$

例10和例11的问题是已知一些事件的概率,求有关事件的概率,解决这类问题的关键是找出事件之间的关系,然后利用概率性质、事件之间的关系进行运算. 借助于事件的图形表示,往往易于观察事件之间的运算关系,这样就利于概率的计算.

习题 1.2

1. 设A、B、C两两互不相容,$P(A)=0.2$, $P(B)=0.3$, $P(C)=0.4$,求$P[(A\cup B)-C]$.
2. 若$P(A)=0.5$, $P(B)=0.4$, $P(A-B)=0.3$,求$P(\bar{A}\cup\bar{B})$.
3. 设A、B为两事件,$P(A)=0.5$, $P(A-B)=0.2$,求$P(\overline{AB})$.
4. 设A和B是两事件,$B\subset A$,$P(A)=0.9$, $P(B)=0.36$,求$P(A\bar{B})$.
5. 已知$P(A)=p$, $P(B)=q$, $P(A\cup B)=r$,求$P(A\bar{B})$,$P(\bar{A}\cup\bar{B})$及$P(\bar{A}\bar{B})$.
6. 设A,B是两事件,且$P(A)=0.6$,$P(B)=0.7$. 试问:(1)在什么条件下$P(AB)$取到最大值,最大值是多少?(2)在什么条件下$P(AB)$取到最小值,最小值是多少?

§1.3 古典概型和几何概型

在历史上,人们最早研究的随机试验是“掷骰子,抛硬币,抽签”之类的问题. 这一类随机试验,与赌博的关系比较密切,也是概率论中最吸引人的一类题型。

1.3.1 古典概型

定义 16 如果随机试验E具有以下两个特征——

(1)**有限性**:试验E的样本空间Ω仅含有有限个样本点;

(2)**等可能性**:每个基本事件的发生是等可能的,即具有相同的概率.

则称该试验为**古典型随机试验**,简称为**古典概型**.

假设一个古典概型的样本空间Ω中共有n个样本点,有利于随机事件A的样本点数为n_A,那么随机事件A的概率为

$$P(A)=\frac{\text{有利于事件}A\text{的样本点数}}{\Omega\text{中所包含的样本点总数}}=\frac{n_A}{n}. \tag{1-1}$$

例 12 将一颗骰子连掷两次,试求下列事件的概率:(1)两次掷得的点数之和为9;(2)第二次掷得6点.

解:将掷骰子两次看做一次试验,第一次掷得i点,第二次掷得j点,则样本空间Ω为:

$$\Omega=\{(1,1),\cdots,(1,6),(2,1),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),\cdots,(6,6)\}.$$

显然Ω共有36个样本点,因为骰子质量均匀,故每个点面朝上是等可能的,从而是古典概型.

设A表示点数之和为9,B表示第二次掷得6点,则

$$A=\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\},$$

$$B=\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}.$$