十二五” 职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

线性代数

Linear Algebra

東北大學出版社
Northeastern University Press

"十二五"职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

线性代数

Linear Algebra

东北大学出版社

·沈阳·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数／孙静懿，滕勇，节存来主编．—2版．— 沈阳　：东北大学出版社，2015.9
“十二五”职业教育国家规划教材
ISBN 978-7-5517-1002-2

Ⅰ．线…　Ⅱ．①孙…　②滕…　③节…　Ⅲ．线性代数—高等职业教育—教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第151052号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路3号巷11号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress. com
网址：http：//www. neupress. com
印 刷 者：抚顺光辉彩色广告印刷有限公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：185mm×260mm
印　　张：9.75
字　　数：256千字
出版时间：2015年9月第2版
印刷时间：2015年9月第1次印刷
责任编辑：刘宗玉
责任校对：申　骄
封面设计：唯　美
责任出版：唐敏智

ISBN 978-7-5517-1002-2　　　　定　　价：18.00元

《线性代数》编写人员

主　　编：孙静懿　滕　勇　节存来

副　主　编：刘汝臣　赵会引　沙　萍

第二版前言

本书自2009年出版已经使用六年，受到了部分高职院校老师、学生的欢迎，今年又被教育部审定为“十二五”职业教育国家规划教材.这既是对这本书的肯定，也给我们提出了更加严格的要求.同时，随着教学改革的不断深入和高职高专院校形势的变化，对线性代数课教学提出了新的要求，加之在教学实践中也发现书中的一些不足和欠缺，所以对本书的修订工作也被提到议事日程.因此，我们决定对本书进行一次全面的修订.

这次修订工作的宗旨是在保持第一版“联系实际、深化概念、侧重计算、注重应用”特色的前提下，使教材更加贴近当前的教学实际、方便教学.首先是对内容的调整，既有增删，又有改写，还对部分章节内容做了重新组合，使之更进一步突出数学的基本思想和基本方法，确保理论体系系统、完整；其次是继续增加实践环节，补充一些实际应用的例题和习题；对一些较难习题给出必要的提示.

许多专家对本书提出了宝贵意见，部分高职院校的老师也把他们使用过程中发现的问题和一些建设性意见反馈给我们，在这里，我们向他们致以衷心的感谢！

参加本书编写的还有王学理、韩蕾.由于作者水平所限，本书的不妥、疏漏、缺憾之处在所难免，衷心希望广大师生在使用过程中提出宝贵改进意见.

编　者

2015年3月

第一版前言

近年来随着高职高专教学改革的不断深入，对数学课程的基本要求有了很大变化，并提出了一些新的要求. 如何实现高职高专学生的专业培养目标，与“工学结合”培养模式相适应；怎样才能在数学课程学时不断减少的情况下，为学生们打好数学基础，这些都给数学教学工作者提出了新的课题. 正是在这样的背景下，我们结合教学改革的实际要求和多年积累的一些成功经验，精心编写出这套《21 世纪高职高专数学规划教材》，本书为其中的《线性代数》.

本书是根据教育部“高职高专教育线性代数课程教学基本要求”而编写的，遵循“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则，并充分考虑了相当多的学校线性代数课程学时减少这一实际情况. 为此，确立编写本书的指导思想为：联系实际，深化概念，侧重计划，注重应用. 本书具备如下特色：

1. 重视基本概念

线性代数内容虽然抽象，但其中每一个基本概念都有自己的实际应用背景，力求从身边的实际问题出发，自然地引出基本概念，以激发学生的兴趣和求知欲. 在弄清基本概念的基础上，理顺基本概念和各个概念之间的联系，提高教学效果. 在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会数学的本质以及数学的价值.

2. 结合实际，注重实用

例题、习题中注重工程上或经济方面实际问题的选取，意在培养学生解决实际问题的意识和能力，最终实现培养应用性人才的高职高专教育目标.

3. 侧重运算、解题能力

在解题方法方面有较深入的论述，其用意在于让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程、掌握解题方法，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的.

全书共五章，依次为第一章行列式、第二章矩阵、第三章矩阵的初等变换与线性方程组、第四章向量组的线性相关性、第五章二次型. 各章节后均配有习题，书后附有全部习题的参考答案. 标有 * 的内容是数学大纲不要求的内容.

由于水平所限，加之时间仓促，书中存在疏漏、不足之处在所难免，敬请广大师生不吝赐教，将不胜感谢.

编　者

2009 年 6 月

目　录

第一章　行列式

行列式是线性代数中的一个基本工具. 本章在介绍二阶、三阶行列式的基础上，给出 n 阶行列式的定义、性质和计算，并且讨论行列式在求解线性方程组方面的应用问题[1].

第一节　n 阶行列式的定义

一、二阶行列式

对于二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, & (1)\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, & (2)\end{cases}$$

求其解. 用消元法. 当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，先消去 x_2 所在项：(1) $\times a_{22}$，(2) $\times a_{12}$，方程组变为

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_1a_{22}, & (3)\\ a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=b_2a_{12}, & (4)\end{cases}$$

(3) - (4)，得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

同理，对原方程组消去 x_1 所在项：(1) $\times a_{21}$，(2) $\times a_{11}$，方程组变为

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1+a_{12}a_{21}x_2=a_{21}b_1, & (5)\\ a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2=a_{11}b_2, & (6)\end{cases}$$

(6) - (5)，得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

下面引入二阶行列式的定义，可以使二元一次线性方程组解的表达式更简洁.

定义 1　由 4 个数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

称为一个二阶行列式. 它代表一个算式，其值为 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

---

[1]　本书所有内容仅在实数范围内讨论.

其中，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}称为二阶行列式的元素.

在行列式中，横排称为行，竖排称为列. 行列式左上角至右下角可画一条实对角线称为主对角线，右上角至左下角可画一条虚对角线称为副对角线. $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$是二阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$的主对角线上元素的乘积与副对角线上元素的乘积之差，所以这种运算称为二阶行列式遵循对角线法则. 如图 1-1 所示.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

图 1-1

由二阶行列式的定义，记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

称 D 是上述二元一次线性方程组的系数行列式，则

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

是用常数项$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$替换 D 中第一列所得的行列式；

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

是用常数项$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$替换 D 中第二列所得的行列式.

当 $D\neq0$ 时，方程组有且仅有一组解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

例 1　求解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2=1, \\ 7x_1+3x_2=3. \end{cases}$$

【解】　因为

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=5\times3-2\times7=1\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=1\times3-2\times3=-3,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=5\times3-1\times7=8,$$

所以线性方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-3,\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=8.$$

二、三阶行列式

设三元一次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}$$

与二元一次线性方程组类似，可以用消元法得到其解的表达式. 为简洁方便，下面引入三阶行列式的定义.

定义 2　由 9 个数 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 组成的符号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

称为三阶行列式. 其值为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

其中，$a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$ 来源于三条主对角线上元素的乘积，前面加正号；$-a_{11}a_{23}a_{32}$，$-a_{12}a_{21}a_{33}$，$-a_{13}a_{22}a_{31}$ 来源于三条副对角线上元素的乘积，前面加负号. 其运算亦遵循对角线法则. 如图 1-2.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

图 1-2

例 2　求解三元一次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6,\\ 3x_1+2x_2-x_3=4,\\ x_1+2x_2-2x_3=-1.\end{cases}$$

【解】　因为

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\ 3&2&-1\\ 1&2&-2\end{vmatrix}$$

$$=1\times2\times(-2)+1\times(-1)\times1+1\times3\times2-1\times2\times1-1\times3\times(-2)-1\times(-1)\times2$$

$$=7,$$

$$D_1=\begin{vmatrix}6&1&1\\ 4&2&-1\\ -1&2&-2\end{vmatrix}$$

$$=6\times2\times(-2)+1\times(-1)\times(-1)+1\times4\times2-1\times2\times(-1)-1\times4\times(-2)-6\times(-1)\times2=7,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&6&1\\3&4&-1\\1&-1&-2\end{vmatrix}$$

$$=1\times4\times(-2)+6\times(-1)\times1+1\times3\times(-1)-1\times4\times1-6\times3\times(-2)-1\times(-1)\times(-1)=14,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&6\\3&2&4\\1&2&-1\end{vmatrix}$$

$$=1\times2\times(-1)+1\times4\times1+6\times3\times2-6\times2\times1-1\times4\times2-1\times3\times(-1)=21,$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{7}{7}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{14}{7}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{21}{7}=3.$$

三、n 阶行列式

前面我们定义了二阶、三阶行列式，二阶行列式的展开式由 $2!=2$项组成，三阶行列式的展开式由 $3!=6$项组成. 类似地，我们可以定义四阶及更高阶的行列式.

下面考查二阶行列式与三阶行列式之间的关系：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix},$$

显然，如果行列式的第一行元素都是零，则行列式等于零. 上式右端共 3 项，是三阶行列式中第一行的元素 a_{11}，a_{12}，a_{13}分别乘以三阶行列式中划去第 1 行第 j 列($j=1, 2, 3$)元素后剩余元素保持原位置不变组成的二阶行列式. 每一项前的符号为$(-1)^{1+j}$，$1+j$ 为元素 a_{1j}的行标和列标之和.

按照这一规律，可用递归定义的方法定义四阶行列式、五阶行列式. 以此类推，在定义了 $n-1$ 阶行列式之后，可得到 n 阶行列式的定义.

定义 3 由 n^2 个数 $a_{ij}(i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, n)$组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 其值为

$$(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

简记为 $\det(a_{ij})$.

例 3 计算 n 阶下三角行列式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【解】

$$D = a_{11} \times (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \times a_{22} \times (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

习题 1-1

1. 计算下列二阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$；(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

3. 用定义计算行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & 6 & 10 & 4 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

第二节　行列式按行(列)展开

为了讲述行列式的展开，先引进余子式和代数余子式的概念.

定义　在 n 阶行列式 D 中划去元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列的元素后，剩余的元素按原来相对位置不变所构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij}的余子式，记为 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$(-1)^{i+j}M_{ij}$称为 a_{ij}的代数余子式，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

例如，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{22}的代数余子式

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

定理　三阶行列式 D 的值等于它的任意一行的各元素与其相应的代数余子式乘积之和，即

$$\begin{aligned} D &= a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \\ &= a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} \\ &= a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}. \end{aligned}$$

【证】　下面仅证明第二个等式，其余两个由读者自己证明.

$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$

$$=a_{21}(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})+a_{23}(a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32})$$

$$=a_{21}\cdot(-1)^{2+1}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{22}\cdot(-1)^{2+2}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})+a_{23}\cdot(-1)^{2+3}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})$$

$$=a_{21}\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{23}\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{21}\cdot(-1)^{2+1}M_{21}+a_{22}\cdot(-1)^{2+2}M_{22}+a_{23}\cdot(-1)^{2+3}M_{23}$$

$$=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}.$$

这个定理称为拉普拉斯定理，其展开式称为拉普拉斯展开式.

推论 1　三阶行列式 D 的值等于它的任意一列的各元素与其相应的代数余子式乘积之和，即

$$\begin{aligned}D&=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}\\&=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}\\&=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}\end{aligned}$$

例 1　将行列式 $\begin{vmatrix}2&1&2\\-4&3&1\\2&3&5\end{vmatrix}$ 按第一行及第三列展开.

【解】

$$D=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&1\\3&5\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-4&1\\2&5\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-4&3\\2&3\end{vmatrix}$$

$$=2\times(3\times5-1\times3)-(-4\times5-1\times2)+2\times(-4\times3-3\times2)$$

$$=10,$$

$$D=2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-4&3\\2&3\end{vmatrix}+1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&1\\2&3\end{vmatrix}+5\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1\\-4&3\end{vmatrix}$$

$$=2\times(-4\times3-3\times2)-(2\times3-1\times2)+5\times[2\times3-1\times(-4)]$$

$$=10.$$

推论 2　三阶行列式 D 的某行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=0\ (i\neq j),$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+a_{3i}A_{3j}=0\ (i\neq j).$$

【证】　下面仅证明 $a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}=0$，其余由读者自己证明.

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}.$$

令 D 中第三行元素与第二行对应元素相等，即 $a_{31}=a_{21}$，$a_{32}=a_{22}$，$a_{33}=a_{23}$，构造新的行列式 D_1，则有

$$D_1=a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}.$$

又行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{23} - a_{22}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{23} - a_{21}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{22} - a_{21}a_{22})$$

$$= 0,$$

即得

$$a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0.$$

以上关于三阶行列式按行(列)展开均可推广到 n 阶行列式，即

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}(i = 1, 2, \cdots, n)\text{（按行展开）},$$

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}(j = 1, 2, \cdots, n)\text{（按列展开）},$$

且有性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j),$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0 \quad (i \neq j).$$

例 2 计算四阶对角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

【解】

$$D = a_{44}(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

同理可得 n 阶上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$