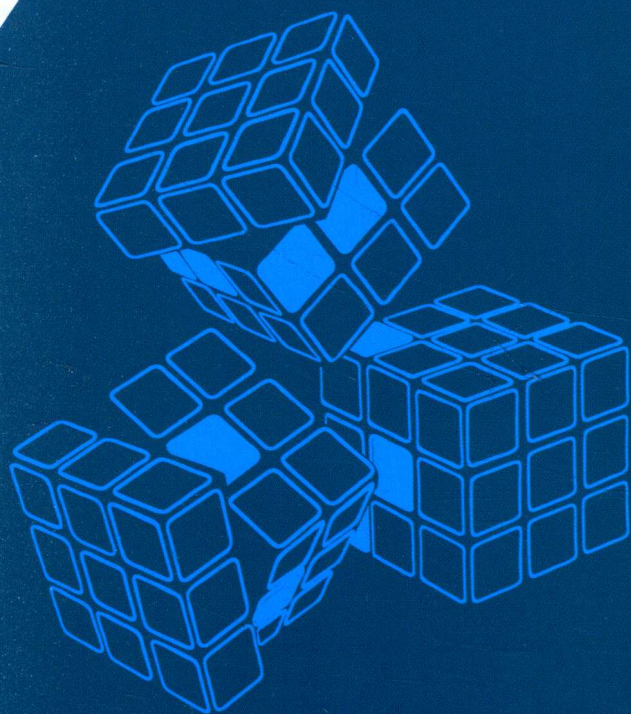


卓越工程师教育培养计算机类创新系列规划教材

离散数学

主 编 杨振启
副主编 涂为员 戴 磊 杨文国



科学出版社

卓越工程师教育培养计算机类创新系列规划教材

离散数学

主 编 杨振启

副主编 涂为员 戴 磊 杨文国

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是教育部“普通高等教育‘卓越工程师’创新系列教材”之一。

全书包括命题逻辑、谓词逻辑、二元关系、集合论、图论、初等数论及代数系统共7章内容。本书充分考虑到了读者的需要,内容丰富、理论体系完整;叙述严谨、循序渐进;例题讲解步骤详细,对每一章的习题都作了精心的挑选和组织。

本书可作为计算机、电子技术、信息、管理等学科专业的本科生教材,也可供广大青年和工程技术人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学/杨振启主编. —北京:科学出版社,2015.12

卓越工程师教育培养计算机类创新系列规划教材

ISBN 978-7-03-046607-5

I. ①离… II. ①杨… III. ①离散数学—教材 IV. ①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 292266 号

责任编辑:邹 杰 张丽花/责任校对:郭瑞芝

责任印制:霍 兵/封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

保定市中国画美凯印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年12月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2015年12月第一次印刷 印张:12 1/2

字数:296 000

定价:33.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

离散数学,是现代数学的一个分支,是计算机科学中基础理论的核心课程.它是研究离散量的数学结构、性质及关系的学问.它一方面充分描述了计算机科学离散性的特点,为学习算法与数据结构、程序设计语言、操作系统、编译原理、电路设计、数据库与信息检索系统等专业课程打下良好的数学基础;另一方面,通过学习离散数学,不但可以获得离散数学建模、离散数学理论、计算机求解方法的一般知识,还可以培养和提高抽象思维能力和严密的推理能力.离散数学所体现的现代数学思想对于加强学生的素质教育也有着不可替代的作用.

国内外已出版了各种版本的“离散数学”教材,教材深浅不一,风格各异.本教材是“卓越工程师教育培养计算机类创新系列规划教材”之一.根据编者多年的教学经验,按照卓越工程师的培养理念编写.本教材不仅适合卓越班的学生使用,也适合普通高等院校的学生和相关科技人员参考使用.

全书有命题逻辑、谓词逻辑、集合论、二元关系、图论、初等数论和代数系统 7 个部分组成.各章节内容丰富,条理清晰,层次分明,逻辑性强,书中配备了大量的例题和难易程度不同的练习题.

在本书的编写过程中,我们参考了许多离散数学书籍和资料,特向有关作者表示衷心的感谢.本书的编写得到“卓越工程师教育培养计算机类创新系列规划教材”编写组委会的大力支持,也得到科学出版社王正飞、贾瑞娜编辑的大量协助,编者一并表示感谢.

本书由杨振启任主编,涂为员、戴磊、杨文国任副主编,孙天凯、张克军、聂盼红参与编写了部分内容.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处.期待大家提出宝贵的意见和建议.

作 者

2015 年 5 月

目 录

前言

第一章 命题逻辑	1
1.1 命题和联结词	1
1.1.1 命题	1
1.1.2 命题联结词	2
1.1.3 命题表达式	5
1.1.4 真值表的构造	6
1.1.5 命题符号化	7
1.2 重言式	8
1.2.1 命题公式分类	8
1.2.2 重言式	9
1.2.3 逻辑等价	9
1.2.4 代入规则与替换规则	11
1.2.5 对偶原理	13
1.3 公式中的范式	15
1.3.1 析取范式和合取范式	15
1.3.2 主析取范式	17
1.3.3 主合取范式	21
1.4 命题联结词的扩充与归约	23
1.4.1 命题联结词的扩充	24
1.4.2 命题联结词的归约	25
1.5 基于命题的推理	26
1.5.1 基于真值表的推理	26
1.5.2 基于推理规则的推理	27
1.5.3 应用实例	28
1.6 习题	31
第二章 谓词逻辑	34
2.1 谓词公式	34
2.1.1 个体词	34
2.1.2 谓词	34
2.1.3 量词	35
2.1.4 命题符号化	35
2.1.5 谓词公式	36

2.2 约束	36
2.2.1 约束部分	36
2.2.2 换名规则和代替规则	37
2.2.3 公式的解释	37
2.3 谓词公式中的永真式	38
2.3.1 谓词公式的等价	38
2.3.2 谓词公式的类型	39
2.4 谓词公式中的范式	40
2.5 谓词推理	40
2.5.1 推理规则	41
2.5.2 举例	41
2.6 习题	42
第三章 集合论	44
3.1 基本概念	44
3.1.1 集合的概念	44
3.1.2 集合的表示方法	44
3.1.3 元素与集合	45
3.2 集合间的关系	46
3.3 集合的运算	48
3.3.1 集合的基本运算	48
3.3.2 集合的运算律	50
3.3.3 例题	52
3.4 包含排斥原理	53
3.5 幂集合与笛卡儿积	56
3.5.1 幂集合	56
3.5.2 笛卡儿积	57
3.6 集合运算与基数概念的扩展	59
3.6.1 并集、交集的扩展	59
3.6.2 基数概念的扩展	60
3.7 习题	61
第四章 二元关系	64
4.1 基本概念	64
4.1.1 二元关系的定义	64
4.1.2 关系的表示	66
4.2 关系的运算	66
4.2.1 关系的并、交、补、差、对称差运算	66
4.2.2 关系的复合运算	67
4.2.3 关系的逆运算	69

4.3 关系的性质	70
4.3.1 关系性质的概念	70
4.3.2 关系性质举例	71
4.3.3 关系性质在关系图及关系矩阵中的特征	71
4.4 关系的闭包	72
4.4.1 闭包的定义	72
4.4.2 关系 R 的闭包求法	72
4.4.3 传递闭包的 Warshall 算法	74
4.4.4 闭包的复合	76
4.5 集合的划分和覆盖	77
4.6 序关系	78
4.6.1 偏序关系与偏序集的概念	78
4.6.2 偏序集的哈斯图	79
4.6.3 偏序集中的特殊元	80
4.6.4 全序集与良序集	81
4.7 等价关系与等价类	81
4.8 函数	84
4.8.1 函数的概念	84
4.8.2 逆函数与复合函数	86
4.9 习题	89
第五章 图论	93
5.1 若干图论经典问题	93
5.1.1 哥尼斯堡七桥问题	93
5.1.2 四色问题和哈密顿环游世界问题	94
5.1.3 平面图和印刷电路板的设计	94
5.1.4 运输网络	95
5.1.5 通讯网络	95
5.1.6 二叉树的应用	96
5.1.7 最短路问题	96
5.2 图的基本概念及矩阵表示方法	96
5.2.1 图的基本概念	96
5.2.2 图的矩阵表示方法	100
5.3 路与连通度	102
5.4 欧拉图与哈密顿图	108
5.5 二部图与匹配	110
5.6 平面图	112
5.6.1 平面图及其性质	112
5.6.2 平面图着色	115

5.7 树	116
5.7.1 树及其性质	116
5.7.2 最小生成树	118
5.7.3 有向树	120
5.8 习题	124
第六章 初等数论	128
6.1 整数和除法	128
6.2 整数	128
6.3 素数	130
6.4 最大公约数和最小公倍数	133
6.5 同余	135
6.6 一次同余方程	137
6.7 中国剩余定理	138
6.8 欧拉定理和费马小定理	139
6.9 习题	140
第七章 代数系统	143
7.1 二元运算及性质	143
7.1.1 二元运算的定义	143
7.1.2 二元运算的性质	144
7.2 代数系统	148
7.2.1 代数系统的定义与实例	148
7.2.2 代数系统的同构与同态	149
7.3 半群	153
7.3.1 半群	153
7.3.2 单位元和逆元	155
7.4 群	158
7.4.1 群的定义	158
7.4.2 群的同态	162
7.4.3 循环群	164
7.4.4 变换群	168
7.4.5 置换群	170
7.4.6 子群	174
7.4.7 子群的陪集	178
7.4.8 正规子群和商群	181
7.5 环和域简介	182
7.5.1 环	183
7.5.2 域	185
7.6 习题	186
参考文献	190

第一章 命题逻辑

使用计算机必须首先学会编“程序”，那么什么是程序？

程序 = 算法 + 数据.

算法 = 逻辑 + 控制.

可见“逻辑”对于编程序是多么重要. 要想学好和使用好计算机，必须学习逻辑，此外，通过学习逻辑，掌握逻辑推理规律和证明方法，会培养学生的逻辑思维能力，提高证明问题的技巧.

逻辑学是一门研究思维形式及思维规律的科学，也就是研究推理过程的规律的科学. 逻辑规律就是客观事物在人的主观意识中的反映. 思维的形式结构包括概念、判断和推理之间的结构和联系，其中概念是思维的基本单位，通过概念对事物是否具有某种属性进行肯定或否定的回答，这就是判断；由一个或几个判断推出另一判断的思维形式，就是推理. 用数学方法来研究推理的规律称为数理逻辑. 这里所指的数学方法，就是引进一套符号体系的方法，在其中表达和研究推理的规律.

最早提出用数学方法来描述和处理逻辑问题的是德国数学家莱布尼茨 (G.W.Leibnitz)，从此数理逻辑形成了专门的学科. 数理逻辑作为计算机科学的基础理论之一，它在程序设计、数字电路设计、计算机原理、人工智能等计算机课程上得到了广泛应用. 数理逻辑的主要内容包括逻辑演算、证明论、公理集合论、递归论和模型论，本书主要介绍其中的命题逻辑和谓词逻辑 (一阶逻辑)，其余部分读者可参考有关专著.

命题逻辑是数理逻辑中最基本、最简单的部分，但究竟什么是命题？如何表示命题及进行命题演算？如何进行推理证明？本章将讨论这些问题.

1.1 命题和联结词

数理逻辑研究的中心问题是推理. 推理的前提和结论都是表达判断的陈述句. 什么是命题？直观来说，陈述客观发生的事情的陈述句，就叫做命题. 凡陈述的事情发生了，则此命题为真命题，反之为假. 也就是说，一个命题要么为真，要么为假，两者必居其一. 当然，两者也只能居其一，即不能说一个命题既真又假. 据此，我们可以给出命题的如下描述.

1.1.1 命题

定义 1.1 能判断真假而不是可真可假的陈述句为**命题**.

作为命题的陈述句所表达得到的判断结果称为命题的**真值**. 真值只取两个：真与假. 真值为真的命题称为真命题. 真值为假的命题称为假命题. 命题通常用大写英文字母如 P, Q, R 等表示.

例 1.1 判断下列语句是否为命题.

(1) 4 是素数.

- (2) 2020 年人类将到达火星.
 (3) 今天是星期二.
 (4) $2+3=5$.
 (5) 这朵花真美丽啊!
 (6) 离散数学是计算机科学的基础课程.
 (7) 严禁随地吐痰!
 (8) 她身体好吗?
 (9) $x=3$.
 (10) 我在说谎.
 (11) 如果 $a < b$ 且 $b < c$, 则 $a < c$.

解 其中陈述句 (4), (6), (11) 所陈述的内容与事实相符, 是对的, 正确的, 是真命题, 或者称命题的值为“真”, 简记为 T 或数字 1. 陈述句 (1) 是错的, 不正确, 称为假命题, 或称命题的值为“假”, 简记为 F 或数字 0. 陈述句 (2) 是命题, 但命题真值暂时不能定, 要等到 2020 年才能确定. 陈述句 (3) 是命题, 真值根据具体情况而定. 语句 (5) 是感叹句, (7) 是祈使句, (8) 是疑问句, 这三句都不是陈述句, 当然不是命题. 语句 (9), (10) 都是陈述句, 但都不是命题, 其中 (9) 没有确定的真值, (10) 是悖论 (可以推导出互相矛盾的陈述句).

说明 命题是陈述性语句、而不能是疑问句、祈使句、感叹句等; 判断结果不唯一确定的陈述句不是命题 (有时需要根据论及该命题的时间、空间来确定); 陈述句中的悖论不是命题.

下面给出几个相关概念.

原子命题或简单命题: 不能分解成更简单的语句的命题.

复合命题: 多个原子命题由联结词和圆括号联结起来构成的命题. 复合命题的真假值只与原子命题的真假值有关.

命题常项或命题常元: 已知真假值的命题. 可以用字母表示, 也可以直接用 T, F 表示.

命题变项或命题变元: 真值可以变化的陈述句为命题变项或命题变元. 命题变项不是命题.

命题逻辑中, $P, Q, R, \dots$ 既可以表示命题常项, 也可以表示命题变项. 在使用中, 需要由上下文确定它们表示的是常项还是变项.

在例 1.1 中, 语句 (1), (2), (3), (4), (6) 都是原子命题, 语句 (11) 是复合命题.

1.1.2 命题联结词

在自然语言中, 常使用“或”、“与”、“如果……, 那么……”等一些联结词. 联结词是复合命题的重要组成部分, 为了便于书写和推理, 必须对联结词作出明确规定和符号化. 数理逻辑研究方法的主要特征是将论述或推理中的各种要素都符号化, 即构造各种符号语言来代替自然语言, 将联结词符号化, 消除其二义性, 对其进行严格定义.

在命题逻辑中有以下几种基本的联结词: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

定义 1.2 非, 否定 ($\neg$)

给定命题 P , 命题 R 当且仅当 P 为假时为真, 则称 R 为 P 的否定或非 P , 记为: $\neg P$. 符号 $\neg$ 称作否定联结词. 其定义可用如下真值表 (表 1.1) 表示.

表 1.1 $\neg P$

P	$\neg P$
0	1
1	0

注 真值表是表示逻辑陈述真假性的一种方法. 在一个命题的真值表中, 列出它所包含的所有原子命题的真值的可能值, 就可以计算出相对于每种组合的该命题的真值.

例 1.2 命题符号化.

今天不下雨.

解 用 P 表示今天下雨, 则原命题为 $\neg P$.

定义 1.3 合取 ($\wedge$)

给定两个命题 P, Q , 若命题 R 当且仅当 P, Q 同时为真时为真, 则称 R 为 P, Q 的合取, 记为: $P \wedge Q$. 其定义可用如下真值表 (表 1.2) 表示.

表 1.2 $P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.3 将下列命题符号化.

- (1) 张三和李四都是三好学生.
- (2) 王芳不仅用功而且聪明.
- (3) 王芳虽然聪明, 但不用功.
- (4) 我们去看电影并且房间里有十张桌子.

解 (1) 设 P : 张三是三好学生; Q : 李四是三好学生. 则原命题为: $P \wedge Q$.

(2) 设 P : 王芳用功; Q : 王芳聪明. 则原命题为: $P \wedge Q$.

(3) 设 P : 王芳用功; Q : 王芳聪明. 则原命题为: $Q \wedge \neg P$.

(4) 设 P : 我们去看电影; Q : 房间里有十张桌子. 则原命题为: $P \wedge Q$.

说明 自然语言中的“既……又……”, “不但……而且……”, “虽然……但是……”, “一面……一面……”等联结词都可以符号化为 $\wedge$; 并非所有的“和”都表示“合取”. 例如, 王五和赵六是兄弟, 这句是原子命题, 可表示为 P 或 Q 即可, 当命题描述的是对象之间的关系时不能用合取; 在数理逻辑中, 关心的只是复合命题与构成复合命题的各原子命题之间的真值关系, 即抽象的逻辑关系, 并不关心各语句的具体内容.

定义 1.4 析取 ($\vee$)

给定两个命题 P, Q , 若命题 R 当且仅当 P, Q 同时为假时为假, 则称 R 为 P, Q 的析取, 记为: $P \vee Q$. 其定义可用真值表 (表 1.3) 表示.

注 联结词“析取”, 与汉语中的“或”几乎一致, 但注意它们之间也有细微的区别.

表 1.3 $P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例 1.4 将下列命题符号化.

- (1) 郑莉爱跳舞或爱听音乐.
- (2) 夏群只能挑选 202 或 203 房间.

解 (1) 设 P : 郑莉爱跳舞; Q : 郑莉爱听音乐. 则原命题为: $P \vee Q$. P 和 Q 允许同时为真, 是一种相容或.

(2) 设 P : 夏群挑选 202 房间; Q : 夏群挑选 203 房间. 因为夏群只能挑选其中的一个房间, 这里的“或”表达的是排斥或, 所以原命题不能表示为: $P \vee Q$, 应表示为: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ 或 $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$.

说明 自然语言中的“或”具有二义性, 用它联结的命题有时具有相容性, 有时具有排斥性, 对应的联结词分别称为相容或、排斥或 (排异或).

定义 1.5 蕴涵 ($\rightarrow$)

给定两个命题 P, Q , 复合命题“如果 P , 则 Q ”称作 P 与 Q 的蕴涵式, 记作 $P \rightarrow Q$, 并称 P 是蕴涵式的前件, Q 为蕴涵式的后件, $\rightarrow$ 称作蕴涵联结词, 并规定 $P \rightarrow Q$ 为假当且仅当 P 为真 Q 为假. 其定义可用如下真值表 (表 1.4) 表示.

表 1.4 $P \rightarrow Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

注 $P \rightarrow Q$ 的逻辑关系表示 Q 是 P 的必要条件, 或 P 是 Q 的充分条件. Q 是 P 的必要条件有许多不同的叙述方式, 如: “只要 P 就 Q ”, “因为 P 所以 Q ”, “ P 仅当 Q ”, “只有 Q 才 P ”, “除非 Q 才 P ”等.

例 1.5 将下列命题符号化, 并求出其真值.

- (1) 如果 2 加 3 等于 5, 则天是蓝的.
- (2) 2 加 3 等于 5 仅当天是蓝的.
- (3) 除非天是蓝的, 2 加 3 才等于 5.
- (4) 只有天是蓝的, 2 加 3 才等于 5.
- (5) 只要 2 加 3 不等于 5, 则天是蓝的.
- (6) 如果我有车, 那么我去接你.

解 对于 (1) 到 (5) 的命题, 设 P : 2 加 3 等于 5, P 的真值为 1; Q : 天是蓝的, Q 的真值为 1.

(1) 到 (4) 的命题符号化均为 $P \rightarrow Q$, 真值均为 1.

(5) 命题符号化为 $\neg P \rightarrow Q$, 真值为 1.

(6) 设 P : 我有车, Q : 我去接你, 命题符号化为 $P \rightarrow Q$, 真值依具体情况而定 (当我有车时, 若我去接了你, 这时 $P \rightarrow Q$ 为真; 若我没去接你, 则 $P \rightarrow Q$ 假. 当我没有车时, 我无论去或不去接你均未食言, 此时认定 $P \rightarrow Q$ 为真是适当的).

说明 作为一种规定, 当 P 为假时, 无论 Q 是真还是假, $P \rightarrow Q$ 均为真. 也就是说, 只有 P 为真 Q 为假这一种情况使得复合命题 $P \rightarrow Q$ 为假, 称之为实质蕴含.

定义 1.6 等价 ($\leftrightarrow$)

给定两个命题 P, Q , 复合命题“ P 当且仅当 Q ”称作 P 与 Q 的等值式, 记作 $P \leftrightarrow Q$, $\leftrightarrow$ 称作等价联结词, 并规定 $P \leftrightarrow Q$ 为真当且仅当 P 与 Q 同时为真或同时为假. 其定义可用如下真值表 (表 1.5) 表示.

表 1.5 $P \leftrightarrow Q$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例 1.6 将下列命题符号化, 并求出其真值.

(1) π 是无理数当且仅当加拿大位于亚洲.

(2) 2 加 3 等于 5 的充要条件是 π 是无理数.

(3) 若两圆 A, B 的面积相等, 则它们的半径相等; 反之亦然.

(4) 当王小红心情愉快时, 她就唱歌; 反之, 当她唱歌时, 一定心情愉快.

解 (1) 设 P : π 是无理数, Q : 加拿大位于亚洲, 符号化为 $P \leftrightarrow Q$, 真值为 0.

(2) 设 P : 2 加 3 等于 5, Q : π 是无理数, 符号化为 $P \leftrightarrow Q$, 真值为 1.

(3) 设 P : 两圆 A, B 的面积相等, Q : 两圆 A, B 的半径相等, 符号化为 $P \leftrightarrow Q$, 真值为 1.

(4) 设 P : 王小红心情愉快, Q : 王小红唱歌, 符号化为 $P \leftrightarrow Q$, 真值依具体情况而定.

说明 $P \leftrightarrow Q$ 的逻辑关系为 P 与 Q 互为充分必要条件; $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ 与 $P \leftrightarrow Q$ 的逻辑关系完全一致.

以上介绍的 5 种联结词是命题逻辑中最常用、最重要的联结词, 它们共同组成了一个联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, 其中 $\neg$ 为一元联结词, 其余的为二元联结词. 多次使用联结词集中的联结词, 可以组成更为复杂的复合命题. 求复杂的复合命题的真值时, 需要规定联结词的优先顺序, 将括号也算在内. 本书规定的联结词优先顺序为: $(), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, 对于同一优先级的联结词, 先出现者先运算.

1.1.3 命题表达式

通过前面的内容学习我们可以看出命题常项和命题变项利用联结词和圆括号通过有限

步可以构造出新的复合命题来. 在这些复合命题中, P, Q, R 等不仅可以代表命题常项, 也可以代表命题变项, 这样组成的复合命题形式称为**命题表达式**或**命题公式**. 这些命题表达式的构成必须符合一定的规则. 为此, 给出下面的定义.

定义 1.7 合式公式

- (1) 单个命题常项和变项是合式公式, 并称为原子命题公式.
- (2) 若 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 也是合式公式.
- (3) 若 A, B 是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式.
- (4) 只有有限次地应用 (1) ~ (3) 形式的符号串才是合式公式.

在命题逻辑中, 合式公式又称为**命题公式**, 简称为**公式**.

注 这个定义是递归的. (1) 是递归的基础, 由 (1) 开始, 使用 (2), (3) 规则, 可以得到任意的合式公式; 在公式的定义中, A, B 等符号代表任意的命题公式, 以下定义均有类似用法; $(\neg A), (A \wedge B)$ 等公式单独出现时, 外层括号可以省去, 写成 $\neg A, A \wedge B$ 等, 公式中不影响运算次序的括号也可以省去, 如公式 $(P \vee Q) \vee (\neg R)$ 可以写成 $P \vee Q \vee \neg R$.

由定义 1.7 可知, $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R), (P \wedge Q) \wedge \neg R, P \wedge (Q \wedge \neg R)$ 等都是合式公式, 而 $PQ \leftrightarrow R, (P \rightarrow Q) \rightarrow (\wedge Q)$ 等都不是合式公式.

1.1.4 真值表的构造

一个含有命题变项的命题公式的真值是不确定的, 只有对它的每个命题变项用指定的命题常项代替后, 命题公式就变成了真值确定的命题了. 对于命题公式, 若对其中出现的每个命题变元都指定一个真值 1 或者 0, 就对命题公式 A 进行了一种**真值指派**或一个**解释**, 而在该指派下会求出公式 A 的一个真值. 若指定的一组值使 A 为 1, 则称这组值为 A 的**成真赋值**; 若使 A 为 0, 则称这组值为 A 的**成假赋值**.

例 1.7 设公式 A 为 $(\neg P \vee Q) \rightarrow R$, 若将 P, Q, R 分别用 $(0, 0, 0)$ 替换, 得到公式 A 的一种解释, 在这种解释下, A 的真值为假, 是它的成假赋值. 同理还可用 $(0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ 其他 7 种不同的指派来对公式进行解释.

容易看出, 含 $n (n \geq 1)$ 个命题变项的公式共有 2^n 个不同的赋值.

将 A 的所有可能的真值指派以及在每一个真值指派下的取值列成一个表, 就得到命题公式 A 的**真值表**. 真值表以表的形式可以更好地反映命题公式的真值情况.

由于对每个命题变项可以有两个真值 (T, F) 指派, 所以有 n 个命题变项的命题公式 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 的真值表有 2^n 行. 为有序地列出 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 的真值表, 可将 F 看成 0, T 看成 1, 按二进制数次序列表.

构造真值表的具体步骤如下:

(1) 命题变项按英文字母字典序进行排列, 如 $A, B, C, \dots$; 带有下标的命题变元, 则按下角标由小到大的顺序排列, 如 $P_1, P_2, \dots$.

(2) 对公式的每种解释, 以二进制从小到大或从大到小的顺序列出.

(3) 若公式较为复杂, 求值遵循从简单到复杂, 由括号里面到外面逐步求值的原则.

例 1.8 求下列公式的真值表, 并求成真赋值和成假赋值.

(1) $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$.

(2) $(Q \rightarrow P) \wedge Q \rightarrow P$.

(3) $(\neg P \vee Q) \rightarrow R$.

解 公式 (1) 的真值表如表 1.6 所示, 从表 1.6 可知, 公式 (1) 的赋值都是成假赋值, 没有成真赋值. 公式 (2) 的真值表如表 1.7 所示, 从表 1.7 可知, 公式 (2) 的赋值都是成真赋值, 没有成假赋值. 公式 (3) 的真值表如表 1.8 所示, 从表 1.8 可知, 公式 (3) 的成假赋值是 000, 010, 110, 其余的均是成真赋值.

表 1.6 $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$ 的真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg(P \rightarrow Q)$	$\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

表 1.7 $(Q \rightarrow P) \wedge Q \rightarrow P$ 的真值表

P	Q	$Q \rightarrow P$	$(Q \rightarrow P) \wedge Q$	$(Q \rightarrow P) \wedge Q \rightarrow P$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

表 1.8 $(\neg P \vee Q) \rightarrow R$ 的真值表

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(\neg P \vee Q) \rightarrow R$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1

1.1.5 命题符号化

有了前面的命题公式概念, 我们可以进一步研究把自然语言中的有些语句, 翻译成数理逻辑中的符号形式.

定义 1.8 命题符号化

把一个用自然语言叙述的命题相应地写成由命题变项、联结词和圆括号表示的命题公式, 称为命题的符号化.

命题符号化时应注意: 确定给定句子是否为命题; 句子中联结词是否为命题联结词; 要正确地表示原子命题和适当选择命题联结词.

例 1.9 将下列命题符号化.

(1) 我和他既是兄弟又是同学.

解 设 P : 我和他是兄弟, Q : 我和他是同学.

故命题可符号化为: $P \wedge Q$.

(2) 张三或李四都可以做这件事.

解 设 P : 张三可以做这件事, Q : 李四可以做这件事.

故命题可符号化为: $P \vee Q$.

(3) 仅当我有时间且天不下雨, 我将去镇上.

解 对于“仅当”, 实质上是“当”的逆命题. “当 A 则 B ”是 $A \rightarrow B$, 而“仅当 A 则 B ”是 $B \rightarrow A$. 设 P : 我有时间, Q : 天不下雨, R : 我将去镇上.

故命题可符号化为: $R \rightarrow (P \wedge Q)$.

(4) 张刚总是在图书馆看书, 除非图书馆不开门或张刚生病.

解 对于“除非”, 只要记住, “除非”是条件. 设 P : 张刚在图书馆看书, Q : 图书馆不开门, R : 张刚生病.

故命题可符号化为: $\neg(Q \vee R) \rightarrow P$.

(5) 风雨无阻, 我去上学.

解 可理解为“不管是否刮风, 是否下雨, 我都去上学”. 设 P : 天刮风, Q : 天下雨, R : 我去上学.

故命题可符号化为: $(P \wedge Q \rightarrow R) \wedge (P \wedge \neg Q \rightarrow R) \wedge (\neg P \wedge Q \rightarrow R) \wedge (\neg P \wedge \neg Q \rightarrow R)$ 或 $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

说明 要准确确定原子命题, 并将其形式化; 要选用恰当的联结词, 尤其要善于识别自然语言中的联结词 (有时它们被省略); 否定词的位置要放准确; 需要的括号不能省略, 而可以省略的括号, 在需要提高公式可读性时亦可不省略; 要注意语句的形式化未必是唯一的.

1.2 重言式

通过构造命题公式的真值表, 我们发现公式在各种赋值下会有不同的取值情况, 一些形式不同的公式确有着相同的真值表, 为此需要进一步研究公式的分类及不同公式的联系特征及性质等内容.

1.2.1 命题公式分类

定义 1.9 设 A 为任一命题公式.

(1) 若 A 在它的各种赋值下取值均为真, 则称 A 是**重言式**或**永真式**.

(2) 若 A 在它的各种赋值下取值均为假, 则称 A 是**矛盾式**或**永假式**.

(3) 若 A 不是矛盾式, 则称 A 是**可满足式**.

从定义可以看出以下几点.

(1) 重言式一定是可满足式, 但可满足式不一定是重言式.

(2) 矛盾式一定是不可满足式, 非矛盾式一定是可满足式.

(3) 真值表可用来判断公式的类型有如下几种:

① 若真值表最后一列全为 1, 则公式为重言式;

② 若真值表最后一列全为 0, 则公式为矛盾式;

③ 若真值表最后一列中至少有一个 1, 则公式为可满足式.

说明 n 个命题变项共产生 2^n 个不同赋值; 含 n 个命题变项的公式的真值表只有 2^{2^n} 种不同情况.

从例 1.8 可以看出, 表 1.6 中的公式 $\neg(P \rightarrow Q) \wedge Q$ 为矛盾式, 表 1.7 中的公式 $(Q \rightarrow P) \wedge Q \rightarrow P$ 为重言式, 表 1.8 中的公式 $(\neg P \vee Q) \rightarrow R$ 为非重言式的可满足式.

1.2.2 重言式

重言式具有以下重要性质.

定理 1.1 如果 A 是重言式, 则 $\neg A$ 是矛盾式.

证明 由重言式和矛盾式的定义可知, 二者的真值互为否定.

定理 1.2 任何两个重言式的合取或析取, 仍然是一个重言式.

证明 设 A 和 B 为两个重言式, 则不论 A 和 B 的命题变项指派任何真值, 总有 A 的真值为 T, B 的真值为 T, 故 $A \wedge B, A \vee B$ 的真值均为 T.

定理 1.3 一个重言式, 对同一分量用任何合式公式置换, 所得公式仍为一重言式.

注 同一分量是指公式中的同一部分.

证明 由于重言式的真值与分量的指派无关, 故对同一分量以任何合式公式置换后, 重言式的真值仍永为真.

说明 矛盾式也有类似性质; 进一步引申, 两重言式的合取式, 析取式, 蕴涵式和等价式等都仍是重言式.

1.2.3 逻辑等价

两个公式什么时候代表了同一个命题呢? 抽象地看, 它们的真假取值完全相同时即代表了相同的命题. 设公式 A, B 共同含有 n 个命题变项, 若 A 与 B 有相同的真值表, 则说明在 2^n 个赋值的每个赋值下, A 与 B 的真值都相同, 则这两个公式等价 (等值).

定义 1.10 给定两个命题公式 A 和 B , 设 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 为所有出现于 A 和 B 中的命题变元, 若给 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 任一组真值指派, A 和 B 的真值都相同, 则称 A 和 B 是等价的或逻辑等价, 记作 $A \Leftrightarrow B$.

需要注意的是“ $\Leftrightarrow$ ”不是逻辑联结词, 因而“ $A \Leftrightarrow B$ ”不是命题公式, 只是表示两个命题公式之间的一种等价关系, 即若 $A \Leftrightarrow B$, A 和 B 没有本质上的区别, 最多只是 A 和 B 具有不同的形式而已.

“ $\Leftrightarrow$ ”具有如下的性质:

- (1) 自反性: $A \Leftrightarrow A$;
- (2) 对称性: 若 $A \Leftrightarrow B$, 则 $B \Leftrightarrow A$;
- (3) 传递性: 若 $A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C$, 则 $A \Leftrightarrow C$.

给定 n 个命题变项, 根据公式的形成规则, 可以形成许多个形式各异的公式, 但是有很多形式不同的公式具有相同的真值表. 因此引入公式等价的概念, 其目的就是将复杂的公式简化.

由公式等价的定义可知, 利用真值表可以判断任何两个公式等价.

例 1.10 证明 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow P)$.