现代数学基础

57

椭圆型偏微分方程

刘宪高

高等教育出版社

现代数学基础

57

椭圆型偏微分方程

刘宪高

TUOYUANXING PIANWEIFEN FANGCHENG

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

椭圆型偏微分方程 / 刘宪高编著. -- 北京：高等教育出版社，2015. 12

(现代数学基础)

ISBN 978-7-04-044048-5

Ⅰ. ①椭… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①椭圆型方程 - 偏微分方程 Ⅳ. ① O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 245960 号

策划编辑 王丽萍　　责任编辑 李 鹏　　封面设计 赵 阳　　版式设计 杜微言

责任校对 王 雨　　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社

社　　址 北京市西城区德外大街4号

邮政编码 100120

印　　刷 北京鑫丰华彩印有限公司

开　　本 787mm × 1092mm 1/16

印　　张 9.5

字　　数 170 千字

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网　　址 http://www.hep.edu.cn

http://www.hep.com.cn

网上订购 http://www.landraco.com

http://www.landraco.com.cn

版　　次 2015年12月第1版

印　　次 2015年12月第1次印刷

定　　价 39.00 元

物 料 号 44048-00

序言

1900 年, Hilbert 在巴黎国际数学家大会上提出了 23 个最重要的问题供 20 世纪的数学家们去研究, 这就是著名的 “Hilbert 23 个问题”. 其中有 3 个问题 (第 19, 20, 23 问题) 与偏微分方程有关. 自此之后, 偏微分方程特别是椭圆型方程的有关研究取得了奠基性的成果. 这些成果大部分都总结在 D. Gilbarg 和 N. Trudinger [GT] 以及 M. Giaquinta [Gia] 的书中.

在给复旦大学数学科学学院的研究生开设的 “二阶椭圆型方程” 课程教学中, 作者发现要在一个学期内讲授椭圆型方程解的正则性研究方法, 有必要写一本教材供学生用. 因为 [GT] 的内容太多, [Gia] 是讲授椭圆型方程组和变分问题. 当然陈亚浙和吴兰成 [CW] 与 Q. Han 和 F. Lin [HL] 是很好的教材. 作者在书中主要添加了 Blow up 分析方法.

在本书的写作中, 一些学生对打印错误给出了指正, 龚华均、王奎博士对书稿做了仔细阅读, 纠正了一些不当之处, 在此表示感谢.

目录

第一章　调和函数 · **1**

§1.1　平均值性质 · 1

§1.2　基本解 · 6

§1.3　极值原理 · 12

§1.4　Perron 方法和正则边界点 · 18

§1.5　Wiener 准则 · 21

习题 1 · 28

第二章　极大值原理 · **31**

§2.1　强极值原理 · 31

§2.2　先验估计 · 36

§2.3　梯度估计 · 39

§2.4　Alexandroff 极值原理 · 43

§2.5　移动平面法 · 50

习题 2 · 53

第三章　L^p 理论 · **55**

§3.1　插值定理 · 55

§3.2　有界平均振荡空间 · 58

§3.3 Calderón-Zygmund 不等式 · · · · · · · · · · · · · · · · 66
§3.4 L^p 估计 · 72
习题 3 · 77

第四章 Schauder 估计 · · · · · · · · · · · · · · · · · 79
§4.1 Hölder 连续 · 79
§4.2 全局 Hölder 连续 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 91
习题 4 · 93

第五章 De Giorgi-Nash-Moser 理论 · · · · · · · · · · 95
§5.1 De Giorgi 估计 · 95
§5.2 Moser 估计 · 104
习题 5 · 109

第六章 椭圆型方程组的正则性 · · · · · · · · · · · · 111
§6.1 Gehring 定理和逆 Hölder 不等式 · · · · · · · · · · · · 112
§6.2 椭圆型方程组的高次可积性 · · · · · · · · · · · · · · 119
§6.3 变分极小点的正则性 · · · · · · · · · · · · · · · · · 123
§6.4 调和映射的正则性 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 131
习题 6 · 139

参考文献 · 141

第一章　调和函数

假设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, 定义 Laplace 算子 $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. $u \in C^2(\Omega)$ 满足方程

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

则称 u 是 Ω 上的调和函数. 在椭圆型方程理论中, 调和函数基本性质是最重要的性质, 在某些方面反映了一般椭圆型方程解的特质. 本章主要研究调和函数的平均值性质和由这一性质派生的结论、调和函数由 Green 函数积分表达式决定的性质以及下调和函数的极值原理和调和函数的存在性方法 —— Perron 方法. 在本章的最后讨论调和函数的边界性质, 给出正则点的 Wiener 准则.

§1.1　平均值性质

定义 1.1　设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是连通开集, $B_r(x) \subset \Omega$, 可积函数 $u \in L^1(\Omega)$ 的平均值性质定义为

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS(y)$$

或者

$$u(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r(x)} u(y) dy = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

这里单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的面积

$$\omega_n = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad \text{其中 } \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt.$$

定理 1.1 如果 $u \in C(\overline{\Omega})$ 有平均值性质, 则非常数 u 仅在边界上取得极值.

证明 若不然, 不妨设 $x_0 \in \Omega$ 是 u 的最大值点, 则 $\text{meas}\{x \in B_r(x_0) : u(x) < u(x_0)\} > 0$, 进而,

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u(y)dy < u(x_0). \qquad \square$$

定理 1.2 调和函数有平均值性质. 反之, 如果 $u \in C(\Omega)$ 有平均值性质, 则 u 是光滑的调和函数.

证明 假设 $u \in C^2(\Omega)$ 调和, 对任意的 $B_r(x) \subset \Omega$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_r(x)} \Delta u(y)dy = \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial r} dS_r \\ &= r^{n-1} \frac{d}{dr} \int_{|w|=1} u(x+rw)dS_1, \end{aligned}$$

$$\int_{|w|=1} u(x+rw)dS_1 = \text{constant},$$

即 u 具有平均值性质.

反之, 如果 u 是光滑具有平均值性质的函数, 则从

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} \Delta u(y)dy &= r^{n-1} \frac{d}{dr} \int_{|w|=1} u(x+rw)dS_1 \\ &= r^{n-1} \frac{d}{dr} \int_{|w|=1} u(x+r_0 w)dS_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

知 u 调和. 而 u 的光滑性在于它可以写成卷积的形式: 设 $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$ 满足

$$\varphi(x) = \psi(|x|), \quad \int_{B_1(0)} \varphi(x)dx = 1 = \omega_n \int_0^1 r^{n-1} \psi(r)dr,$$

令 $\varphi_\varepsilon(x)=\dfrac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $x\in\Omega_\varepsilon=\{y\in\Omega:\mathrm{dist}\,(y,\partial\Omega)>\varepsilon\}$, 则

$$\begin{aligned}\int_\Omega u(y)\varphi_\varepsilon(y-x)dy&=\int_\Omega u(x+y)\varphi_\varepsilon(y)dy\\&=\int_{|y|<1}u(x+\varepsilon y)\varphi(y)dy\\&=\int_0^1 r^{n-1}dr\int_{\partial B_1(0)}u(x+\varepsilon rw)\varphi(rw)dS_1\\&=\int_0^1 r^{n-1}\psi(r)dr\int_{\partial B_1(0)}u(x+\varepsilon rw)dS_1\\&=u(x).\end{aligned}$$

□

下面的定理描述调和函数的梯度估计.

定理 1.3　假设 $u\in C(\overline{B_R(x_0)})$ 在 $B_R(x_0)$ 中调和, 则

$$|D^m u(x_0)|\leqslant\frac{n^m e^{m-1}m!}{R^m}\max_{B_R}|u|.$$

证明　$m=1$ 时, 由于 u 光滑, 且 Du 调和, 则由平均值性质有:

$$\begin{aligned}Du(x_0)&=\frac{n}{\omega_n R^n}\int_{B_R(x_0)}Du(y)dy\\&=\frac{n}{\omega_n R^n}\int_{\partial B_R(x_0)}u(y)\nu dS_R.\end{aligned}$$

$$|Du(x_0)|\leqslant\frac{n}{\omega_n R^n}\max_{B_R(x_0)}|u|\omega_n R^{n-1}=\frac{n}{R}\max_{B_R(x_0)}|u|.$$

假设 m 时成立, 记 $r=(1-\theta)R,\theta\in(0,1)$, 于是

$$|D^{m+1}u(x_0)|\leqslant\frac{n}{r}\max_{B_r(x_0)}|D^m u|.$$

对任意的 $y\in B_r(x_0)$,

$$|D^m u(y)|\leqslant\frac{n^m e^{m-1}m!}{(R-r)^m}\max_{B_{R-r}(y)}|u|\leqslant\frac{n^m e^{m-1}m!}{(R-r)^m}\max_{B_R(x_0)}|u|,$$

即

$$\max_{B_r(x_0)}|D^m u|\leqslant\frac{n^m e^{m-1}m!}{(R-r)^m}\max_{B_R(x_0)}|u|.$$

故取 $\theta = \dfrac{m}{m+1}$, $\dfrac{1}{\theta^m(1-\theta)} = \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m (1+m) \leqslant e(m+1)$,

$$
\begin{aligned}
|D^{m+1}u(x_0)| &\leqslant \frac{n}{r}\frac{n^m e^{m-1} m!}{(R-r)^m} \max_{B_R(x_0)} |u| \\
&= \frac{n^{m+1}e^{m-1}m!}{R^{m+1}\theta^m(1-\theta)} \max_{B_R(x_0)} |u| \\
&\leqslant \frac{n^{m+1}e^m(m+1)!}{R^{m+1}} \max_{B_R(x_0)} |u|.
\end{aligned}
$$

□

推论 1.1　(1) 如果 $u \in C(\overline{B_R(x_0)})$ 是非负调和函数, 则

$$|Du(x_0)| \leqslant \frac{n}{R} u(x_0).$$

(2) $\mathbb{R}^n$ 上的有界调和函数是常数.

证明　(1) 由于

$$Du(x_0) = \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)} Du(y)dy = \frac{1}{|B_R|}\int_{\partial B_R(x_0)} u\nu dS_R,$$

$$|Du(x_0)| \leqslant \frac{n}{R} u(x_0).$$

(2) 由 (1) 易证.　□

定理 1.4　调和函数是解析的.

证明　固定 $x \in \Omega$, 取 $B_{2R}(x) \subset \Omega$, $|h| \leqslant R$, 则

$$u(x+h) = u(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i!}(h\nabla)^i u(x) + R_m(h),$$

$$
\begin{aligned}
R_m(h) &= \frac{1}{m!}\int_0^1 (h\nabla)^m u(x+\theta h) d\theta \\
&\leqslant \frac{1}{m!}|h|^m n^m \frac{n^m e^{m-1} m!}{R^m} \max_{B_{2R}(x)} |u| \\
&\leqslant \left(\frac{|h|n^2 e}{R}\right)^m \max_{B_{2R}(x)} |u|.
\end{aligned}
$$

当 $|h|n^2 e \leqslant \dfrac{R}{2}$ 时, $|R_m(h)| \to 0$.　□

定理 1.5 (Harnack 不等式)　假设 u 是 Ω 上非负调和函数, 则对任何紧集 $K \subset \Omega$, 存在常数 $C(\Omega, K)$, 使得

$$\frac{1}{C}u(y) \leqslant u(x) \leqslant Cu(y), \quad \forall x, y \in K.$$

证明 设 $B_{4R}(x_0)\subset\Omega$, 则对任何 $x,y\in B_R(x_0)$,

$$
\begin{aligned}
u(x)&=\fint_{B_R(x)}u(z)dz\leqslant\frac{1}{|B_R|}\int_{B_{3R}(y)}u(z)dz\\
&=3^n\fint_{B_{3R}(y)}u(z)dz=3^nu(y).
\end{aligned}
$$

类似地,

$$u(y)\leqslant 3^nu(x),$$

即

$$\frac{u(y)}{3^n}\leqslant u(x)\leqslant 3^nu(y).$$

对于紧集 K, 存在有限覆盖 $B_R(x_i), i=1,2,\cdots,N$. 对任何 $x,y\in K$,

$$\frac{u(y)}{3^{Nn}}\leqslant u(x)\leqslant 3^{Nn}u(y).$$

□

定理 1.6 (Weyl) 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $u\in C(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega u\Delta\varphi=0,\quad \forall\varphi\in C_0^2(\Omega).$$

则 u 调和.

证明 设 $x=0, n\geqslant 3$, $n=2$ 的证明是显然的. 定义

$$\varphi(y,r)=\begin{cases}(|y|^2-r^2)^n, & |y|\leqslant r,\\ 0, & |y|>r.\end{cases}$$

$$\Delta\varphi(y,r)=\begin{cases}2n(|y|^2-r^2)^{n-2}\left[2(n-1)|y|^2+n(|y|^2-r^2)\right], & |y|\leqslant r,\\ 0, & |y|>r.\end{cases}$$

记

$$\varphi_2(y,r)=(|y|^2-r^2)^{n-2}\left[2(n-1)|y|^2+n(|y|^2-r^2)\right].$$

则

$$\int_{B_r(0)}u(y)\varphi_2(y,r)dy=0.$$

我们有

$$
\begin{aligned}
0&=\frac{d}{dr}\int_{B_r(0)}u(y)\varphi_2(y,r)dy\\
&=\int_{\partial B_r(0)}u(y)\varphi_2(y,r)dS_r(y)+\int_{B_r(0)}u(y)\frac{d}{dr}\varphi_2(y,r)dy\\
&=\int_{B_r(0)}u(y)\frac{d}{dr^2}\varphi_2(y,r)(2r)dy,\quad \varphi_2|_{\partial B_r(0)}=0,
\end{aligned}
$$

即

$$\int_{B_r(0)} u(y)\frac{d}{dr^2}\varphi_2(y,r)dy = 0.$$

由归纳法,

$$\int_{B_r(0)} u(y)\frac{d^{n-2}}{d(r^2)^{n-2}}\varphi_2(y,r)dy = 0.$$

注意到

$$\begin{aligned}\frac{d^{n-2}}{d(r^2)^{n-2}}\varphi_2(y,r) &= \left[2(n-1)|y|^2 + n(|y|^2 - r^2)\right](-1)^{n-2}(n-2)! \\ &\quad +(-1)^{n-1}nC_{n-2}^1(n-2)!(r^2-|y|^2) \\ &= (-1)^{n-2}(n-2)![(n^2+n-2)|y|^2 - (n^2-n)r^2],\end{aligned}$$

我们有

$$\int_{B_r(0)} u(y)[(n^2+n-2)|y|^2 - (n^2-n)r^2]dy = 0.$$

这样

$$\int_{\partial B_r(0)} u(y)2(n-1)r^2 dS_r - \int_{B_r(0)} 2(n-1)nru(y)dy = 0,$$

即

$$r\int_{\partial B_r(0)} u(y)dS_r - n\int_{B_r(0)} u(y)dy = 0.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(0)} u dS_r\right) &= \frac{n}{\omega_n}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^n}\int_{B_r(0)} u(y)dy\right) \\ &= \frac{n}{\omega_n}\left(-\frac{n}{r^{n+1}}\int_{B_r(0)} u(y)dy + \frac{1}{r^n}\int_{\partial B_r(0)} u(y)dS_r\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

具有平均值性质. 因此它是调和的. □

§1.2 基 本 解

调和方程

$$\Delta_x\Gamma(x,x_0) = 0, \quad x\in\mathbb{R}^n\backslash\{x_0\}$$

的轴对称解 $\Gamma(|x-x_0|) = v(r)$ 满足常微分方程:

$$\Delta v = v''(r) + v'(r)\frac{n-1}{r} = 0.$$

故

$$v(r)=\begin{cases}c\log r+c_1, & n=2,\\ cr^{2-n}+c_1, & n\geqslant 3.\text{①}\end{cases}$$

因此非平凡解 $v(r)$ 在 $r=0$ 即 x_0 处具有奇性:

$$\lim_{r\to 0}v(r)=\infty.$$

一般地称方程

$$\Delta_x\Gamma(x,x_0)=\delta_{x_0}(x),\quad x\in\mathbb{R}^n$$

的这种轴对称解为基本解, 这里 $\delta_{x_0}(x)$ 是 Dirac 广义函数. 即

$$\int_{B_r(x_0)}\Delta_x\Gamma(x,x_0)dx=\int_{\partial B_r(x_0)}\Gamma'(r)dS_r=1,$$

$n=2$ 时,

$$\int_{\partial B_r(x_0)}cr^{-1}dS_r=c\cdot 2\pi=1.$$

$n\geqslant 3$ 时,

$$\int_{|w|=1}c(2-n)r^{1-n}r^{n-1}dS_1=c(2-n)\omega_n=1.$$

因此

$$\Gamma(x,x_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\log|x-x_0|, & n=2,\\[2ex] \dfrac{1}{\omega_n(2-n)}|x-x_0|^{2-n}, & n\geqslant 3.\end{cases}$$

称 $\Gamma(x,x_0)$ 为 Laplace 算子 Δ 的基本解.

假设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是使得散度定理成立的有界区域, $u,v\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, 则成立 Green 公式:

$$\int_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu}-v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right).\tag{1.1}$$

如果取 $v(x)=\Gamma(x,x_0)$, 假设 $B_r(x_0)\subset\Omega$, 则在 $\Omega_r=\Omega\backslash B_r(x_0)$ 上应用上面的公式:

$$\int_{\Omega_r}(u\Delta\Gamma-\Gamma\Delta u)=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}-\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)-\int_{\partial B_r(x_0)}\left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}-\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}\right).$$

注意到

$$\Delta\Gamma=0,\quad x\in\Omega_r;$$

①本书使用 log 表示自然对数. —— 编者注

$$\left|\int_{\partial B_r(x_0)} \Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| = \frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)}\left|\int_{\partial B_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \leqslant \frac{r}{n-2}\max_{\partial B_r(x_0)}|\nabla u| \to 0;$$

$$\int_{\partial B_r(x_0)} u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu} = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x_0)} u dS_r \to u(x_0).$$

于是由 Green 公式

$$u(x_0) = \int_\Omega \Gamma\Delta u + \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu} - \Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}\right). \tag{1.2}$$

定理 1.7　假设 u 在 Ω 中调和, 则对任意的 $B_r(x_0) \subset \Omega$,

$$\sup_{B_{r/2}}|u| \leqslant c(n)\left(⨍_{B_r}|u|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1;$$

$$\sup_{B_{r/2}}|\nabla u| \leqslant \frac{c(n)}{r}\sup_{B_r(x_0)}|u|.$$

证明　设标准的截断函数 $\varphi \in C_0^\infty(B_r(x_0))$, $\varphi(x) = 1, \forall x \in B_{r/2}(x_0)$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$, $|\nabla\varphi| \leqslant cr^{-1}$. 取 $v(x) = \varphi(x)\Gamma(x, x_0)$, 在 $\Omega\backslash B_\varepsilon(x_0)$ 上, 由 Green 公式 (1.1), 成立

$$\int_{\Omega\backslash B_\varepsilon(x_0)}(u\Delta(\varphi\Gamma) - \varphi\Gamma\Delta u) = \int_{\partial(\Omega\backslash B_\varepsilon(x_0))}\left(u\frac{\partial(\varphi\Gamma)}{\partial\nu} - (\varphi\Gamma)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right),$$

对任意的 $x \in B_{r/2}(x_0)$, 注意到在 ∂B_r 附近 $\varphi = 0$, 且 $\Delta(\varphi\Gamma) = \Gamma\Delta\varphi + 2\nabla\varphi\nabla\Gamma + \varphi\Delta\Gamma$, 我们得到

$$u(x_0) = -\int_{r/2<|y-x_0|<r}\Delta(\varphi\Gamma)udy.$$

由于

$$|\Delta(\varphi\Gamma)| \leqslant c(n)r^{-n},$$

有

$$|u(x_0)| \leqslant c(n)r^{-n}\int_{B_r(x_0)}|u| \leqslant c(n)\left(⨍_{B_r(x_0)}|u|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geqslant 1.$$

又由

$$\nabla u(x_0) = -\int_{r/2<|y-x_0|<r} u(y)\Delta(\varphi(y)\nabla_{x_0}\Gamma(y, x_0))dy$$

和

$$|\Delta(\varphi(y)\nabla_{x_0}\Gamma(y, x_0))| \leqslant c(n)r^{n+1},$$

得到

$$\sup_{B_{r/2}(x_0)}|\nabla u| \leqslant \frac{c(n)}{r}\sup_{B_r(x_0)}|u|. \qquad \square$$

Poisson 方程的 Dirichlet 边值问题:

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega, \\ u = \varphi, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

由 Green 公式, 对 $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Omega \Gamma(x,y)\Delta u(y)dy - \int_{\partial\Omega} \left[\Gamma(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu} - u(y)\frac{\partial\Gamma(x,y)}{\partial\nu}\right] dS(y) \\ &= \int_\Omega \Gamma(x,y)f(y)dy - \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu} - \varphi\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right). \end{aligned}$$

我们希望将 Poisson 方程的边值问题 (D) 的解借助于其已知数据表示出来. 从上面的公式, 问题就出在 $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}$ 在边界 $\partial\Omega$ 上的值. 如果我们修改 Γ, 使得它在边界上为 0:

$$G(x,y) \equiv \Gamma(x,y) + \Psi(x,y),$$

这里 $\Psi(x,y)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_y\Psi(x,y) = 0, & y \in \Omega, \\ \Psi(x,y) = -\Gamma(x,y), & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

设 $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, 则

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial G}{\partial\nu}. \tag{1.3}$$

称 G 为 Laplace 算子 Δ 在区域 Ω 上的 Green 函数. Green 函数有如下性质:

(1) 对称性:

$$G(x,y) = G(y,x), \quad x,y \in \Omega.$$

证明 设 $x,y \in \Omega$, 取 $r > 0$ 使得 $B_r(x), B_r(y) \subset \Omega, B_r(x) \cap B_r(y) = \emptyset$. 令 $\Omega_r = \Omega\backslash\{B_r(x) \cup B_r(y)\}$. 记 $u(z) = G(x,z), v(z) = G(y,z)$. 在 Ω_r 上用 Green 公式得到:

$$\int_{\partial B_r(x)}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) + \int_{\partial B_r(y)}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) = 0.$$

注意到在 x 点 v 是光滑的, 在 y 点 u 是光滑的,

$$\lim_{r\to0}\int_{\partial B_r(x)}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) = -v(x),$$

$$\lim_{r\to0}\int_{\partial B_r(y)}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right) = u(y),$$

即

$$u(x) = v(y). \qquad \square$$

(2) 对 $x \neq y$,

$$\Gamma(x,y) < G(x,y) < 0.$$

证明 设 $x \in \Omega$, 记 $u(z) = G(x,z)$. 由定义

$$\lim_{z \to x} u(z) = -\infty.$$

于是存在 $r > 0$ 使得 $u(z) < 0, \forall z \in B_r(x)$, 而 u 在 $\Omega \backslash B_r(x)$ 上调和, 由极值原理 $u(z) < 0, \forall z \in \Omega \backslash B_r(x)$. 另一方面, $\Psi(x,z)|_{\partial\Omega} = -\Gamma|_{\partial\Omega} > 0$, 且调和, 故

$$\Psi(x,z) > 0.$$

从而 $u(z) > \Gamma$. $\square$

(3) 在球 $B_R(0)$ 上的 Green 函数:

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n(2-n)} \left(|x-y|^{2-n} - \left| \dfrac{R}{|x|} x - \dfrac{|x|}{R} y \right|^{2-n} \right), & n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi} \left(\log |x-y| - \log \left| \dfrac{R}{|x|} x - \dfrac{|x|}{R} y \right| \right), & n = 2. \end{cases}$$

证明 设 $x \in B_R(0), x \neq 0$, x 关于球面 ∂B_R 的反射点 $\overline{x}$ 定义为 $\overline{x} = \dfrac{R^2}{|x|^2} x$. 对任意的 $y \in \partial B_R$, 由于

$$\frac{|x|}{R} = \frac{R}{|\overline{x}|},$$

三角形 $\triangle Oxy \sim \triangle Oy\overline{x}$, 从而

$$\frac{|x|}{R} = \frac{R}{|\overline{x}|} = \frac{|y-x|}{|\overline{x}-y|}.$$

于是固定 $x \in B_R(0)$,

$$\Delta_y \left| \frac{|x|}{R} y - \frac{R}{|x|} x \right|^{2-n} = 0, \quad y \in B_R(0),$$

边界条件给出

$$\Psi(x,y) = \frac{-1}{\omega_n(2-n)} \left| \frac{|x|}{R} y - \frac{R}{|x|} x \right|^{2-n},$$

当 $x \to 0$ 时给出 $\Psi(0,y) = -\Gamma(R)$. $\square$

(4)

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R|x-y|^n} \equiv K(x,y), \quad x \in B_R, y \in \partial B_R(0).$$

$$\int_{\partial B_R(0)} K(x,y) dS_R(y) = 1.$$

证明 设 $x \in B_R(0), y \in \partial B_R(0)$,

$$G(x,y) = \frac{1}{\omega_n(2-n)} \left(|x-y|^{2-n} - \frac{|x|^{2-n}}{R^{2-n}} |y - \overline{x}|^{2-n} \right),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} &= \frac{\partial G(x,y)}{\partial |y|} = \nabla_y G(x,y) \cdot \frac{y}{|y|} \\
&= \frac{1}{\omega_n} \left(|y-x|^{-n} \frac{|y|^2 - x\cdot y}{|y|} - |y-\overline{x}|^{-n} \frac{|x|^{-n}}{R^{-n}} \frac{|x|^2}{R^2} \frac{|y|^2 - \overline{x}\cdot y}{|y|} \right) \\
&= \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} |y-x|^{-n}.
\end{aligned}$$

如果 $u \in C^2(B_R) \cap C^1(\overline{B_R})$, 由 Poisson 方程解的表达式 (1.3), 取 $u \equiv 1$ 立即得到

$$\int_{\partial B_R} \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} |y-x|^{-n} dS(y) = 1. \qquad \square$$

(5) Poisson 积分公式:

假设 $\varphi \in C(\partial B_R(0))$,

$$u(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial B_R(0)} K(x,y)\varphi(y) dS_R(y), & |x| < R, \\ \varphi(x), & |x| = R, \end{cases}$$

则 u 在 $B_R(0)$ 上调和, 在边界上等于 φ.

证明 由于 $G(x,y), \dfrac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}$ 关于 x 调和, 因此 $u(x)$ 调和. 下面证明 u 在边界上连续: 设 $x_0 \in \partial B_R, |\varphi| \leqslant M, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\max\limits_{|y-x_0|\leqslant\delta} |\varphi(y) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$,

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(x_0)| &= \left| \int_{\partial B_R(0)} K(x,y)(\varphi(y) - \varphi(x_0)) dS_R(y) \right| \\
&\leqslant \int_{|y-x_0|\leqslant\delta} K(x,y)|\varphi(y) - \varphi(x_0)| dS_R(y) \\
&\quad + \int_{|y-x_0|>\delta} K(x,y)|\varphi(y) - \varphi(x_0)| dS_R(y) \\
&\leqslant \max_{|y-x_0|\leqslant\delta} |\varphi(y) - \varphi(x_0)| + \frac{2M(R^2 - |x|^2)R^{n-2}}{(\delta/2)^n} \\
&\leqslant C\varepsilon.
\end{aligned} \qquad \square$$