普通高等教育“十二五”规划教材

微积分
（下册）

主　编　贺建辉
副主编　周　尉　周培桂

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十二五”规划教材

微积分

（下册）

主　编　贺建辉
副主编　周　尉　周培桂

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书以培养学生的专业素质为目的，是按照教育部关于独立学院培养“本科应用型高级专门人才”的指示精神，面向独立学院经济管理类专业而编写的微积分课程教材。主要特点是把数学知识和经济学、管理学的有关内容有机结合起来，融经济、管理于数学，培养学生用数学知识和方法解决实际问题的能力。

全书共9章，分为上、下册两册。本书是下册，主要包括多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程等内容。每章后附有数学文化的内容。

本书可作为独立学院经济类、管理类专业微积分课程的教材，也可作为本科院校或相关专业微积分课程的选用教材。

图书在版编目（CIP）数据

微积分．下册 / 贺建辉主编．-- 北京 : 中国水利水电出版社，2016.1
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5170-4084-2

Ⅰ．①微… Ⅱ．①贺… Ⅲ．①微积分－高等学校－教材 Ⅳ．①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第026250号

书　　名	普通高等教育“十二五”规划教材 **微积分**（下册）
作　　者	主编　贺建辉　副主编　周尉　周培桂
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010) 68367658（发行部）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：(010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	北京瑞斯通印务发展有限公司
规　　格	184mm×260mm　16开本　6.75印张　160千字
版　　次	2016年1月第1版　2016年1月第1次印刷
印　　数	0001—2000册
定　　价	**18.00**元

前 言

PREFACE

本书充分考虑高等教育大众化教育阶段的现实状况，以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的新的“独立学院经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”为依据，结合经管类研究生入学考试对数学的大纲要求而编写。参加本书编写的人员都是多年担任经济数学——微积分实际教学的老师，他们都有较深的理论造诣和较丰富的教学经验。在编写时，以培养应用型人才为目标，将数学基本知识和经济、管理学科中的实际应用有机结合起来，主要有以下几个特点：

(1) 注重体现应用型本科院校特色，根据经济类和管理类的各专业对数学知识的需求，本着“轻理论、重应用”的原则制定内容体系。

(2) 注重内容理论联系实际，在内容安排上由浅入深，与中学数学进行了合理的衔接。在引入概念时，注意了概念产生的实际背景，采用提出问题、讨论问题、解决问题的思路，逐步展开知识点，使得学生能够从实际问题出发，激发学习兴趣；另外在微分学与积分学章节中，重点引入适当的经济、管理类的实际应用例题和课后练习题，以锻炼学生应用数学工具解决实际问题的意识和能力。

(3) 本书结构严谨，逻辑严密，语言准确，解析详细，易于学生阅读。由于抽象理论的弱化，突出理论的应用和方法的介绍，内容深广度适当，使得内容贴近教学实际，便于教师教与学生学。本教材内容分上、下册，包括函数的极限，一元函数微积分学，微分方程，空间解析几何，多元函数微积分学，无穷级数等内容。

(4) 在每一章的结束部分，附加了历史上有杰出贡献的伟大数学家的生平简介，通过了解数学家生平和事迹，可以让学生真正了解数学发展的基本过程，而且能让学生学习数学家追求真理、维护真理的坚韧不拔的科学精神。

参加本书编写的由浙江理工大学科技与艺术学院贺建辉（第1～3、6、7章），浙江医学高等专科学校葛美宝（第4、5章），浙江理工大学科技与艺术学院周尉（第8章），浙江理工大学科技与艺术学院周培桂（第9章）。全书由

贺建辉统稿并多次修改定稿，最后由严克明教授为本教材审稿。在编写过程中，参考和借鉴了许多国内外有关文献资料，并得到了很多同行的帮助和指导，在此对所有关心和支持本书编写、修改工作的教师表示衷心的感谢。

限于编写水平，书中难免有错误和不足之处，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

2016 年 1 月

目　录

CONTENTS

第 6 章　多元函数微分学

在一元函数微积分学中，我们讨论的对象都是一元函数，即只依赖于一个自变量的函数．但在很多自然现象以及实际问题中，经常会遇到多个变量之间的依赖关系．例如，商品的需求量不仅依赖于价格的高低，也依赖于当地消费者收入的多少；一个时间段某城市的人口数依赖于出生数、死亡数、流动人口数等．这些影响因素相互独立，反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的情形．因此，引入多元函数以及多元函数的微积分问题．

本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数微分法及其应用．讨论中将以二元函数为主，并将概念、性质与结论推广到二元以上的函数．

6.1　空间解析几何简介

解析几何是用代数方法研究几何图形的科学．如果研究的是平面上的几何图形，称为平面解析几何；如果研究的是三维空间的几何图形，则称为空间解析几何．它们的共同特点是通过点和坐标的对应关系，将数学研究的两个基本对象数量关系和空间形式结合起来，使得人们可以用代数方法研究几何问题，也可以用几何方法解决代数问题．

在这一节中我们仅简单介绍空间解析几何的一些基本概念，包括空间直角坐标系、空间两点间的距离、空间曲面及其方程等概念．这些内容对我们学习多元函数的微分学和积分学将起到重要的作用．

6.1.1　空间直角坐标系

为了确定平面上任意一点的位置，我们建立了平面直角坐标系，把平面上的点与有序数组［即点的坐标 (x, y)］对应起来．现在，为了把空间的任意一点与有序数组对应起来，我们来建立空间直角坐标系．

过空间一定点 O，作三条相互垂直的数轴，依次记为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴．它们构成一个空间直角坐标系 $Oxyz$（图 6.1.1）．空间直角坐标系有右手系和左手系两种．右手系即将右手伸直，拇指朝上为 z 轴的正方向，其余四指的指向为 y 轴的正方向，四指弯曲 90°后的指向为 y 轴的正方向．我们通常采用右手系，如图 6.1.1 所示．

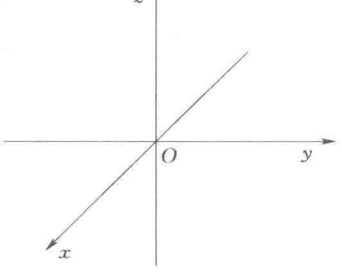

图 6.1.1

在图 6.1.1 中，点 O 称为坐标原点，每两条坐标轴确定一个平面，称为坐标平面．由 x 轴和 y 轴确定的平面称为 xOy 平面、由 y 轴和 z 轴确定的平面称为 yOz 平面；由 x 轴和 z 轴确定的平面称为 xOz 平面．通常，将 xOy 平面配置在水平面上．

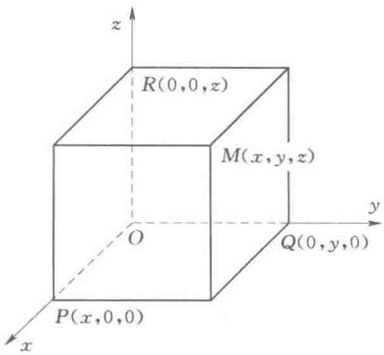

图 6.1.2

三个坐标平面将空间分成 8 个部分，称为 8 个卦限．

对于空间中任意一点 M，过该点作三个平面，分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，且与这三个轴分别交于 P、Q、R 三点，如图 6.1.2 所示．设 $OP=x$，$OQ=y$，$OR=z$，则点 M 唯一确定了一个三元有序数组（x，y，z）．而对任意一个三元有序数组（x，y，z），在 x 轴、y 轴、z 轴上取点 P、Q、R，使 $OP=x$，$OQ=y$，$OR=z$，然后过 P、Q、R 三点分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，这三个平面相交于一点 M，则由一个三元有序数组唯一确定了空间的一个点 M.

于是，空间的任意一点 M 与一个三元有序数组（x，y，z）建立了一一对应关系，这个三元有序数组称为点 M 的坐标，记为 $M(x, y, z)$．如坐标原点的坐标为（0，0，0），x 轴上点的坐标为（x，0，0），y 轴上点的坐标为（0，y，0），z 轴上点的坐标为（0，0，z）．

6.1.2　空间两点的距离

给定空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$，过 M_1、M_2 各作三个平面分别垂直于三个坐标轴．这六个平面构成了一个以线段 M_1M_2 为一条对角线的长方体，如图 6.1.3 所示．由图可知：

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2 &= |M_1S|^2+|SM_2|^2\\ &=|M_1N|^2+|NS|^2+|SM_2|^2\\ &=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2+|z_2-z_1|^2\end{aligned}$$

于是求得空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离公式为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

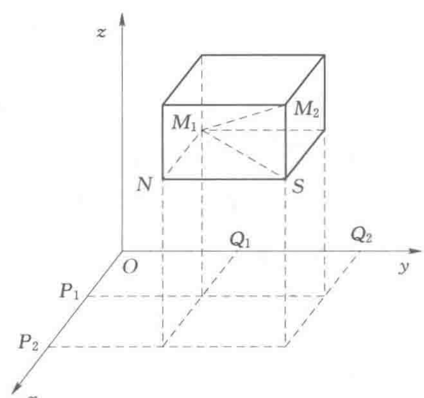

图 6.1.3

特别地，若两点分别为坐标原点（0，0，0）和 $M(x, y, z)$，则 $|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 若点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 均位于 xOy 平面上，即 $z_1=z_2=0$，则得 xOy 平面上任意两点 $M_1(x_1, y_1, 0)$与 $M_2(x_2, y_2, 0)$ 间的距离公式：

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

例 6.1.1　设 P 在 x 轴上，它到点 $P_1(0, \sqrt{2}, 3)$ 的距离为到点 $P_2(0, 1, -1)$ 的距离的 2 倍，求点 P 的坐标．

解　设 P 点坐标为（x，0，0），则

$$|PP_1|=\sqrt{x^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11}$$

$$|PP_2|=\sqrt{x^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2}$$

因为 $|PP_1|=2|PP_2|$，所以 $\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2}$. 解得 $x=\pm1$，P 点坐标为（1，0，0）或（-1，0，0）．

6.1.3 空间曲面及其方程

与平面解析几何中建立曲线与方程的对应关系一样，可以建立空间曲面与包含三个变量的方程 $F(x, y, z)=0$ 的对应关系．

定义 6.1.1 在空间直角坐标系中，如果曲面 S 上任意一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$，而不在曲面 S 上的任何点的坐标都不满足该方程，则方程 $F(x, y, z)=0$ 称为曲面 S 的方程．而曲面 S 就称为方程 $F(x, y, z)=0$ 的图形，如图 6.1.4 所示．

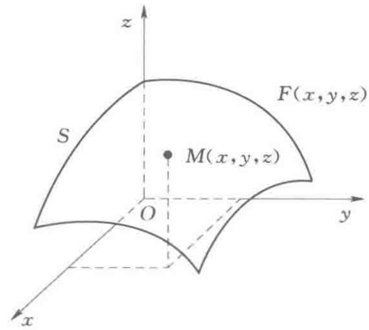

图 6.1.4

下面给出常见的空间曲面．

平面是空间中最简单而且最重要的曲面．平面的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中 A、B、C 是不全为零的常数．

特别地，xOy 平面的方程为 $z=0$，yOz 平面的方程为 $x=0$，xOz 平面的方程为 $y=0$.

例 6.1.2 已知 $A(1, 1, 1)$，$B(0, -1, 2)$，求线段 AB 的垂直平面的方程．

解 设 $M(x, y, z)$ 是所求平面上的任一点，根据题意，所求的平面就是与 A 和 B 等距离的点的几何轨迹．由于

$$|AM|=|BM|$$

所以
$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2+(z-2)^2}$$

化简得

$$x+2y-z+1=0$$

这就是所求平面上的点的坐标所满足的方程，而不在此平面上的点的坐标都不满足这个方程，所以这个方程就是所求平面的方程．

例 6.1.3 求球心在原点，半径为 R 的球面方程．

解 设 $M(x, y, z)$ 是所求球面上任一点，根据题意，有 $|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=R$，因此，球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 为球面的上半部，如图 6.1.5 所示．

$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 为球面的下半部，如图 6.1.6 所示．

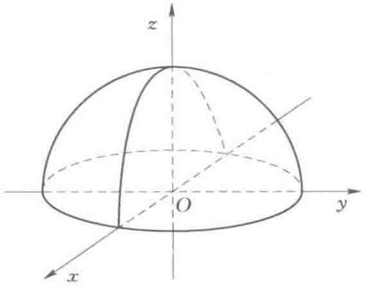

图 6.1.5

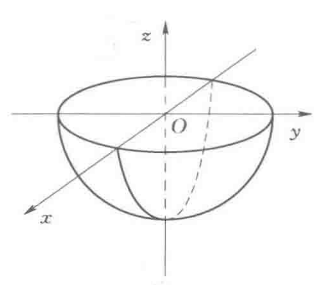

图 6.1.6

例 6.1.2 和例 6.1.3 均是已知曲面上的点所满足的几何条件（即已知点的轨迹），建立曲面方程．另一类问题是已知曲面方程，研究曲面的几何形状．

例 6.1.4　求由方程 $x^2+y^2=a^2$ 确定的曲面．

解　方程 $x^2+y^2=a^2$ 在平面上表示以原点为圆心，半径为 a 的圆．由于方程不含 z，意味着 z 可取任何值，只要 x 和 y 满足 $x^2+y^2=a^2$，就可将 xOy 平面上的圆沿垂直于 z 轴的方向，上下移动而形成的圆柱面即是所求的曲面，如图 6.1.7 所示．

例 6.1.5　求由方程 $z=x^2+y^2$ 确定的曲面．

解　用平面 $z=a$ 截曲面 $z=x^2+y^2$，其截痕迹方程为

$$x^2+y^2=a, z=a$$

当 $a=0$ 时，只有点（0，0，0）满足方程．

当 $a>0$ 时，截痕为在平面 $z=a$ 上的一个圆，其中圆心为（0，0，a），半径为$\sqrt{a}$. 当平面 $z=a$ 向上移动时，截痕的圆也越来越大．

当 $a<0$ 时，平面与曲面无交点．

于是，我们描绘出由方程 $z=x^2+y^2$ 确定的曲面为图 6.1.8，该曲面称为旋转抛物面。如果用平面 $x=x_0$ 或 $y=y_0$ 去截该曲面，则截痕均为抛物线．

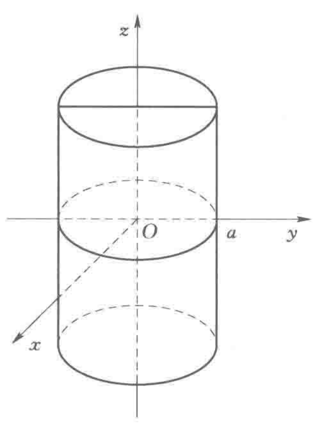

图 6.1.7

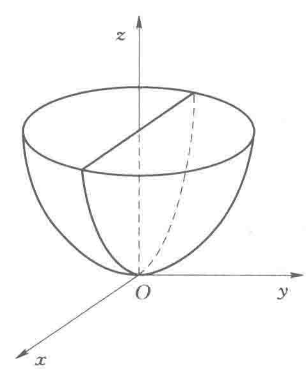

图 6.1.8

6.2　多元函数的基本概念

6.2.1　平面区域

在平面直角坐标系中，平面上的点 P 与二元有序实数组（x，y）一一对应，于是，我们常把有序数组（x，y）与平面上的点 P 视作是等同的．二元有序数组的全体，即 $R^2=\{(x,y)|(x,y\in R\}$就表示坐标平面．

定义 6.2.1　坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合，称为平面点集．记作

$$E=\{(x,y)|(x,y)\text{具有性质 }P\}$$

例如，平面上以原点为中心，r 为半径的圆（图 6.2.1）内所有点的集合是

$$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r^2\}$$

而集合

$$C=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$$

则表示平面一矩形及其内部所有点的全体，如图 6.2.2 所示 .

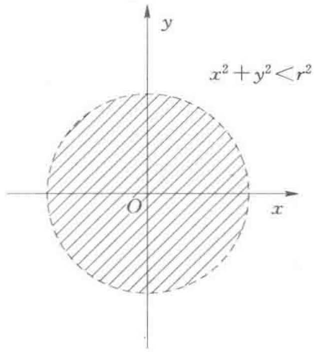

图 6.2.1

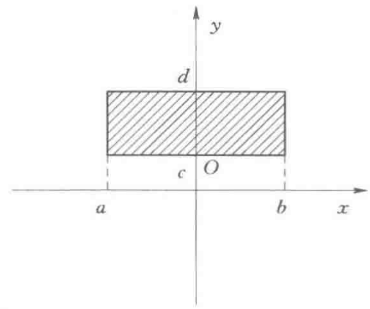

图 6.2.2

定义 6.2.2 设 P_0 是 xOy 平面上的一点，δ 是某一正数 . 到点 $P_0(x_0, y_0)$ 的距离小于 δ 的点 $P(x, y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ **邻域**，记为 $U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P\mid |PP_0|<\delta\}$$

也就是

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

我们把

$$\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

称为点 P_0 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(P_0, \delta)$.

在几何上，$U(P_0, \delta)$ 就是 xOy 面上以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心，以 $\delta(>0)$ 为半径的圆的内部的点 $P(x, y)$ 的全体 .

若不需要强调邻域半径 δ，也可写成 $U(P_0)$，点 P_0 的去心邻域记为 $\mathring{U}(P_0)$。

整个坐标面或坐标面上由几条曲线所围成的部分称为平面区域 . 围成平面区域的曲线称为该区域的**边界**，边界上的点称为**边界点** . 包含边界的区域称为闭区域，不包含边界的区域称为开区域，包含部分边界的区域称为**半开区域** . 如果区域可以被包含在以原点为圆心的某一圆域内，则称为**有界区域**，否则称为**无界区域** .

例如，点集 $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r^2\}$是有界开区域，$C=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$为有界闭区域，而 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x,x\leqslant y\}$为无界区域 .

6.2.2 二元函数的概念

定义 6.2.3 设 D 是平面上的一个非空点集，如果对于 D 内的任意一点 (x, y)，按照对应法则 f，都有唯一确定的实数 z 与之对应，则称 f 是 D 上的二元函数，它在 (x, y) 处的函数值记为 $f(x, y)$，即 $z=f(x, y)$. x、y 称为自变量，z 称为因变量，D 称为该函数的定义域，数集$\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$称为该函数的值域 .

类似地，可以定义三元及三元以上的函数，只需将平面点集 D 改为三维空间或 n 维空间中的点集就可以了，通常简记 n 元函数为 $u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．

与一元函数类似，讨论二元函数的自然定义域时，只要求出使二元函数的表达式有意义的点集 D 即可．在讨论实际问题中涉及的二元函数时，其定义域由问题的实际意义确定．

例 6.2.1　求二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域．

解　要使函数表达式有意义，则需满足

$$1-x^2-y^2\geqslant 0$$

故所求函数的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

在几何上它表示 xOy 平面上的单位圆 $x^2+y^2=1$ 的内部以及圆周上的点的集合，如图 6.2.3 阴影部分所示．

例 6.2.2　求二元函数 $z=\ln(x+y)$ 的定义域，并用图形加以表示．

解　要使函数表达式有意义，则需满足 $x+y>0$，故所求定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x+y>0\}$$

定义域 D 如图 6.2.4 阴影部分所示．

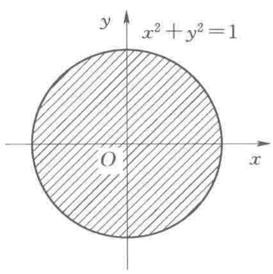

图 6.2.3

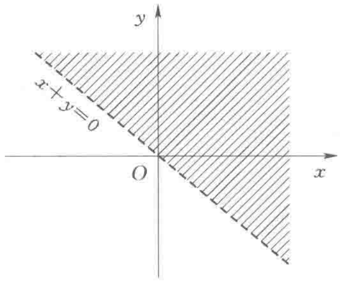

图 6.2.4

例 6.2.3　已知函数 $f(x+y, x-y)=xy$，求 $f(x, y)$．

解　设 $u=x+y$，$v=x-y$，则 $x=\dfrac{u+v}{2}$，$y=\dfrac{u-v}{2}$，代入得

$$f(u,v)=\frac{u^2-v^2}{4}$$

所以 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{4}$.

二元函数的几何意义：设函数 $z=f(x, y)$ 的定义域为 D，对于任意取定的点 $P(x, y)\in D$，对应的函数值为 $z=f(x, y)$．这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标、$z=f(x, y)$ 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x, y, z)$．当遍取 D 上的一切点时，得到一个空间点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

这个点集称为**二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形**．

二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形通常是空间中的一张曲面，而其定义域 D 就是此曲面

在 xOy 平面上的**投影**，如图 6.2.5 所示．

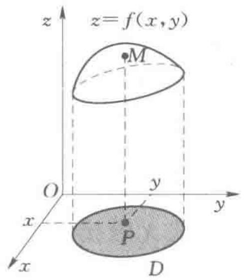

图 6.2.5

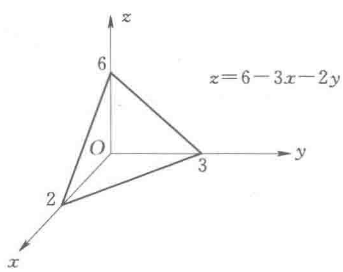

图 6.2.6

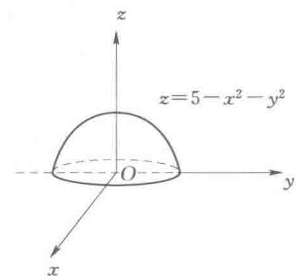

图 6.2.7

由空间解析几何可知，线性函数 $z=6-3x-2y$ 的图形是平面（图 6.2.6），而函数 $z=5-x^2-y^2$ 的图形是旋转抛物面（图 6.2.7）．

6.2.3　二元函数的极限

函数的极限是研究自变量的变化过程中，函数的变化趋势．类似于一元函数的极限，我们研究当点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$时，函数 $z=f(x, y)$ 的变化趋势．

定义 6.2.4　设二元函数 $z=f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一去心邻域内有定义，A 为确定的常数，当该邻域内的点 $P(x, y)$ 在平面 xOy 内以任意方式无限接近于点 $P_0(x_0, y_0)$时，对应的函数值无限接近于常数 A，则称常数 A 为函数 $z=f(x, y)$ 当 $(x, y)\to(x_0, y_0)$ 时的**极限**．记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0))$$

为了区别于一元函数的极限，我们把二元函数的极限叫做**二重极限**．

注意：(1) 本定义是二元函数极限的直观定义，并没有给出求二元函数极限的方法．

(2) 本定义的关键之处在于：点 $P(x, y)$ 在平面 xOy 内以任意方式无限接近于点 $P_0(x_0, y_0)$．例如，动点 $P(x, y)$ 可以以直线的方式无限接近于点 $P_0(x_0, y_0)$，也可以以曲线的方式无限接近于点 $P_0(x_0, y_0)$．但无论哪种方式，均有函数值 $f(x, y)$ 无限接近于常数 A. 但是反过来，如果当动点 $P(x, y)$ 以不同的方式接近于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数值 $f(x, y)$ 无限接近于不同的值，那么就可以判断这个函数的极限不存在．

二重极限有与一元函数的极限类似的运算法则．

例 6.2.4　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$

解　因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{xy}=1$，所以

$$\text{原式}=\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{xy}\cdot y=\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{xy}\cdot \lim_{(x,y)\to(0,2)} y=2$$

例 6.2.5　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

解　令 $x^2+y^2=u$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u=0$，则原式变为$\lim\limits_{u\to 0} u\sin\dfrac{1}{u}$，根据有界函数和无穷小的乘积仍然是无穷小可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{u\to 0}u\sin\frac{1}{u}=0$$

例 6.2.6　求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}$

解　当 $P(x,\ y)$ 沿直线 $y=kx$ 无限接近点（0，0）时，极限如果存在，则其值为

$$\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}$$

显然，当 k 取不同值时，上式的值不同．说明了当点 $P(x,\ y)$ 沿不同方式无限接近于点（0，0）时，函数值 $f(x,\ y)$ 不能无限接近一个确定的常数，故原极限不存在．

6.2.4　二元函数的连续性

定义 6.2.5　设二元函数 $z=f(x,\ y)$ 在 $P_0(x_0,\ y_0)$ 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数 $z=f(x,\ y)$ 在点（x_0，y_0）处**连续**．如果函数 $z=f(x,\ y)$ 在点（x_0，y_0）处不连续，则称函数 $z=f(x,\ y)$ 在点（x_0，y_0）处**间断**．

例如，（0，0）是函数 $f(x,\ y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ 的间断点，而函数 $f(x,\ y)=\frac{1}{x^2+y^2-1}$ 的间断点是$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$．

定义 6.2.6　设二元函数 $z=f(x,\ y)$ 在某区域 D 内的每一点都是连续的，则称它在区域 D 内连续，$z=f(x,\ y)$ 称为区域 D 内的连续函数．

利用二元函数的极限运算法则可以证明，二元函数的和、差、积、商（在分母不为零处）仍是连续函数，二元函数的复合函数也是连续的．

有界闭区域 D 上连续的二元函数具有与一元函数类似的性质．

定理 6.2.1（有界性定理）　有界闭区域 D 上连续的二元函数在区域 D 上有界．

定理 6.2.2（最大值和最小值定理）　有界闭区域 D 上连续的二元函数在区域 D 上存在最大值和最小值．

定理 6.2.3（介值定理）　有界闭区域 D 上连续的二元函数一定可以取得介于最大值和最小值之间的任何值．

例 6.2.7　求$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{e^x+y}{x+y}$

解　令 $z=\frac{e^x+y}{x+y}$，它是连续函数，（1，0）是其定义域内的一个点，因此

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{e^x+y}{x+y}=\frac{e^1+0}{1+0}=e$$

例 6.2.8　求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}$

解
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{xy(\sqrt{xy+4}+2)}$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\sqrt{xy+4}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{0\times 0+4}+2}=\frac{1}{4}$$

习　题　6.2

1. 求下列函数的定义域，并画出定义域的图形.

(1) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}+\ln(x^2-y)$　　(2) $f(x,y)=\ln(x+y+2)$

(3) $f(x,y)=\sqrt{4x^2+y^2-1}$　　(4) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

2. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)}\dfrac{\sin xy}{y}$　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$

3. 设 $f(x,y)=\dfrac{x-y^2}{x}$，证明：$f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处极限不存在.

6.3 偏　导　数

一元函数 $y=f(x)$ 导数的定义为函数增量与自变量增量比值的极限，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. 而对二元函数而言，自变量个数增多，自变量改变的方向是无限多的，但是我们仍然可以考虑二元函数对于某一个自变量的变化率，也就是在其中一个自变量发生变化，而另外一个自变量保持不变的情形下，考虑函数对于该自变量的变化率. 我们选择其中两种：①固定 $y=y_0$，变量 x 沿平行于 x 轴方向趋向于 x_0；②固定 $x=x_0$，变量 y 沿平行于 y 轴方向趋向于 y_0. 下面我们给出偏导数的定义.

6.3.1　偏导数的定义

定义 6.3.1　设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，函数相应地取得增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 对 x 的**偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},z_x(x_0,y_0),\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},f_x(x_0,y_0)\text{或 }f'_1(x_0,y_0)$$

类似地，如果

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 对 y 的**偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},z_y(x_0,y_0),\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},f_y(x_0,y_0)\text{或 }f'_2(x_0,y_0)$$

如果函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内任一点 (x, y) 处对 x 或 y 的偏导数都存在，那么这些偏导数仍然是 x、y 的函数，它们称为函数 $z=f(x, y)$ 对 x 或 y 的**偏导函数**（简称偏导数），记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},z_x,\frac{\partial f}{\partial x},f_x \text{ 或 } f_1'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y},z_y,\frac{\partial f}{\partial y},f_y,\text{或 } f_2'$$

上述定义表明，计算多元函数对某个变量的偏导数时，只需要把其余自变量看作常数，然后利用一元函数的求导公式和求导法则进行计算．

偏导数的概念很容易推广到三元及三元以上的函数的偏导数．

例 6.3.1　设函数 $z=f(x, y)=x^2+3xy-y^2$，求 $f_x(1, 1)$，$f_y(1, 1)$．

解　把 y 看作常数，对 x 求导，得

$$f_x(x,y)=2x+3y$$

把 x 看作常数，对 y 求导，得

$$f_y(x,y)=3x-2y$$

所以

$$f_x(1,1)=2+3\times1=5,\ f_y(1,1)=3-2\times1=1$$

例 6.3.2　设函数 $z=x^y(x>0, x\neq1)$，求证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=2z$$

证明　因为$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}.\ yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}.\ x^y\ln x=x^y+y^y=2z$$

例 6.3.3　设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f(x, y)$ 在原点处的两个偏导数．

解　在点 $(0, 0)$ 处对 x 的偏导数为 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0.$

对 y 的偏导数为 $f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$

由例 6.2.6 可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x, y)$ 不存在，故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不连续．

关于二元函数的偏导，补充以下几点：

(1) $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$是一个整体，不能看成商．而一元函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$可以看成商．

(2) 二元函数在某一点处的两个偏导数均存在，未必在该点处连续，如例 6.3.3. 一元函数在某一点处可导，则一定在该点处连续．

(3) 类似于一元分段函数，计算二元分段函数在分段点处的偏导，要用定义，如