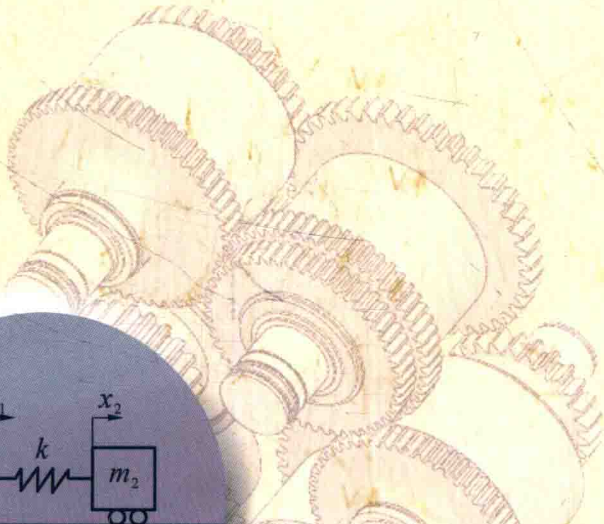
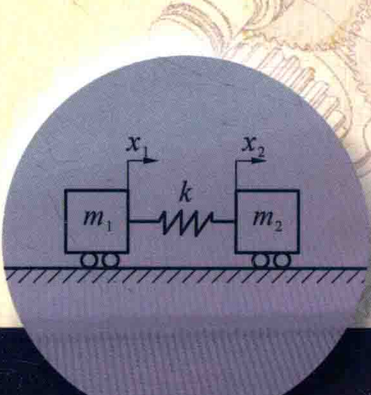
Kongzhi Gongcheng zhong de
Suyuan Wenti

控制工程中的溯源问题

王选择 著





华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

Kongzhi Gongcheng zhong de
Suyuan Wenti

控制工程中的溯源问题

王选择 著

華中科技大学出版社
http://www.hustp.com
中国 武汉

内 容 简 介

本书对高等学校理工类专业“控制工程基础”课程常用教材涉及的关键理论问题进行了溯源，以帮助读者理解“控制工程基础”课程教材中的理论公式与算子，增强探究思维与学以致用的能力，主要内容包括：e 的溯源，正余弦信号，拉普拉斯变换以及欧拉公式的来源，传递函数基本算子的来源与稳定性判断方法的实质，幅值裕量与相位裕量稳定性判断的实质，以及 PID 调节方法的实质等。

本书按照递进关系展开介绍，以简化的溯源方式解释了目前常用教材中的一些关键知识点，可作为学习和研究“控制工程基础”的理工科本科生与研究生的参考书使用，也可供学习和了解控制工程技术的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

控制工程中的溯源问题/王选择著. —武汉：华中科技大学出版社，2016.5
ISBN 978-7-5680-1663-6

Ⅰ.①控…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①机电工程-控制系统-研究　Ⅳ.①TH-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 066307 号

控制工程中的溯源问题　　王选择　著
Kongzhi Gongcheng zhong de Suyuan Wenti

策划编辑：万亚军
责任编辑：王　晶
封面设计：刘　卉
责任校对：李　琴
责任监印：张正林
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321913
录　　排：武汉三月禾文化传播有限公司
印　　刷：武汉鑫昶文化有限公司
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：5.75　插页：2
字　　数：100 千字
版　　次：2016 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：18.00 元

华中出版

前　言

本书是笔者多年来教学与科研积累的成果与经验总结，具体来源于省级或校级教学研究项目“测控技术与仪器专业创新教育平台的研究与实践”，“测控专业主干课程直觉思维教学模式的研究与实践”与“诗意唤醒兴趣，溯源点燃创新”等省级或校级教学研究项目的研究成果，以及笔者“控制工程基础”的课程教学经历。

本书的章节安排如下：第1章直接通过巧妙的类比与自然规律的归纳总结，运用极限推导引出自然常数e，归纳出了“e指数函数曲线一阶线性微分方程的解形式”这一规律；第2章通过对弹簧振子机械能守恒规律与牛顿万有引力定律的推导，指出两者之间的实质统一，引出三角函数的振动规律曲线；第3章通过欧拉公式把自然曲线与三角函数曲线加以统一，引出拉普拉斯变换，通过假想拉普拉斯的设疑、猜想与求解思路，应用分解与合成的思想，给出拉普拉斯变换公式的形式；第4章与第5章在理解拉普拉斯变换的基础上，进一步引出传递函数与稳定性判断的实质；第6章的频率分析给出了前面章节中提到的欧拉公式的来源，并从直觉的角度对微积分的性质进行了阐述与论证，把频率分析中的很多性质所体现的道理进行了充分的说明；第7章应用直觉与想象思维，对反馈稳定性进行判断，对反馈给出了更多直观的解释；第8章应用时间分片段的方法，进行了反馈及其误差的分析，并逐步过渡到运算放大来源的思考；第9章利用电动机驱动与温度控制两个简单的例子，引出了PID调节的实质。

本书可作为高等学校理工科本科生与研究生学习“控制工程基础”课程的参考书使用，也可供学习和了解控制工程技术的工程技术人员参考。

在本书撰写过程中，得到了各位领导和老师的热情关注和大力支持，在此表示衷心的感谢。

限于笔者水平，不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

王选择

2016年1月

目　　录

绪　论

为了满足控制领域教学和人才培养的需要，目前控制工程方面的理论教材与著作已经出版了很多。由于控制工程课程具有理论性强的特点，这些教材与著作一般都包含大量的公式推导、证明与例题。许多读者的学习过程是模仿例题做练习题，来进行他们的学习与应用。但那些公式的来源、意义及读者应怎么去思考它们，教材上只有结论，却没有给出过程与分析。这种情况使得读者更多的是生搬硬套、照搬照抄地训练，而没有思考想象的空间，读者也难以从书上找到可以获得启发的东西，而大多数的读者或学生虽然内心对此很厌倦，但又无可奈何。

事实上，利用一些抽象的没有弄懂的公式，去推导另一些更抽象也不可能弄懂的公式或结论，也是笔者大学期间学习理工科类课程的苦恼所在。例如，对于为何线性齐次微分方程利用特征方程根求解、傅里叶级数为何展开为正余弦函数、拉普拉斯变换为何乘以 e 指数形式函数、容抗与感抗表达式的含义等，很多学生在大学学习期间，其实都没有弄懂其真正实质，只会做题，因此，难以做到学以致用。

为此，笔者希望通过本书把那些生涩难懂的公式定理，尽量通过简洁的溯源方式解释给读者，使他们在学习中，因为看到这些更简洁明了的解释，找到一丝丝对抽象理论知识理解的乐趣，而不是直接委屈地接受那种填鸭式灌输。另外，读者应用这种溯源方法弄懂公式定理的过程，其实也是一种利用探究与创新思维解决问题的过程。有了这样的过程，长此以往，读者自然会形成良好的学习习惯，从而拥有批判、质疑与刨根问底的学习素养。

其实，经典控制理论中所涉及的问题通常是通过微积分的应用与求解、反馈思想的引进，得到稳定性及误差这类的结论。教师在课程中只要把这几部分的思想，特别是微积分的问题讲透，把反馈的思想阐述明白，把公式的来源解释清楚，相信学生对整个知识体系的轮廓一定会有更加清晰的认知，对那些抽象的理论接受起来也就更加容易。

因此，本书针对控制工程中难以理解的理论问题，进行了大量的阐释

与体会。最重要的是自然常数 e 的来源，为什么它是微积分求解算子的核心？如何在从已知知识过渡到未知领域的过程中引入 e 常数，然后以 e 为基础，进一步阐释一阶系统与二阶系统，并引入实虚部的旋转公式？在讲解完这两个问题之后，以拉普拉斯的设想引入拉普拉斯变换及微积分算子，用分解与合成的思想解释拉普拉斯变换；有了拉普拉斯变换与微积分算子之后，自然能推导出传递函数的公式；同时通过对照拉普拉斯正逆变换，用极限的思想引入稳定性概念，把稳定性的实质完美地勾勒显现出来。

频率分析是很多相关课程的难点，是信号处理中滤波理论的基础。频率分析的讲解中，重要的不是如何进行频率分析的问题，而是从根本上去理解为什么要引入正余弦函数这样一个特定信号去进行频率分析。只要给出足够的理由，学生是容易接受的。本书中对频率曲线即三角函数的描述，前后都有呼应。学生在学习中，应能感觉到曲线的奇妙，同时领悟到进行频率分析的必要性。书中对虚部 $j^2=-1$ 的定义进行了多种方式的对比引入，让学生从学习虚数 j 的来源的过程中，领略到 j 的奇妙，以及它所拥有的深刻内涵，为 j 的自然应用埋下不留暗伤的伏笔，同时对幅相频的理解更加深刻与透彻。

另外，本书通过 RC 系统的误差分析，引出运算放大器产生的来源，便于学生今后掌握测控电路中所涉及的运算放大器的应用，无须再去死记“虚短虚断”的概念，因为掌握了实质，也就能够应用自如。

有了对这些核心知识点的理解，剩下那些应用知识的学习，也就顺理成章、水到渠成了，在读者的学习过程中也就不再存在难以沟通的烦恼。在理解它们的基础上，再加上适当的训练与思考，就能做到融会贯通、学以致用。

第 1 章　e 之源

e 是连接有限与无限、离散与连续的桥梁，理解它，就能理解微积分中常系数微分方程解形式的含义；弄清它的来源，就能理解到它是由自然规律提炼的一个自然常数；熟悉它的演变，我们对自然规律的认识会更加深入，对其他课程如电路理论、信号处理与物理光学等的学习也会更容易。

这一章，主要通过 RC 电路的类比，引出需要求解的微积分问题。然后通过烂苹果的相似规律问题，得出相似问题经验解的结果，同时找到自然常数 e 的来源。最后通过数学与模型提炼，指出这些相似的问题其实是数学中一阶微分系统的问题。同时，经验解的规律计算也告诉了我们数学中一阶系统微积分方程求通解，所采用假设通解为 e 指函数的道理。

1.1　引　子

要想知道 e 是怎样来的，先要对一个简单的电路即电阻电容串联系统（以下称 RC 系统）进行类比分析。

RC 系统是一个含有积分环节的典型系统，它的变化规律能够代表自然界很多相似现象的变化规律。因此对 RC 系统进行仔细分析，是摸清相似自然现象变化规律的一条捷径。

电路如图 1-1(a)所示，因为电流、电位与电量这些抽象的东西看不见、

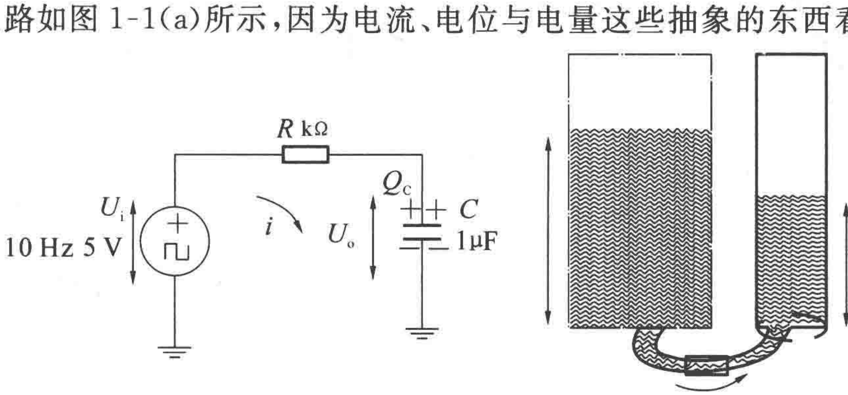


图 1-1　RC 系统与水池系统(电与水)的类比图

摸不着,因此,这里把 RC 系统与水池系统(电与水)进行类比,得到如下的类比关系。

其中有形的类比包括以下几种。

电阻→水管,即电阻大小→水管粗细,电阻越大,水管越细,电阻越小,水管越粗。

电容→水池底,即电容大小→水池底面积大小。

无形类比有以下几种。

电量→水量(容积),即电量大小→水量多少。

电位→水位,即电位高低→水位高低。

电位差(电压)→水位差(水压),即电压高低→水压高低。

电流→水流,即电流大小→水流快慢。

思考如下问题。

(1) 输入水位或电位在有或无的情况下,输出水位或电容两端电位的变化情况如何?

(2) 如果改变电阻或电容,会如何影响输出电压的变化速度?

仔细类比思考,可以得到如下的类比规律。

电压高→电流大,水压高→水流快。

电量大→电位高,水量大→水位高。

电流大→电位上升快,水流大→水位上升快。

电阻小→电流大,水管粗→水流大。

电容大→电位上升慢,池子底面积大→水位上升慢。

图 1-2 显示了 RC=1、2、4 时,输出电位上升的仿真结果,图中横坐标为时间,单位为秒(s),纵坐标为电压,单位为伏特(V)。

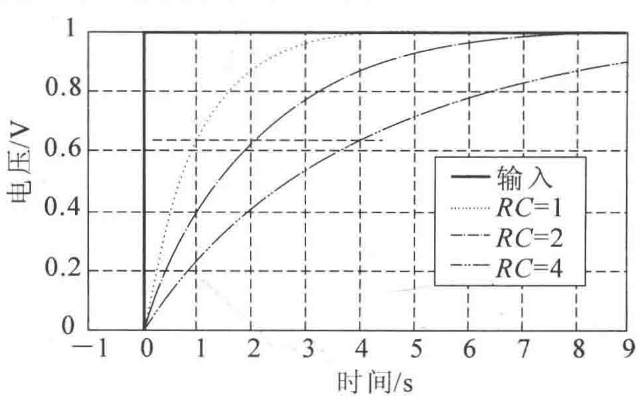


图 1-2　不同 RC 输出上升仿真曲线

1.2　规律的总结

在输入突变的情况下，观察输出变化的速度，发现输出变化的速度是时刻变化的，而且这种变化与当前的输出量本身是相关联的。假设输入与输出一开始都是 1，当输入突然变成 0 以后，输出开始下降，并且输出越小，下降越慢，且输出下降的速度与输出的大小成正比（输入为 0 的条件下）。

这样的问题，在自然界中是一种十分有规律性的问题，很多问题都与之有相似的特点：变化速度与当前量成正比。

这样的相似问题举例如下。

(1) 银行存款及利息计算：存款越多，利息越多。

(2) 烂苹果规律：苹果越多，烂掉的越多。

(3) 电子产品失效规律：产品越多，失效的越多。

(4) 细胞繁殖规律：细胞数量越来越多，繁殖越来越快。

(5) 水桶底部漏水规律：水量越少，水漏得越慢。

(6) 医院量体温时，温度计上升规律：温度越接近低温，温度计上升越慢。

(7) *RC* 电路阶跃响应规律：两端电压越接近，充电速度越接近 0。

(8) 药物衰减规律（半衰期）：药物浓度越小，衰减速度越小。

(9) 元素衰减规律：元素含量越少，衰减越慢。

(10) 学生花钱的一般方法：钱多花得多，钱少花得少。

因此，对这样的问题的求解，可以抽象为对自然界中一种规律性问题的求解。那么，如何求解这样的问题呢？这样的问题又该用什么样的数学公式来表达呢？

1.3　求解的过渡

现在，把所有这样的问题类比于一个烂苹果规律问题来求解。

假设，10000 个苹果，以每分钟烂掉剩下苹果 6% 的速度腐烂，即烂掉率为 6%/min（或以烂掉剩下的 (6÷60)%/s（秒）即 0.1%/s 的速度），问：1 min 后剩下多少个好苹果？ t min 后又剩下多少？

解法一：以分钟（min）为单位，烂掉率为 6%/min

$$10000-10000\times 6\%=9400$$

或
$$10000(1-6\%)=9400$$

解法二:以秒(s)为单位,烂掉率为0.1%/s,利用以前高中学过的知识

1 s后剩下:

$$10000(1-0.1\%)$$

2 s后剩下:

$$10000(1-0.1\%)(1-0.1\%)=10000(1-0.1\%)^2$$

经过递推可知,60 s后剩下:

$$10000(1-0.1\%)^{60}\approx 9417$$

如果继续下去,还可以以ms、μs、ns、ps等更小的时间量为单位。为了得到一个极限量,直接以一个无穷小的时间量Δ s为单位,从而得到解法三。

解法三:以Δ s为计量单位,Δ s时间内烂掉剩下的0.1%Δ=0.001Δ,且1 min有60/Δ个Δ s。

1个Δ s后剩下:

$$10000(1-0.1\%\Delta) \tag{1-1}$$

2个Δ s后剩下:

$$10000(1-0.1\%\Delta)^2 \tag{1-2}$$

1 min,即60/Δ个Δ s后剩下:

$$10000(1-0.1\%\Delta)^{\frac{60}{\Delta}} \tag{1-3}$$

显然,要想得到这个解,需要好好分析,当Δ→0时,式(1-3)的极限是否存在的问题。

为了实现计算的一般性,式(1-3)也可以转化为$10000[(1+\Delta']^{\frac{1}{\Delta'}})^{-0.06}$的求解,其中$\Delta'=-0.001\Delta$。显然,式(1-3)的求解,最后可简化为一个数$\lim\limits_{\Delta'\to 0}(1+\Delta')^{\frac{1}{\Delta'}}$的求解。如果这个数的极限存在,那么对此类问题,就可以得到一个理论上没有误差的解。

数学上已经证明了这个数的存在,并以e作为它的结果,命名为自然常数。它是一个需要计算极限得到的量。

因此,式(1-3)可以写为

$$10000(1-0.1\%\Delta)^{\frac{60}{\Delta}}=10000e^{-60\times 0.1\%}=10000e^{-0.06} \tag{1-4}$$

无疑,用这种方法计算得到的是没有误差的结果。沿着这个思路计

算，经过时间 t 后，剩下的苹果数量应该为

$$x(t)=10000\mathrm{e}^{-0.06t} \tag{1-5}$$

这个推导结果，可以演变成类似问题的一个经验解或规律解，以后遇到类似的问题都可以用这种形式来表达，只需把其中的指数系数如这里的 -0.06 换成别的系数即可。

解法四：此问题其实是一个微积分的问题，可以这样叙述，经过时间 t 后苹果剩余数量为 $x(t)$，经过一段很短的时间 δ 后，苹果数量变为 $x(t+\delta)=x(t)-6\%\delta x(t)$ 个。

也能写成

$$x(t+\delta)-x(t)=-6\%\delta x(t)$$

或

$$\frac{x(t+\delta)-x(t)}{\delta}=-6\%x(t) \tag{1-6}$$

这正好是微分方程的形式，即

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-6\%x(t) \tag{1-7}$$

且 $x(0)=10000$，求 $x(1)$、$x(t)$。

显然这个方程的解，按照前面极限推导的经验公式，可以假设为 $x(t)=A\mathrm{e}^{st}$，代入方程(1-10)，肯定会得到满足方程的 A、s 值。

若以秒(s)为单位，则

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-0.1\%x(t) \tag{1-8}$$

且 $x(0)=10000$，求 $x(60)$。

此类问题称为一阶系统问题，它们总是以这样的微分方程的形式出现

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda(k+x(t)) \tag{1-9}$$

其中，λ 称为上升或下降率，k 是一个常数。

通过上面的推导发现，这种规律问题的解，总是以 e 的指数函数的形式呈现

$$x(t)=A\mathrm{e}^{-\lambda t}+B \tag{1-10}$$

这也解释了 e 的来源与作用。

值得说明的是，对于每一个简化的系统，λ 都是固定的常数，如利息计算用的利息率、产品失效问题中的失效率、元素衰减问题中的衰减率、细

胞繁殖问题中的繁殖率等。因此很多系统辨识的问题，就是这个常数获取的问题。

1.4　数学与模型提炼

通过前面的讨论，可以发现，烂苹果规律其实是一种衰变规律或几何级数增长规律。因此，烂苹果问题在数学上可以简化为一阶系统的问题，而该一阶系统实质上是含有反馈环节的积分系统，它的特点是：在输入条件不变的情况下，输出增长或衰变速度正比于目标量自身的大小。

以图 1-1 所示的 RC 系统为例，可以根据规律来推导相应的公式，如表 1-1 所示。

表 1-1　根据 RC 系统规律推导公式

规　　律	公　　式
电阻两端电压等于电流乘以阻值	$U_R = iR$
电容两端电压等于电量除以电容大小	$U_C = \dfrac{Q_C}{C}$
电容两端的电量为流过电容的电流的积分	$Q_C = \int i \mathrm{d}t$
串联环节两端电压为各分电压叠加	$U_i = U_R + U_C$

组合这些公式，消除中间变量，得到如下的数学微分公式

$$\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} = \frac{U_i - U_C}{RC} \tag{1-11}$$

这个公式的结论可以总结为：电容两端电压上升（或下降）速度与电阻两端电压差成正比，与 RC 成反比。

这样含有积分环节的问题，也可以简化为如图 1-3 所示的含有反馈环节的模型。

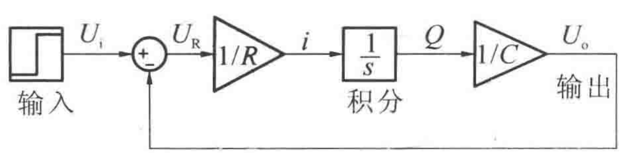


图 1-3　一阶 RC 系统模型

从模型中可以看出，每一个环节就是一个公式，而且模型更加直观地显示了这些公式之间的有机联系。

显然，当某个时段输入由 0 突变到 1 后，保持一段时间不变，则公式(1-11)的解为

$$\begin{cases} U_{\mathrm{C}}(0)=0 \\ U_{\mathrm{i}}(t)=1 \end{cases} \tag{1-12}$$

利用前面推导的规律公式(1-11)，代入公式(1-12)，可以解得

$$U_{\mathrm{C}}(t)=1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{1-13}$$

类似地，思考这样的问题：

用一支体温计，在室温 25 ℃时，测量一个正常人 37 ℃的体温，体温计上升到 33 ℃所花的时间为 6 s。问用同样一个体温计，在室温 20 ℃时，测量 40 ℃高烧病人的体温，体温计上升到 30 ℃刻度时所花时间为多少？并请计算出该体温计的时间常数(或给出体温计的温度上升率，即上升速度与温差的比率)。

(1) 列出上升或下降曲线的微分方程，并给出适当解释。

(2) 给出上升或下降曲线方程的解。

(3) 求解上升或下降到距目标位置 1/2、1/4、1/8、1/16 处所花的时间。

(4) 根据这个时间关系，给出你的解释。

1.5 总　　结

(1) 衰变与增长的规律问题，可以总结为数学上一阶积分反馈系统的问题。自然界很多现象可以近似为这种规律的变化，对这种现象的分析、数学抽象以及求解，为解决工程问题提供了基础。

(2) 这种一阶系统的特点是，输出的变化速度时刻改变，且输出速度与输出本身有关。利用常规的积分方法无法直接求解此类问题，且无法满足学生过渡理解的要求。采用烂苹果问题极限方法推导出 e 的来源，为 e 的进一步应用找到了落脚点。这种方法不同于其他书上直接定义 e 这样一个常数的方案，它更能给学习者提供一个知识自我构建的过程。

(3) RC 系统是一种典型的一阶系统问题，将 RC 系统与水池系统类比，能够使学生对电路系统的理解更加形象。RC 系统的求解为解决其他类似问题提供了触类旁通的途径。

(4) 一阶系统的求解总是可以通过 e 指数形式表达，且指数的系数代表系统的特征。

第 2 章　三角函数之源

三角函数的曲线规律，也是自然界中的一种运动规律。它符合能量守恒的规律，是二阶系统基本解的形式。理解它的来源有利于为今后高阶系统的求解，以及很多信号处理问题，如快速傅里叶变换（FFT）问题打下基础，也利于后面对拉普拉斯变换与频率分析的理解。

本章从弹簧振子的振动分析开始，通过想象以及进行规律分析，从能量守恒角度，得出弹簧振子正余弦曲线的振荡规律问题的解，并指出三角函数形式的解是二阶微分方程的通解。最后通过欧拉公式的统一，使二阶系统解的形式与一阶系统一样，其解的形式也以 e 指数函数的形式呈现。

2.1　引　　子

要想从自然规律中弄清楚三角函数的来源，首先需要分析弹簧振子的运动规律。

图 2-1 所示为弹簧阻尼振子系统，这里简称为弹簧振子系统。

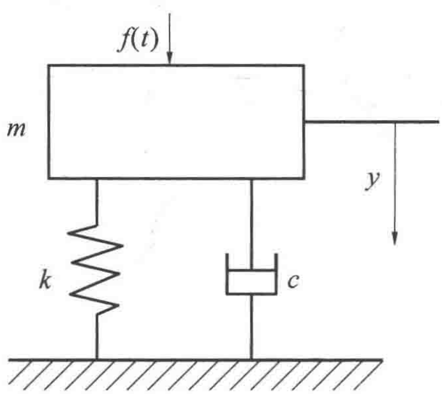


图 2-1　典型的弹簧振子系统

结合实验与仿真的运动位移曲线（见图 2-2），想象与思考弹簧振子的运动状态。

在输入突变的情况下，振子开始振动。不同阻尼条件下的三种运动形式如下。

(1) 对于无阻尼条件下，振子自由振动，振动幅度没有衰减。

(2) 小阻尼条件下，振子振动幅度衰减。

(3) 大阻尼条件下，振子没有振动。

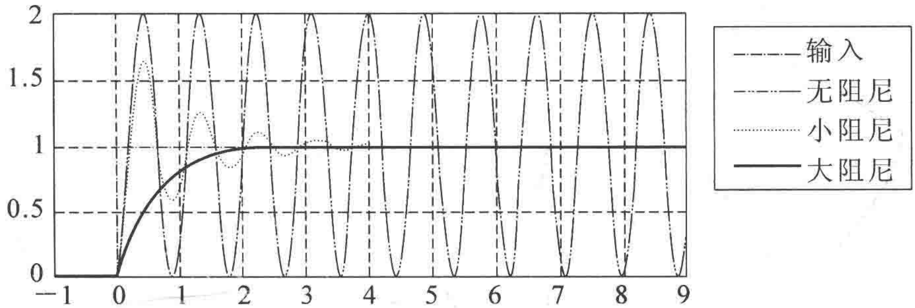


图 2-2　三种状态下振子的运动轨迹仿真曲线

2.2 规　　律

一般来说，在无阻尼的条件下，振子的运动形式是满足机械能守恒定律的，即

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E_0 \tag{2-1}$$

假设目前不知道这时候曲线的时间方程形式，同时假设我们对微积分的含义也不熟，可以想象，曲线形式一定满足这样的规律：值大的时候，代表速度的斜率必然小；值小的时候，代表速度的斜率必然大。

为使分析简洁直观，令 $k=1\ \text{N/m}$，$m=1\ \text{kg}$，$E=0.5\ \text{J}$，得到这样的结论

$$x^2 + v^2 = E_0 \tag{2-2}$$

猜想：某个函数，它的平方与它导数的平方之和为一常数，那么这样的函数曲线应该是什么样子的呢？对于某条曲线，当函数值（绝对值）大的时候，它的斜率（导数的绝对值）应该小；当函数值小的时候，斜率应该大；当函数值为 0 的时候，斜率最大。这样的函数应该是什么样的呢？

答案是显而易见的，只有三角函数才满足这样的要求。

如果对微积分的含义与应用十分熟悉，那么也可以把式(2-1)写成如下的形式

$$\frac{1}{2}kx^2(t) + \frac{1}{2}m(x'(t))^2 = E_0 \tag{2-3}$$

这时等式两边的量纲为能量单位，焦耳。