"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

普通物理实验（1）
力学、热学部分

（第五版）

杨述武　孙迎春　沈国土　赵立竹　主编
孙迎春　马葭生　周嘉源　吴俊林　丁永文　编

高等教育出版社

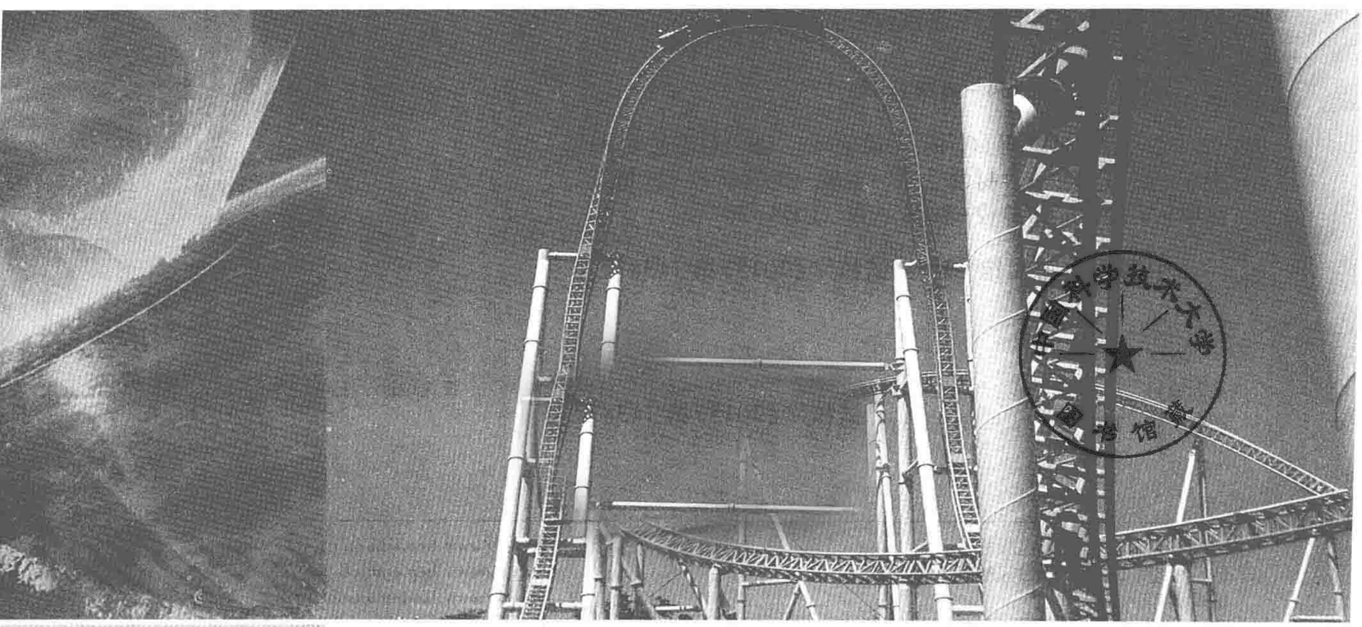
"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材

普通物理实验(1)
力学、热学部分

Putong Wulishiyan Lixue Rexue Bufen

(第五版)

杨述武　孙迎春　沈国土　赵立竹　主编
孙迎春　马葭生　周嘉源　吴俊林　丁永文　编



高等教育出版社·北京

内容提要

《普通物理实验》(第五版)共4册，分为：力学、热学部分，电磁学部分，光学部分，综合及设计部分。此次修订保持了原书通用性好、可读性强及注重能力培养的特色，并基本保持了原书的框架，同时为了适应教学的发展，在内容上有一些增删和改变。

本书是第一分册，为力学、热学实验部分，共37个实验，内容有多处进行了修订，适用性和科学性均有所增强。

本书可作为高等学校物理类专业及相近专业普通物理实验的教材，也可供相关的广大科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

普通物理实验.1,力学、热学部分/杨述武等主编；孙迎春等编.--5版.--北京：高等教育出版社，2015.11

ISBN 978-7-04-042878-0

Ⅰ.①普… Ⅱ.①杨… ②孙… Ⅲ.①普通物理学-实验-高等学校-教材②力学-实验-高等学校-教材③热学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.①O4-33

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第113872号

策划编辑 程福平　　责任编辑 程福平　　封面设计 张 楠　　版式设计 王艳红
插图绘制 杜晓丹　　责任校对 殷 然　　责任印制 赵义民

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	北京市鑫霸印务有限公司		http://www.landraco.com.cn
开 本	787mm×1092mm 1/16		
印 张	10.75	版 次	1983年4月第1版
字 数	280千字		2015年11月第5版
购书热线	010-58581118	印 次	2015年11月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	17.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 42878-00

前　　言

本套书共四册，第一分册为力学、热学部分，第二分册为电磁学部分，第三分册为光学部分，第四分册为综合及设计部分。本书是第一分册。

2014 年 10 月，高等教育出版社委托我们对现行的第四版进行修订。我们和出版社共同商定，此次修订的原则是在保持原书基本框架的前提下，删去过时或不合适的内容，增加些新的内容，特别是增加一些有利于提高学生科学素质的内容。据此我们对普通物理实验课的目标定为：

（1）学习基本实验方法和操作技能，在观察、测量与分析中，加深对物理学的认识；

（2）学习实验的物理思想，为用实验方法探索问题有一定的基本训练；

（3）培养学生的思维能力，主要是分析问题、解决问题和提出问题的能力，增强学生的素质，以适应学生各种可能的发展；

（4）物理实验是门基础课，但“基础”的内涵随着科学技术的进步应有所更新；

（5）基础物理实验应反映现代科技的成就；

（6）为培养学生的动手能力，尤其是为培养学生思维能力搭建一个有效的平台，注意基础与应用相结合。

对于实验装置，我们认为应让学生自己动手去组装，在组装过程中对动手和用脑都是训练，对实验也有全面的认识。学生在动手组装的过程中，可能遇到一些困难和出现错误，但这不是坏事，只要引导得法，就可在分析、解决问题过程中增长才干，增强信心，对将来学生自己独立工作将是可贵的经验。

此次修订工作的完成，是参与修订工作的同志们共同努力的结果，但也有曾参加此书的编写而未能参加此次修订工作的同志们的心血。

参加修订的人员分工为：东北师范大学孙迎春（绪论、实验一、二、三、四、五、七、八、九、十、十二、十三、十四、十七、十八、十九、二十、二十四、二十六、三十四）；华东师范大学马葭生、周嘉源（实验十一、十五、十六、二十一、二十五、三十六）；陕西师范大学吴俊林（实验六、二十三、二十七、二十八、三十一、三十七）；辽宁师范大学丁永文（实验二十二、二十九、三十、三十二、三十三、三十五）。

我们认为修订后虽有改进，但是仍会存在一些不足，我们期望使用本书的老师和学生们提出建议和批评，以使本书得以进一步改进。

编　者

2015 年 1 月

致学生读者

物理学是以实验为基础的科学,因此学习物理学必须注意实验问题。科学是面对未知世界的,为此要进行探索,在学习实验时也应注意学习探索的方法。

物理实验课是在教师的指导下,完成一定的实验课题,但在实验过程中学生有很大的自由,我们期望学生积极主动地去做实验的主人,而不限于按教师、指导书的指令去做实验,如何去做实验的主人,在此谈几点想法。

1. 实验课上学什么

实验课要学习的内容综合为3个方面:

(1) 学习实验方法、测量仪器、数据处理问题和操作技能。

(2) 学习实验的物理思想。

(3) 提高思维能力特别是创造性思维能力,主要包括:能综合运用已有知识去解决实际问题;发现问题和提出问题;能灵活地考虑问题;能预见事物发展的前景;提出新的设想。

2. 在探索中学习

实验预习时除去了解实验方法和仪器之外,也可考虑一些要探索的问题,例如单摆的实验,可以探索摆的幅角 θ 和周期 T 的关系,摆的振动不在同一平面内的影响等。

3. 误差分析

误差分析,主要是分析误差的来源,对实验影响大的是什么。在实验过程中要始终注意误差分析,使实验能顺利进行,实验后又可提出改进实验的设想。

4. 实验结果的评价

要锻炼自己去评价实验结果,增强对自己测量的信心,如果教师说实验结果不太好,一定想一想自己为什么没发现,再评价时应如何注意。

5. 关于实验的物理思想

实验的物理思想,就是设计一个物理过程,将不可测或测不准的量转换为可以测或测得较准的量。我们要注意学习前人宝贵的设计思想,又要尝试提出自己的设计。

6. 提出问题

实验的改进或新的设计都是先提出问题。一般讲问题有两类:一类是对实验方法、仪器不完全明了而导致的问题;另一类是对实验了解之后一些深层次的问题,这一类问题更重要,更有创造性。

至于提什么问题,要靠自己独立的思考和经验的积累,但首要的是敢于提出问题。

目　录

绪　论

§1　普通物理实验课的目的

物理学是以实验为基础的科学. 物理学新概念的确立和新规律的发现要依赖于反复实验. 物理学上新的突破常常是通过新的实验技术得以实现的. 物理实验的方法、思想、仪器和技术已经被普遍地应用在自然科学各个领域和技术部门.

普通物理实验课是对学生进行实验教育的入门课程,其教学目的在于使学生学习物理实验基础知识的同时,受到严格的训练,掌握初步的实验能力,养成良好的实验习惯和严谨的科学作风.

物理实验课上主要学习以下内容.

1. 学习基础实验方法、仪器和数据处理知识

通过对被测量的定量测量,对被测量及相关的物理过程有明确具体地了解,例如测冷拔纯铜的弹性模量为$(1.27\pm0.05)\times10^{11}$ Pa;测油滴的电荷分析计算出元电荷为$(1.61\pm0.02)\times10^{-19}$C.

2. 锻炼手的操作技能

对实验装置的安装、调整,对计量器具的正确操作,是做好实验的基础.

3. 学习实验的物理思想

每个实验都是一个物理过程,通过此过程将间接测量量转换为若干直接测量量,将难测的量转换成容易测的量,将测不准的量转换成比较测得准的量,在这些转换中有丰富的物理思想.

4. 培养思维能力

思维是在观察的基础上,进行分析、综合、判断、推理和提出新思想的认识过程,它对任何工作都十分重要,在实验中是培养思维能力的很好的机会,如:

(1) 观察现象、分析测量数据、判断实验的进行是否正常;

(2) 对实验故障的分析、判断,找出问题的所在及解决方法;

(3) 审查实验记录,发现可能存在问题;

(4) 分析实验结果,给出恰当的评价,提出深入思考后的问题等.

实验课虽然是在教师指导下的学习环节,但在实验课上学生的活动有较大的独立性,我们期望学生以研究者的态度去组装实验装置,进行观测与分析,探讨最佳实验方案,从中积累经验、锻炼技巧,为以后独立设计实验方案和解决新的实验课题创造条件.

§2　测量与仪器

测量是指用实验方法确定被测对象的量值的实验过程.

测量分为直接测量与间接测量.

直接测量是指被测量和同类单位的标准物或计量器具直接比较,得出被测量量值的测量.

例如,一桌子的长度与米尺相比,得出桌子长度为 1.248 m;一铁块的质量与砝码相比(通过天平),得出铁块质量为 31.85 g.

间接测量是指由一个或几个直接测得量经已知函数关系计算出被测量量值的测量. 例如,测量单摆的摆长 l 和振动周期 T,由已知的公式 $g=4\pi^2 l/T^2$ 算出重力加速度 g 值的过程就是间接测量.

测量仪器是指用以直接或间接测出被测对象量值的所有器具. 如游标卡尺、天平、秒表、惠斯通电桥、照度计等.

测量结果给出被测量的量值,它包括两部分——数值和单位(不标出单位的数值不能是量值!),一般还应给出不确定度.

仪器的准确度等级　测量时是以计量器具为标准进行比较,当然要求仪器尽可能准确. 不过由于测量的目的不同对仪器准确程度的要求也不同,比如称量金戒指的天平必须准确到 0.01 g,而粮店卖粮的台秤偏差不超过 20 g 就可以了. 为了适应各种测量对仪器的准确程度的不同要求,国家规定工厂生产的仪器分为若干准确度等级. 各种不同等级的仪器,又有对准确程度的具体规定. 例如 1 级螺旋测微器,测量范围小于 50 mm,最大误差不超过±0.004 mm,又如 1.0 级电流表,测量范围为 0~500 mA 的基本误差限为±5 mA.

实验时要恰当地选取仪器. 仪器使用不当对仪器和实验均不利. 表示仪器的性能有许多指标,其中最基本的是测量范围和准确度指标. 当被测量超过仪器的测量范围时,首先对仪器会造成损伤,其次可能测不出量值(如电流表),或勉强测出(如天平),但误差将增大. 对仪器的准确度等级的选择也要适当,一般是在满足测量要求的条件下,尽量选用准确程度低的仪器. 减少准确度高的仪器的使用次数,可以减少在反复使用时的损耗,延长其使用寿命.

习　题　一

1. 测量就是比较,试说明如下的测量是如何体现比较的:

(1) 用杆秤称量一个西瓜的重量;

(2) 用弹簧秤称一新生婴儿的重量.

2. 你知道如何去做下面的测量吗?

(1) 跑 100 m 所用的时间;

(2) 子弹的速度.

3. 电梯运动时有加速度,将一弹簧秤放在电梯上,其上放 1 kg 重砝码,电梯运动时秤的指示值是 1 kg 吗?秤的指示值和电梯加速度是否有联系?

4. 间接测量量是否可能成为直接测量量呢?

§3 测量与误差

物理实验时要对一些物理量进行测量. 被测量量在实验当时条件下均有不依人的意志为转移的真实大小，称此值为被测量的真值. 测量的理想结果是真值，但是它是不能确知的，因为，首先测量仪器只能准确到一定程度；其次有环境条件的影响，并且观测者操作和读数不能十分准确，理论也有近似性，所以测得值和真值总可能不一致. 定义测得值减去真值的差为测得值的误差，即

$$测得值(x)-真值(a)=误差(\varepsilon)$$

误差 ε 是一代数值，当 $x \geqslant a$ 时，$\varepsilon \geqslant 0$；$x<a$ 时，$\varepsilon<0$. 由于真值是不能确知的，所以测得值的误差也不能确切知道，在此情况下，测量的任务是：

(1) 给出被测量真值的最佳估值；

(2) 给出真值最佳估值的可靠程度的估计.

关于什么是最佳估值，留到后面去讨论，但是可以想到最佳估值一般不确定度比较小. 为了减小误差就要分析误差的来源，实际上任何测量的误差都是多种因素的综合效应. 现在以用单摆测重力加速度为例作些分析.

物理理论中的单摆，是用一无质量无弹性的线，挂起一质量为 m 的质点，在摆角接近零时，摆长 l 和周期 T 之间存在 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 的关系，其中 g 为当地的重力加速度. 在该实验中，误差的来源大致有如下几方面：① 米尺和秒表本身不准确；② 对仪器的操作不规范；③ 仪器读数不准确；④ 摆线质量不为零且有一定弹性；⑤ 摆锤体积不为零；⑥ 摆角大小引入的误差不可忽略；⑦ 存在空气浮力和阻力；⑧ 支点状态不理想；⑨ 支架震动或空气流动.

总的来说，误差来源主要有以下几点：

(1) 被测量的定义不完善；

(2) 相同条件下被测量在重复观测中的变化；

(3) 测量方法和测量程序的近似和假设；

(4) 复现被测量的方法不理想；

(5) 取样的代表性不够；

(6) 测量仪器的计量性能局限；

(7) 测量标准或标准物质的不确定度；

(8) 引用数据或其他参量的不确定度；

(9) 对主要环境条件等影响量的认识不当或测控不完善；

(10) 对模拟式仪器的读数有人为偏移.

在相同条件下的重复测量中，所得测量值一般不尽相同，这表示每次测量的误差不同，并且在测量之前不可预知测量值是偏大些或偏小些，例如用手按秒表测摆的振动周期每次不尽相同的情形. 这是偶然因素造成的，这一类误差称为随机误差.

还有如下的不同的测量例子：

(1) 用一块 2.5 级 0~1 A 的电流表测一回路的电流 I 为 0.73 A，而用另一块 0.5 级 0~1 A 的

电流表测同一回路电流为 0.716 A；

(2) 用一天平称一物体质量，物体在左盘，砝码在右盘，平衡时，砝码值为 74.251 9 g，物体与砝码交换后则为 74.250 1 g；

(3) 测一单摆的振动周期 T，当摆的振幅在 5°附近时测得 $T_1 = 1.983$ s，振幅在 10°附近时为 $T_2 = 1.987$ s.

上述各项测量值在重复测量时基本不变，但随测量条件的改变（换表、交换称盘、增加摆角等）而改变，此类误差称为系统误差.

测量值的误差均同时包涵随机误差和系统误差，研究误差的目的是：

(1) 尽量减小测量值中影响较大的误差；

(2) 对残存的误差的大小给出某种估计值（估计不确定度）.

绝对误差与相对误差　设被测量量 X 的测量值为 x，其真值为 a，误差 $\varepsilon = x - a$，ε 与 a 的比值 $\varepsilon_r = \varepsilon / a$ 称为相对误差，对应 ε_r 也称 ε 为绝对误差，但应注意绝对误差和误差绝对值 $|\varepsilon|$ 不同. 实际上绝对误差 ε 与真值 a 不可确知，在以后将讨论对它作某种估计.

§4　系统误差

对实验进行理论分析或对比实验之后，可以得知其系统误差的来源，并可采取一定的措施去削减系统误差. 在 §3 中提到的实例(2)是由于天平左右臂长不完全相等引入的系统误差，可将物体放在天平左盘、右盘上各称一次取平均去消除. 实例(3)是由于摆的周期与振幅有关，缩小振幅可以减小此项系统误差，但是振幅不宜过小，当测量要求更高时，可根据理论分析得出的修正公式去补正. 实例(1)是仪器自身的误差问题.

工厂生产仪器要经过设计、选材、加工、组装和校验一系列过程，在此生产过程中产品将或多或少偏离设计值，这是仪器的基本误差. 国家规定工厂生产某一准确度等级的某种仪器，仪器的基本误差必须小于相应等级的容许误差. 例如，生产 2.5 级 0~100 mA 电流表，在测量范围内测量值的误差要小于 2.5%×100 mA，即 2.5 mA，生产 0.5 级 0~100 mA 电流表，测量值的误差要小于 0.5%× 100 mA，即 0.5 mA. 因而 0.5 级电流表测量值比 2.5 级电流表测量值更可靠. 但是任何精密的仪器都是有误差的.

对系统误差的研究主要是：

(1) 探索系统误差的来源，设计实验方案削减该项误差；

(2) 估计残存系统误差的可能范围.

§5　随机误差

在同一条件下，对同一物理量进行重复测量，各次测得值一般不完全相同，这是由于测量时存在随机误差. 一个测得值的随机误差是多项偶然因素综合作用的结果，在测量前不能得知测得值将偏大或偏小.

用手控制数字毫秒计，测量一摆的周期共200次，测量值的大小变化不定，似乎没有规律，其实这种偶然现象服从统计规律. 现将测得值分布的区域等分为9个区间，统计各区间内测量值的个数 N_i，以测量值为横坐标，N_i/N 为纵坐标（N 为总数）作统计直方图，图0-5-1是一次实验的结果.

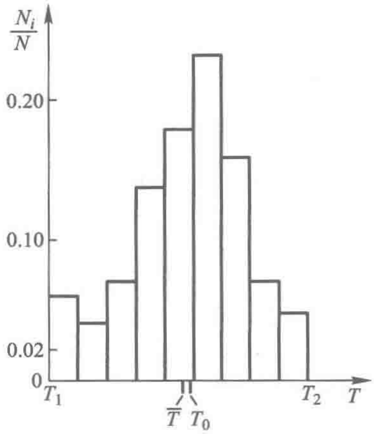


图 0-5-1

T_1（最小值）：1.751 s

T_2（最大值）：1.965 s

$\bar{T}$（平均值）：1.864 5 s

T_0（光控）：1.867 0 s

N：200

从图上可以看出，比较多的测量值集中在分布区域的中部，而区域的左右两半的测量值个数都接近一半，由此可以设想被测量的真值就在数据比较集中的部分.

在上述测量之后，用光电门控制一台数字毫秒计去测同一个摆的周期，测10次，测量值分布在1.866 s到1.868 s的小区域中，由于此时的随机误差显著小于前者，可将光电控制测量值的平均值 T_0 作为手控测量的近似真值，对于测量值的随机误差作如下的统计，取 $T_0=1.867\ 0$ s，则

$T_i-T_0<0(\varepsilon_i\leqslant 0)$　　占48%

$T_i-T_0\geqslant 0(\varepsilon_i>0)$　　占52%

多次测量均有同上相似的结果，因而得出如下几点认识：

（1）每次测量的随机误差是不确定的；

（2）出现正号或负号随机误差的机会相近，大多数有抵偿性；

（3）出现绝对值小的随机误差的机会多一些，绝大多数的分布是有界性和单峰性.

算术平均值　设在相同条件下的 n 次测量值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的误差为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，若真值为 a，则

$$(x_1-a)+(x_2-a)+\cdots+(x_n-a)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n$$

将上式展开整理后，两侧除以 n，得

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)-a=\frac{1}{n}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n)$$

它表示算术平均值的误差，等于各测量值误差的平均，假如各测量值的误差只是随机误差，而随机误差有正有负，相加时可抵消一些，所以 n 越大，算术平均值越接近真值. 因此可以用算术平均值作为被测量真值的最佳估值.

又当测量值的误差中包含有已知的系统误差，则相加时它们不能抵消，这时应当用算术平均值加上修正值为被测量真值的最佳估值（修正值与已定系统误差绝对值相等，符号相反）.

实验标准偏差　具有随机误差的测量值将是分散的，对同一被测量做 n 次测量，表征测量结果分散性的量 s 称为实验标准偏差，s 可由如下贝塞尔公式算出：

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{0-5-1}$$

s 反映了随机误差的分布特征，s 大表示测量值分散，随机误差的分布范围宽，n 为数据的个数，x_i 为测量值，$\bar{x}$ 为平均值.

平均值的实验标准偏差　测量值有随机误差，它们的平均值也必然有随机误差，由于求和时随机误差的抵偿效应，平均值误差的绝对值较小，它的实验标准偏差 $s(\bar{x})$ 也应小于由式（0-5-1）求出的 s 值，在 §7［注 2］中将证明 $s(\bar{x})$ 等于

$$s(\bar{x})=s/\sqrt{n} \tag{0-5-2}$$

实验标准偏差的统计意义　标准偏差小的测量值，表示分散范围较窄或比较向中间集中，而这种表现又显示测量值偏离真值的可能性较小，即测量值的可靠性较高.

按误差理论的高斯分布可知，当不存在显著系统误差时：

$[\bar{x}-s(\bar{x})]\sim[\bar{x}+s(\bar{x})]$ 范围内包括真值的概率约为 2/3.

$[\bar{x}-1.96s(\bar{x})]\sim[\bar{x}+1.96s(\bar{x})]$ 范围内包括真值的概率约为 0.95①.

关于测量次数 n　增加测量次数 n，计算平均值时的抵偿效果会好些，从式（0-5-2）可知 n 增大 $s(\bar{x})$ 将变小，所以增加测量次数对提高平均值的价值是有利的. 但是测量次数也不是越多越好，因为增加 n，测量时间就要延长，实验环境可能出现不稳定，实验者也要疲劳，这将引入新的误差. 对此一般的原则是，在随机误差较大的测量中要多测几次，一般实验取 6~10 次为宜，分散性小的多数一般测量从效率考虑是单次测量.

习　题　二

1. 工厂生产的仪器经检验为合格品，用它测量会有误差吗？
2. 一组测量值，相互差异很小，此测量值的误差很小吗？
3. 算术平均值作为真值的最佳估计值是否有成立条件？
4. 测量不可能没有误差，作为实验者应当使组织的实验尽量减少误差. 你能就用单摆测重力加速度的实验，设想如何才能减小误差？

§6　实验中的错误与高度异常值

实验中有时出现错误，可能是公式错了、装置安错了、电路连错了、对象观察错了、仪器操作错了、数读错了、计算错了等. 实验出错了在时间上和精神上都是损失，我们首先要防止出现错

① 在 §7 的附注［3］中有进一步的说明.

误，其次要尽早地发现错误.

防止错误的关键是熟悉实验理论和条件，明确要观察的现象，懂得正确使用仪器.

尽早发现实验中的错误是实验者的良好习惯. 初学者往往只顾观测而忽视分析，由于未及时发现错误，造成很多数据作废甚至重做实验.因此，应当养成一边观测一边分析思考的习惯.

数据分析是发现错误的重要方法.例如，测量单摆摆动 50 个周期的时间，得出 98.4 s、96.7 s、97.7 s. 从数据可知摆的周期接近 2 s，但是前两个数据相差1.7 s，后两个相差 1.0 s，它们都在半个周期以上，显然这样大的差异不能用手按秒表稍许提前或错后的操作不当去解释，即测量有错误.

在一组数据中，有时有一两个稍许偏大或偏小的数值，如果简单的数据分析不能判定它是错误数据，就要借助于误差理论.

在误差理论中提出了一些关于处理可疑数据的判据，在此介绍格拉布斯判据.

设测量值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 近似为正态样本，其平均值为 $\bar{x}$，实验标准偏差为 s，取统计量 G 为残差 $(x_i-\bar{x})$ 与 s 之比：

$$G=\frac{|x_i-\bar{x}|}{s}$$

格拉布斯判据给出 G 的分布的临界值 $G(n,\alpha)$（α 为显著性水平）.若可疑值为 x_m，当

$$\frac{|x_m-\bar{x}|}{s}>G(n,\alpha)$$

时，就判定 x_m 为高度异常数据.表 0-6-1 为格拉布斯判据临界值表.

表 0-6-1　格拉布斯判据临界值表（$\alpha=0.01$）

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$G(n,\alpha)$	1.15	1.49	1.75	1.94	2.10	2.22	2.32	2.41	2.48	2.55	2.61
n	14	15	16	17	18	19	20	25	30	40	50
$G(n,\alpha)$	2.66	2.70	2.74	2.78	2.82	2.85	2.88	3.01	3.10	3.24	3.34

例：测得一组长度值（单位：cm）：

98.28	98.26	98.24	98.29	98.21
98.30	98.97	98.25	98.23	98.25

计算出

$$\bar{x}=98.328\ \text{cm},\ s=0.227\ \text{cm}$$

$$n=10,\ G(n,\alpha)=2.41$$

数据 98.97 可疑，算出

$$G=\frac{|98.97-98.328|}{0.227}=2.828$$

而 $G(10,0.01)=2.41$ 小于 2.828，所以数据 98.97 应舍去. 除去后再计算得

$$\bar{x}=98.257\ \text{cm},\ s=0.029\ \text{cm},\ s(\bar{x})=0.010\ \text{cm}$$

§7　测量不确定度

测量的理想结果是测得被测量量在测量条件下的真值，前已讨论这是不可能的，测得值只能是真值的近似值，现在要讨论的不是测得值和真值偏离的大小，而是如何计算测得值与真值之差的可能的范围，即测量的不确定度.

测量不确定度的来源有多个，这些不同来源的不确定度在计算方法上只有两类，一类称为 A 类分量，它是用统计学方法计算的分量，是随机误差性质的不确定度；另一类称为 B 类分量，是用其他方法（非统计方法）评定的分量，是系统误差性质的不确定度.计算不确定度，常用计算标准差去表示，称为标准不确定度.

1. 直接测量值的标准不确定度的 A 类分量 $u_A(x)$

测量 x 的平均值 $\bar{x}$ 的实验标准差 $s(\bar{x})=\sqrt{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$

取 x 的标准不确定度的 A 类分量

$$u_A(x)=s(\bar{x}) \tag{0-7-1}$$

当测量值 x 的分布为正态分布时，不确定度 $u_A(x)$ 表示 $\bar{x}$ 的随机误差在 $-u_A(x)\sim+u_A(x)$ 范围内的概率近似为 2/3.

2. 直接测量值的标准不确定度的 B 类分量 $u_B(x)$

设 x 误差的某一项的误差限为 Δ，其标准差 $s=\Delta/k$，（k 为与该未定系差分量的可能分布有关的常量），则标准不确定度 B 类分量

$$u_B(x)=\Delta/k \tag{0-7-2}$$

按均匀分布，$k=\sqrt{3}$，则 $u_B(x)=\Delta/\sqrt{3}$，$\bar{x}$ 的该项误差在 $-u_B(x)\sim+u_B(x)$ 范围内的概率为 57%.

例 1　使用量程 0~300 mm，分度值 0.05 mm 的游标卡尺测量长度时，按国家计量技术规范 JJG30—2012，其示值误差在±0.05 mm 以内，即极限误差 $\Delta=0.05$ mm，则由游标卡尺引入的标准不确定度 $u_B(x)$ 为

$$u_B(x)=0.05\ \text{mm}/\sqrt{3}=0.029\ \text{mm}$$

例 2　使用数字毫秒计测一时间间隔 t，按 JJG602—2014 其示值误差在±（晶体频率准确度×时间间隔 t+1 个时标）范围内，频率准确度为 1×10^{-5}.

当 $t=2.157$ s 时，则 $\Delta=(1\times10^{-5}\times2.157+0.001)\ \text{s}\approx0.001$ s，则由数字毫秒计引入的标准不确定度 $u_B(x)$ 为

$$u_B(x)=0.001\ \text{s}/\sqrt{3}=0.000\ 58\ \text{s}$$

3. 合成标准不确定度 $u_c(x)$ 或 $u_c(y)$

对一物理量测定之后，要计算测得值的不确定度，由于其测得值的不确定度来源不止一个，所以要合成其标准不确定度.

例如，用螺旋测微器测钢球的直径，不确定度的来源有：

（1）重复测量读数（A 类评定）.

（2）螺旋测微器的固有误差（B 类评定）.

又如，用天平称衡一物体的质量，不确定度的来源有：

（1）重复测量读数（A 类评定），

（2）天平不等臂（B 类评定），

（3）砝码的标称值的误差（B 类评定）. 标称值指仪器上标明的量值.

（4）空气浮力引入的误差（B 类评定）.

由不同来源分别评定的标准不确定度要合成为测得值的标准不确定度. 首先应明确一点，作为标准不确定度不论是 A 类评定或 B 类评定在合成时是等价的；其次是合成的方法，由于实际上各项误差的符号不一定相同，采用算术求和将可能增大合成值，国际统一约定采用方和根法，合成两类分量. 如图 0-7-1 所示.

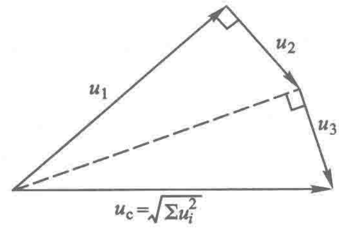


图 0-7-1

对于直接测量，设被测量 X 的标准不确定度的来源有 k 项，则合成标准不确定度 $u_c(x)$ 取

$$u_c(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}u^2(x)_i} \qquad (0\text{-}7\text{-}3)$$

上式中的 $u(x)$ 可以是 A 类评定或 B 类评定.

对于间接测量，设被测量 Y 由 m 个不相关的直接被测量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 算出，它们的关系为 $y=y(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，各 x_i 的标准不确定度为 $u(x_i)$，则 y 的合成标准不确定度 $u_c(y)$ 为①

$$u_c(y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2u^2(x_i)} \qquad (0\text{-}7\text{-}4)$$

偏导数 $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ 为灵敏系数. $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ 的计算与导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的计算很相似，只是计算 $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ 时要把 x_1 以外的变量作为常量处理，对于幂函数 $y=Ax_1^a\cdot x_2^b\cdot\cdots\cdot x_m^k$，由于

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=y\frac{a}{x_1}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial x_2}=y\frac{b}{x_2}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{\partial y}{\partial x_m}=y\frac{k}{x_m}$$

式（0-7-4）成为比较简单的形式：

$$u_c(y)=y\sqrt{\left(a\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2+\left(b\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2+\cdots+\left(k\frac{u(x_m)}{x_m}\right)^2} \qquad (0\text{-}7\text{-}5)$$

4. 测量结果的报道

$$Y=y\ \pm u_c(y)\ （单位）$$

或用相对不确定度 u_r，$u_r=u(y)/y$，则

$$Y=y(1\ \pm u_r)\ （单位）$$

测量后，一定要计算不确定度，如果实验时间较少，不便于比较全面计算不确定度时，对于随机误差为主的测量情况下，可以只计算 A 类标准不确定度作为总的不确定度，略去 B 类不确定

① 式（0-7-4）的说明请见本节之后的附注[1].

度不计;对于系统误差为主的测量情况下,可以只计算 B 类标准不确定度为总的不确定度.

计算 B 类不确定度时,如果查不到该类仪器的容许误差可取 Δ 等于分度值,或某一估计值,但要注明.

附注

[1] 关于式(0-7-4)的说明

设被测量 y 可写成直接测量量 x_i 的函数:

$$y=f(x_i) \tag{0-7-6}$$

首先写出误差 $\mathrm{d}y$ 的全微分表达式,即误差传递的代数和式:

$$\mathrm{d}y = \sum_i \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i \tag{0-7-7}$$

式中 $\mathrm{d}x_i$ 为直接测量值 x_i 的误差,偏导数的绝对值设为 c_i,称为灵敏系数,表示 x_i 的误差对 y 的误差影响的系数,即

$$c_i = \left|\frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i}\right| \tag{0-7-8}$$

进而可写成标准差 s_y 的方和根合成式:

$$s_y = \sqrt{\sum_i (c_i \cdot s(x_i))^2} \tag{0-7-9}$$

x_i 的误差互不相关时,式(0-7-9)对随机变量总体标准差合成是严密的.由此公认(约定),y 的标准不确定度也是各分量与灵敏系数之积的方和根.即

$$u_c(y) = \sqrt{\sum (c_i \cdot u(x_i))^2} \tag{0-7-10}$$

[2] 关于算术平均值的实验标准偏差 $s(\bar{x}) = s/\sqrt{n}$ 的证明

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为在相同条件下(等精度)的一组测量值,算术平均值 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x} = \sum x_i/n = \frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \cdots + \frac{1}{n}x_n$$

根据式(0-7-7),$\bar{x}$ 的实验标准偏差 $s(\bar{x})$ 和测量值 x_i 的实验标准偏差 s_i 的关系为

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\sum \left(\frac{1}{n}\right)^2 s_i^2}$$

对于等精度测量 $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = s$,则上式为

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\sum \frac{1}{n^2}s^2} = \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{0-7-11}$$

[3] 完整的测量结果要给出合成标准不确定度 u_c 和相应的有效自由度 ν_{eff}.

在方差计算中,自由度为和的项数减去对和的限制数,记为 ν.在重复测量中,n 次测量的样本方差为 $\sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i^2/(n-1)$,其中 ν 为残差,而 $\sum \nu_i=0$ 是约束条件,即限制数为 1,自由度 $\nu=n-1$.不确定度 u 的相对不确定度 $\sigma(u)/u$[$\sigma(u)$ 为不确定度 u 的不确定度]与自由度 ν 有如下关系:

$$\sigma(u)/u=1/\sqrt{2\nu} \tag{0-7-12}$$

可见 ν 愈大，$\sigma(u)/u$ 愈小，所以自由度反映了相应标准不确定度的可靠程度.合成标准不确定度 u_c 的自由度称为有效自由度，以 ν_{eff}表示.ν_{eff}的计算式为

$$\nu_{eff}=u_c^4\Bigg/\left(\frac{u_A^4}{\nu_A}+\sum\frac{u_{jB}^4}{\nu_{jB}}\right) \tag{0-7-13}$$

B 类不确定度的自由度 ν_B 可参照式(0-7-12)求出，其中 $\sigma(u)/u$ 可从 u 的信息来源分析，给一百分比.

工程技术中的多数一般测量要求最终给出概率约 0.95 的扩展不确定度 $U_{0.95}$：

$$U_{0.95}=t_{0.95}(\nu_{eff})\cdot u_c \tag{0-7-14}$$

式中 $t_{0.95}(\nu_{eff})$是自由度为 ν_{eff}的 t 分布的值，一般要从 t 分布数表中查出，在此为了方便给出 $t_{0.95}(\nu)$的拟合式，可从已知的自由度 ν 算出

$$t_{0.95}(\nu)\approx 1.959+\frac{2.406}{\nu-1.064}\quad(\nu\geqslant 3) \tag{0-7-15}$$

又当只有正态分布的随机误差时，$\bar{x}\pm t_{0.95}(\nu=n-1)\cdot s(\bar{x})$内包含正态分布总体平均值$\mu$ 的概率为 0.95.

习 题 三

1. 测量结果的标准偏差和不确定度有何差异？有何联系？
2. 不确定度和测量结果的误差有何联系？
3. 被测量的真值是不可确知的，但在测量之后对真值毫无所知吗？
4. 一个测量的不确定度，其 A 类评定部分明显小于 B 类评定部分，说明什么？如果相反又说明什么？
5. 求下列各式的不确定度传递(合成)公式：

(1) $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，

(2) $g=2s/t^2$，

(3) $a=\frac{d^2}{2s}\left(\frac{1}{t_2^2}-\frac{1}{t_1^2}\right)$.

§8 有 效 数 字

实验中总要记录很多数值，并进行计算，但是记录时应取几位，运算后应留几位，这是实验数据处理的重要问题，必须有一个明确的认识.

实验时处理的数值，应是能反映出被测量的实际大小的数值，即记录与运算后保留的应为能传递出被测量实际大小信息的全部数字，这样的数字称为有效数字. 但是实验中接触的数字，哪些是传递了被测量大小信息的有效数字应予保留，哪些不是而应舍弃呢？

1. 仪器读数、记录与有效数字

一般地讲，仪器上显示的数字均应读出(包括最后一位的估读)并记录. 例如，用一最小分度