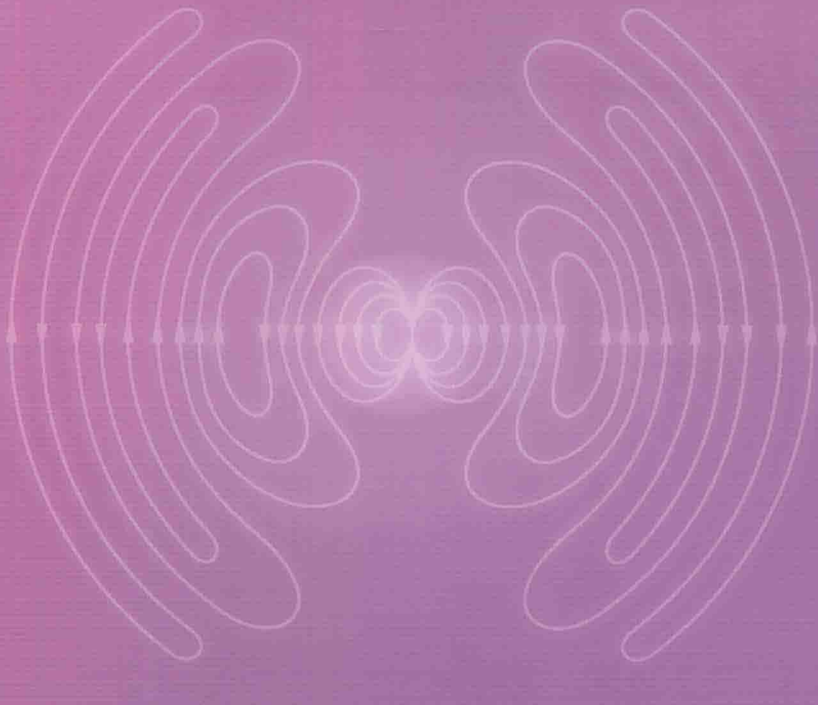
工业和信息化部“十二五”规划教材

电动力学

罗春荣　丁昌林　段利兵◎编著



中国工信出版集团
電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

工业和信息化部“十二五”规划教材

电 动 力 学

罗春荣　丁昌林　段利兵　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书是工业和信息化部“十二五”规划教材，是由罗春荣教授在西北工业大学应用物理系讲授“电动力学”课程多年的讲义基础上整理而成的。本书根据理工科高等院校应用物理系学生的需要安排授课内容，根据学生的认知规律安排课程内容顺序，力求将基本理论和概念叙述得清楚易懂，公式推导尽可能详细，对基本方法尽可能多一些例证加以说明。

本书内容分为 7 章，建议授课学时为 54～60 学时。第 0 章为数学预备知识，第 1 章为静电场，第 2 章为静磁场，第 3 章为电磁现象的普遍规律，第 4 章为电磁波的传播，第 5 章为电磁波的辐射，第 6 章为狭义相对论。与传统教材不同的是，前 3 章的内容做了顺序调整。另外，在第 1 章和第 4 章介绍了电流变液的介电极化模型和左手材料的奇异电磁性质。

本书可作为理工科高等院校应用物理类专业电动力学课程的教材或参考书，也可作为综合大学、师范院校物理类各专业的教材或参考书，还可供其他专业的社会读者学习、参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

电动力学 / 罗春荣，丁昌林，段利兵编著. —北京：电子工业出版社，2016.3
工业和信息化部“十二五”规划教材
ISBN 978-7-121-27883-9

I. ①电… II. ①罗… ②丁… ③段… III. ①电动力学－高等学校－教材 IV. ①O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 304144 号

策划编辑：王晓庆
责任编辑：王晓庆
印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司
装　　订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：17.25　字数：442 千字
版　　次：2016 年 3 月第 1 版
印　　次：2016 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：40.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

前　言

本书是根据我在西北工业大学应用物理系讲授“电动力学”课程讲义的基础上整理而成的。时光荏苒，弹指一挥间，讲授“电动力学”课程整整三十年了。从应用物理系招收的第一届学生到现在，每一届学生及许多院系的研究生都听过我讲授的“电动力学”课程。讲授电动力学这么多年，我由一个刚进入高校任教的研究生，变成了指导青年教师的老教师，充其量我只是一个教书匠。回顾自己的教师生涯，得到了许多老师与前辈的培养与教导。

学生时代我有幸在兰州大学物理系学习理论物理课程，量子力学由钱伯初先生讲授，热力学统计物理由汪志诚先生讲授，广义相对论由段一士先生讲授，电动力学由葛墨林先生讲授，聆听了这些国内知名教授的课程，为我的讲课风格奠定了良好的基础。

在讲授这门课程过程中，我一直在想，理工科院校应用物理类专业的“电动力学”应该介于理科院校物理类专业的“电动力学”和工科院校相关专业的“电磁场理论”两门课程之间。在教学实践中也做了一些尝试，根据应用物理专业学生的需要安排授课内容，根据学生的认知规律安排课程内容顺序，力求将基本理论和概念叙述得清楚易懂，公式推导尽可能详细，对基本方法尽可能多一些例证加以说明。2014 年这本教材被列入工业和信息化部“十二五”规划教材项目，借此机会将讲义整理出版，希望对学生学习这门课程有所收益，对青年教师讲授这门课程有所帮助。

全书内容分为 7 章，建议授课学时为 54～60 学时。第 0 章为电动力学的数学预备知识，第 1 章为静电场，第 2 章为静磁场，第 3 章为电磁现象的普遍规律，第 4 章为电磁波的传播，第 5 章为电磁波的辐射，第 6 章为狭义相对论。与传统教材不同的是，前 3 章内容做了顺序调整。另外，在第 1 章和第 4 章介绍了电流变液的介电极化模型和左手材料的奇异电磁性质。这两部分内容与赵晓鹏教授团队的研究方向相关，在此感谢他的一贯支持与帮助。

本书稿由丁昌林博士和段利兵副教授协助整理完成，丁昌林参与了第 0、2、3、4、5、6 章的整理工作，段利兵参与了第 1 章的整理工作，全书插图由段利兵、胡明娟绘制，全书的习题答案由宋坤博士整理。本书提供配套多媒体电子课件，请登录华信教育资源网（http://www.hxedu.com.cn）注册下载，也可联系本书编辑（wangxq@phei.com.cn）。

从 1992 年起，我参加了由西安交通大学吴寿锽先生主编的《电动力学》教材编写组，2001 年我参加了由西安交通大学吴百诗先生主编的《大学物理学》教材编写组。参与这两本教材的编写，使我积累了一些编写教材的知识和经验，我才有勇气和信心编写这本教材，在此向他们表示感谢。

本教材的编写得到了工业和信息化部人事教育司、西北工业大学教务处和理学院的大力支持，在此深表感谢。

由于水平所限，书中缺点和错误在所难免，恳请使用本书的读者批评指正。

罗春荣
于西安　西北工业大学
2016 年 2 月

目　　录

第 0 章　数学预备知识

电动力学的主要任务是计算电磁场的分布，需要用数学知识来描述电磁场的运动规律，本章介绍电动力学课程常用的数学知识，主要内容为矢量分析与场论基础及张量简介。

0.1　矢量的乘法

设有两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，它们在三个坐标轴上的分量分别是（A_1,A_2,A_3）和（B_1,B_2,B_3），可以记为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{B} &= B_1\boldsymbol{e}_1 + B_2\boldsymbol{e}_2 + B_3\boldsymbol{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} B_i\boldsymbol{e}_i\end{aligned} \tag{0.1.1}$$

式中，$\boldsymbol{e}_i$ 是对应坐标轴上的基矢。直角坐标系中，$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_z$，球坐标系中，三个基矢为 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_\phi$。

两个矢量的乘法包括点乘、叉乘和张量积三种。

0.1.1　矢量的点乘

两个矢量的点乘称为标量积，标量积是一个标量。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta \tag{0.1.2}$$

式中，A、B 分别表示矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的模，角度 θ 是矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 之间的夹角。两个矢量的标量积等于两个矢量的模相乘，再乘以两矢量夹角的余弦。矢量的点乘满足交换律、结合律和分配律。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \qquad \text{（交换律）} \tag{0.1.3}$$

$$(m\boldsymbol{A})\cdot(n\boldsymbol{B}) = mn\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \qquad \text{（结合律）} \tag{0.1.4}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \qquad \text{（分配律）} \tag{0.1.5}$$

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{0.1.6}$$

0.1.2　矢量的叉乘

两个矢量的叉乘称为矢量积，矢量积是一个矢量。

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = AB\sin\theta\,\boldsymbol{n} \tag{0.1.7}$$

矢量积的大小为 $AB\sin\theta$，刚好是一个以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的面积，矢量积的方

向与两个矢量所在的平面垂直，与矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 成右手螺旋关系，如图 0-1 所示。式中，$\boldsymbol{n}$ 表示从矢量 $\boldsymbol{A}$ 转向矢量 $\boldsymbol{B}$ 右手螺旋前进方向的单位矢量。

矢量积不满足交换律，但满足分配律

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{0.1.8}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{0.1.9}$$

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{e}_z \tag{0.1.10}$$

利用矢量的标量积与矢量积的定义可以得到两个很有用的公式。

1. 三矢量的混合积

三矢量的混合积

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) \tag{0.1.11}$$

这个混合积是一个标量，其几何解释是一个以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为棱边的平行六面体的体积，如图 0-2 所示。很显然，这个体积也可以用 $\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ 和 $\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$ 表示。三矢量的混合积对 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 具有轮换对称性质，即把三个矢量按循环次序轮换，其积不变。

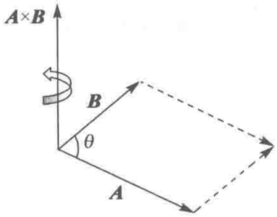


图 0-1 矢量的叉乘

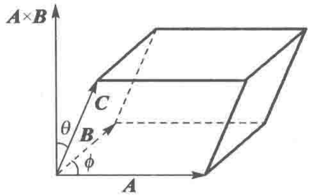


图 0-2 三矢量的混合积

如果只把其中两个矢量对调，其积相差一个负号。

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})==-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B})=-\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})=-\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) \tag{0.1.12}$$

2. 三矢量的矢量积

三矢量的矢量积即二重叉积，结果仍是一个矢量

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{0.1.13}$$

二重叉积的运算符号次序很重要，如：

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{0.1.14}$$

这是另一个与 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 完全不同的矢量。

0.1.3 矢量的张量积

两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 直接并列，中间没有任何运算符号，称为两个矢量的张量积，也称为并矢。

$$\mathscr{T}=\boldsymbol{AB}=\sum_{i=1,j=1}^{3}A_iB_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{0.1.15}$$

$\mathscr{T}$ 是一个二阶张量，关于张量的性质将在 0.7 节进行讨论。

0.2　标量场的梯度

一定物理量的空间分布称为场，例如，描述物质温度分布的温度场，描述流体速度分布的速度场，描述引力作用的引力场，描述电磁作用的电磁场等。如果这个物理量是标量，则称为标量场；如果这个物理量是矢量，则称为矢量场。例如，空间的温度、电磁学中的电势为标量场，电场强度、磁感应强度则是矢量场。为了定量研究标量场的空间分布特性，需要引入梯度的概念。

温度场描述的是空间各点的温度，$T(x,y,z)$ 是空间位置的函数，如果在这个标量场中，从某点出发经过 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 之后，温度 T 的变化为

$$\mathrm{d}T=\frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial T}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial T}{\partial z}\mathrm{d}z$$

因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$，上式也可以写成点积形式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}T&=\left(\frac{\partial T}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial T}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial T}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y+\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z)\\&=(\nabla T)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=|\nabla T||\mathrm{d}\boldsymbol{l}|\cos\theta\end{aligned}\tag{0.2.1}$$

式中

$$\nabla T=\frac{\partial T}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial T}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial T}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\tag{0.2.2}$$

∇T 称为温度场 T 的梯度，标量场的梯度是矢量。由式（0.2.1）可知，当 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 沿 ∇T 方向时，$\theta=0$，此时 $\mathrm{d}T$ 最大，因此，∇T 的数值表示场函数 T 在该点的最大变化率，∇T 的方向是场函数空间变化率最大的方向。标量场中数值相同的点构成等值面，即等值面的法线方向。∇ 是带有单位矢量的微分算符，只有作用于右方函数时才有意义。∇ 算符有两方面的作用，既具有方向性，又具有微分算符的性质。

在直角坐标系中

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\tag{0.2.3}$$

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\tag{0.2.4}$$

在柱坐标系中

$$\nabla=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\tag{0.2.5}$$

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\boldsymbol{e}_\phi+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\tag{0.2.6}$$

在球坐标系中

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} \tag{0.2.7}$$

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi \tag{0.2.8}$$

0.3 矢量场的散度和散度定理

0.3.1 矢量场的散度

为了定量研究矢量场的空间分布特性，需要引入散度和旋度的概念。

首先引入矢量场中通量的概念，对于一个矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$，通过空间某一曲面的通量为矢量场对该曲面的面积分，表达式为

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{0.3.1}$$

式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为曲面在点 $P(x,y,z)$ 处的微分面元。若曲面为封闭曲面，所围体积为 V，则矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 通过该闭合曲面的通量为

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{0.3.2}$$

对于闭合曲面而言，曲面的法向一般是指向闭合曲面的外部，因而流出该曲面的通量为正。对不同的矢量场，通量的物理意义不同，对电场强度 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$，电通量为

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

表示穿出闭合曲面 S 的电场线总数。矢量场的通量描述了某一空间范围内场线的发散和汇聚情况。

为了细致刻画矢量场中每一点的发散情况，引入单位体积的通量的极限

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{0.3.3}$$

式中，ΔV 为曲面 S 所包围的体积。式（0.3.3）表示矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在该点附近通过包围单位体积的封闭曲面的通量，它与曲面的形状无关，称为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在该点的散度，矢量场的散度是标量。如果 $\nabla \cdot \boldsymbol{F} > 0$，称为有源场；$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$，称为无源场；$\nabla \cdot \boldsymbol{F} < 0$，称这个场有“漏”或“汇”。下面给出矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在不同坐标系中散度的表示式。

在直角坐标系中

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{0.3.4}$$

在柱坐标系中

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{0.3.5}$$

在球坐标系中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(F_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} \tag{0.3.6}$$

0.3.2 散度定理

利用矢量场散度的定义，由式（0.3.3）可以得到

$$\oint_S\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}V \tag{0.3.7}$$

式（0.3.7）表明，矢量场 $\boldsymbol{F}$ 通过任意封闭曲面 S 的通量等于它所包围的体积 V 内的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 的体积分，称为高斯散度定理。利用此定理可将体积积分与面积积分互换。

0.4 矢量场的旋度和斯托克斯定理

0.4.1 矢量场的旋度

首先引入矢量场的环流量概念：矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 沿任一封闭曲线的线积分称为该矢量场的环流量。

$$\Gamma=\oint_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_L F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z \tag{0.4.1}$$

在场论中用环流量来描述矢量场的涡旋特性，但环流量的大小与曲线 L 所包围的面积有关，为了细微刻画矢量场中任意点处涡旋的性质，引入单位面积环流量的极限

$$(\nabla\times\boldsymbol{F})_n=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{0.4.2}$$

式（0.4.2）表示矢量场 $\boldsymbol{F}$ 沿法向方向的涡旋量，称为矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在该点的旋度的法向分量。式中，ΔS 为闭合曲线所包围的面积，$\boldsymbol{n}$ 为 ΔS 的正法线方向。

矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的旋度 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 仍是矢量，表示矢量场 $\boldsymbol{F}$ 在该点的最大涡旋量的方向和数值。如果 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}\neq 0$，称为有旋场，有旋场的场线是闭合曲线；$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0$，称为无旋场。

下面给出矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在不同坐标系中旋度的表示式。

在直角坐标系中

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{0.4.3}$$

在柱坐标系中

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial\phi}-\frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial F_r}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\phi+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}-\frac{\partial F_r}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{e}_z \tag{0.4.4}$$

在球坐标系中

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(F_\phi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi}-\frac{\partial(rF_r)}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\phi \tag{0.4.5}$$

0.4.2 斯托克斯定理

利用矢量场旋度的定义，由式（0.4.2）可以得到

$$\oint_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{0.4.6}$$

式（0.4.6）表明，矢量场 $\boldsymbol{F}$ 沿任一封闭曲线的环流等于其旋度 $\nabla\times\boldsymbol{F}$ 对以该曲线所围面积的面积分，称为斯托克斯定理。利用此定理可将面积积分与曲线积分互换。

0.5 亥姆霍兹定理

一个矢量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 按照其散度和旋度的取值情况，可以分为以下两类。

第一类为无旋场，满足这类矢量场的条件为

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = 0 \tag{0.5.1}$$

无旋场可以用一个标量场的梯度来表示为

$$\boldsymbol{A} = \nabla\varphi \tag{0.5.2}$$

无旋场又称为纵场。静电场就是无旋场。

第二类矢量场是无源场，满足这类矢量场的条件为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{0.5.3}$$

无源场可以用另一个矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的旋度来表示

$$\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{F} \tag{0.5.4}$$

无源场也称为横场。恒定磁场就是无源场。

根据无旋场和无源场的定义，可以得到以下两个恒等式。

（1）任何标量场的梯度均为无旋场

$$\nabla \times \nabla\varphi \equiv 0 \tag{0.5.5}$$

（2）任何矢量场的旋度均为无源场

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) \equiv 0 \tag{0.5.6}$$

一般的矢量场并不都是单纯的横场或纵场，其旋度和散度都可以不为零，因此，要确定矢量场的性质，需要同时知道其旋度和散度，不能任凭其中之一来确定矢量场的性质。同时还要注意，知道了散度和旋度，仅仅能确定矢量场函数满足的微分方程，要得到微分方程的唯一解，即确定矢量场的性质，还必须有适当的边界条件。

下面给出确定矢量场性质的亥姆霍兹定理。

（1）在无界区域中，一个矢量场可由该场在各处的散度值和旋度值，以及假定在无穷远处该场的散度值和旋度值为零的条件所决定。

（2）在有界区域中，要确定一个矢量场，除场在区域内各处的散度值和旋度值外，还必须要知道场在边界面上的法线分量值。

0.6　∇算符对函数的运算

0.6.1　∇算符的一般运算规则

在电磁场理论中，经常用到∇算符的运算，在场论中，∇算符具有三种作用方式：
（1）作用在标量函数 $\varphi(x,y,z)$ 上，$\nabla\varphi$ 表示标量场 $\varphi(x,y,z)$ 的梯度；
（2）通过点乘形式作用在矢量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 上，$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 表示矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的散度；
（3）通过叉乘形式作用在矢量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 上，$\nabla\times\boldsymbol{F}$ 表示矢量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的旋度。

在直角坐标系中，∇算符定义为

$$\nabla=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{0.6.1}$$

∇算符具有两个基本性质，既具有矢量的性质，又是微分算符。将它作用于场量进行运算时，既要注意它的微分作用，又要考虑它的矢量性。需要注意的是，∇算符的微分只对其右方的物理量作用，与物理量之间的顺序不能随意调换。例如，$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的散度，而 $\boldsymbol{F}\cdot\nabla$ 只是一个标量微分算符，即

$$\boldsymbol{F}\cdot\nabla=F_x\frac{\partial}{\partial x}+F_y\frac{\partial}{\partial y}+F_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{0.6.2}$$

可以证明，∇算符的运算公式如下，式中，ϕ、ψ 为标量场，$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{g}$ 表示矢量场。

$$\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi \tag{0.6.3}$$

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{f})=\nabla\phi\cdot\boldsymbol{f}+\phi\nabla\cdot\boldsymbol{f} \tag{0.6.4}$$

$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{f})=\nabla\phi\times\boldsymbol{f}+\phi\nabla\times\boldsymbol{f} \tag{0.6.5}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g}) \tag{0.6.6}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})=(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f}+(\nabla\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{f}-(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}-(\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g} \tag{0.6.7}$$

$$\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})=\boldsymbol{f}\times(\nabla\times\boldsymbol{g})+(\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g}+\boldsymbol{g}\times(\nabla\times\boldsymbol{f})+(\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} \tag{0.6.8}$$

$$\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla^2\phi \tag{0.6.9}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{f})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{f})-\nabla^2\boldsymbol{f} \tag{0.6.10}$$

式（0.6.3）用到了∇算符的微分性质，与对两个标量函数做微分运算的公式一致。

式（0.6.4）和式（0.6.5），∇算符求微分性质既要作用在标量 ϕ 上，又要作用在矢量 $\boldsymbol{f}$ 上，同时考虑到∇的矢量性质，点乘必须放在正确的位置上，例如，$(\nabla\cdot\phi)\boldsymbol{f}$ 没有意义，必须写成 $\nabla\phi\cdot\boldsymbol{f}$。

式（0.6.6），从微分运算看，既要对 $\boldsymbol{f}$ 作用，又要对 $\boldsymbol{g}$ 作用，所以应该有两项。该式相当于三矢量的混合积，用到混合积的运算法则。证明如下：

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})&=\nabla_f\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})+\nabla_g\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g})\\&=(\nabla_f\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\cdot(\nabla_g\times\boldsymbol{g})\\&=(\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g}-\boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g})\end{aligned}$$

式（0.6.7）与式（0.6.6）证明方法类似，需要用到两次叉乘公式和算符∇的微分性质。式（0.6.8）的∇算符需对$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$作用，再利用三矢量叉乘公式，可以得到最后结果。

式（0.6.9）和式（0.6.10）中，∇^2为拉普拉斯算符，在直角坐标系下表示为

$$\begin{aligned}\nabla^2=\nabla\cdot\nabla&=\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\\&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}\tag{0.6.11}$$

0.6.2 ∇算符的其他常用公式

1. ∇算符对复合函数的作用

如某标量函数$\phi(u)$，且$u=u(x,y,z)$，则有

$$\begin{aligned}\nabla\phi(u)&=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\phi(u)}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\phi(u)}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\phi(u)}{\partial z}=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\phi\partial u}{\partial u\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\phi\partial u}{\partial u\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\phi\partial u}{\partial u\partial z}\\&=\frac{\partial\phi}{\partial u}\nabla u\end{aligned}\tag{0.6.12}$$

同理可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{f}(u)=\nabla u\cdot\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial u}\tag{0.6.13}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{f}(u)=\nabla u\times\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial u}\tag{0.6.14}$$

2. ∇算符对$\boldsymbol{R}$及R的作用

这里给定$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=(x-x')\boldsymbol{e}_x+(y-y')\boldsymbol{e}_y+(z-z')\boldsymbol{e}_z$

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

$$\begin{aligned}\nabla R&=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial R}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial R}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{(x-x')}{R}\boldsymbol{e}_x+\frac{(y-y')}{R}\boldsymbol{e}_y+\frac{(z-z')}{R}\boldsymbol{e}_z\\&=\frac{\boldsymbol{R}}{R}\end{aligned}\tag{0.6.15}$$

一般情况下，有

$$\nabla R^n=nR^{n-2}\boldsymbol{R}\tag{0.6.16}$$

如果考虑算符∇'作用在R上，有以下规律

$$\begin{aligned}\nabla'R&=\frac{\partial R}{\partial x'}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial R}{\partial y'}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial R}{\partial z'}\boldsymbol{e}_z=-\frac{(x-x')}{R}\boldsymbol{e}_x-\frac{(y-y')}{R}\boldsymbol{e}_y-\frac{(z-z')}{R}\boldsymbol{e}_z\\&=-\frac{\boldsymbol{R}}{R}\end{aligned}\tag{0.6.17}$$

于是，有