数学中的循序逐增现象及其规律

循序逐增原理与数学的组合、排列及矩阵

边形数、棱锥体数及其三角形的循序逐增规律

正整数方幂方阵的循序逐增规律与费马定理

素数的循序逐增现象与素数若干问题

图的循序逐增现象与四色猜想命题

张尔光◎著

科学技术文献出版社
SCIENTIFIC AND TECHNICAL DOCUMENTATION PRESS

数学中的循序逐增现象及其规律

张尔光◎著

科学技术文献出版社
SCIENTIFIC AND TECHNICAL DOCUMENTATION PRESS
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

数学中的循序逐增现象及其规律/张尔光著. —北京：科学技术文献出版社，2015. 9

ISBN 978-7-5189-0642-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数学—文集 Ⅳ. ① 01-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 201508 号

数学中的循序逐增现象及其规律

策划编辑：曹沧晔　　责任编辑：曹沧晔　　责任校对：赵　瑷　　责任出版：张志平

出 版 者	科学技术文献出版社
地　　址	北京市复兴路 15 号　邮编 100038
编 务 部	(010)58882938，58882087(传真)
发 行 部	(010)58882868，58882874(传真)
邮 购 部	(010)58882873
官方网址	www. stdp. com. cn
发 行 者	科学技术文献出版社发行　全国各地新华书店经销
印 刷 者	北京天正元印务有限公司
版　　次	2016 年 1 月第 1 版　2016 年 1 月第 1 次印刷
开　　本	710×1000　1/16
字　　数	186 千
印　　张	16
书　　号	ISBN 978-7-5189-0642-0
定　　价	48.00 元

写在前面的话

张尔光

如果在10年前,有人问我:"什么叫'数学中的循序逐增现象'?"对此,我会羞愧地回答:"不知道。"在此书与读者见面后,如果还有人这样问我:"什么叫'数学中的循序逐增现象'?"对此,我仍会羞愧地回答:"我只知道它是数学中多个域的一种共同现象,我不能做到用规范的数学语言对它做出正确的解读。因为我是数学研究的一位兴趣者,并非是数学学者。"

我对数学的研究始于20世纪80年代中叶。初时只是对四色猜想、素数没有穷尽问题感兴趣,把对四色猜想、素数问题的研究作为充实自己业余生活的一种乐趣。30年来,在研究四色猜想命题的过程中,我发现了图的形成过程的循序逐增原理,接着发现了数学的组合、排列以及三角矩阵、正整数方幂方阵的循序逐增规律,不久又发现了素数的循序逐增现象及其规律,后来还发现了边形数、棱锥体数的循序逐增规律。

我认为,在本人发现(或说知道)的数学中的循序逐增现象中,最为奇妙的莫过于组合数学的循序逐增现象及其规律。这个奇妙,既体现在组合数表所隐藏的一系列的循序逐增规律竟有11条之多,给以笔者"横看成岭侧成峰"之感;还体现在自然数、奇数、平方数、金字塔形数等一系列的"数"的循序逐增现象,均可从组合数学的循序逐增规律中找

到答案，组合数学似乎是“数”的一盏“照明灯”。这个奇妙，更体现在组合数表是一张用一串串规律有序的数字编织成的没有穷尽的“数字网”，这张“网”虽然看不到尽头，但理之即清，有着纲举目张之感。

边形数、棱锥体数，是数学中一对上了年纪的“姐妹”。然而，经拓扑学的装点打扮，她们又焕发出了青春的英姿，前者如孔雀开屏那样娇艳美丽，后者好比发电风车那样纯朴大方。

正整数方幂方阵的循序逐增规律，同样是那样的绚丽多彩。它让我看到了正整数方幂方阵的内部世界(即方阵的各种数的循序逐增规律)，求证到正整数方幂方阵的循序逐增规律的定理(亦即“正整数方幂定理”)，弄清楚了 z^n 方阵、y^n 方阵、x^n 方阵三者之间的关系，看到了正整数次幂 >2 时“$x^n+y^n=z^n$”为什么不存在正整数解的奥秘。

素数的循序逐增现象及其规律，虽然有点扑朔迷离，但展现在我面前的它还是那样可爱动人。它一直与自然数的循序逐增现象同存相随，然而又若隐若现，有着自己的循序逐增“轨迹”。素数的循序逐增规律就是素数不可穷尽的规律。本人遵循循序逐增原理而创立的“235 自然数状态”，犹如瞭望的“窗口”。通过这个“窗口”，不仅可看到素数、孪生素数、四子孪生素数的踪影，而且还可看到有关素数各种猜想的走向的足迹。

图的形成过程的循序逐增原理，好比一根魔术棒，是它撩开了地图的复杂的“面纱”，让我看到了地图的结构模式是组合模式的“真面目”；是地图的组合模式没让图的色数与图的面数画上等号，让我明白图的色数随着图的相邻面的组合力的升增而升增之道理；是物体表面的全相邻力停住了图的相邻面的组合力循序逐增的脚步。是循序逐增原理帮我将物体表面的全相邻力、图的相邻面的组合力、图的仅需色数摆在同一条平行线上，求证到了“物体表面的图的仅需色数定理”，创立了验证这一定理的证明方法。

总而言之，一句话，本人的研究成果使我坚信数学中的循序逐增现

象是存在于数学王国之中。

为着充实自己的数学知识，我阅读了《发现数学原来数学这么有趣》(西奥妮·帕帕斯著，何竖芬译)、《数学史通论(第2版)》(李文林、邹建成、胥鸣伟等译)、《初等数论(Ⅲ)》(陈景润著)等书。本人认为，我国古代数学家杨辉创立的“杨辉三角”(“帕斯卡三角”同)，意大利数学家斐波纳契创立的“斐波纳契数”，苏格兰数学家约翰·纳皮尔创立的“纳皮尔骨棒”，我国数学家陈景润在《初等数论(Ⅲ)》提及的“$1^3+2^3+\cdots n^3=(1+2+\cdots+n)^2$”定理，《数学史通论(第2版)》说到的“边形数”、“锥棱体数”等，都是数学中的循序逐增现象，或是来自于数学中的循序逐增现象的发现。

鉴于本人的研究成果和数学家们对某个数学定理的创立，我认为，所谓“数学中的循序逐增现象”是指反映在数或量循着一种有序的规律而增升或扩延的数学现象。事实证明，这种现象确实存在于数学王国之中。我还认为，善于发现数学中的循序逐增现象，这是打开数学某个域的奥秘的“金钥匙”。假若你能发现数学某个域的循序逐增现象，并从中找到它的规律，求证到它的数学定理，那么，你就为丰富数学知识宝库贡献了自己的智慧。

2015年3月于广州

目　录
CONTENTS

循序逐增原理与数学的组合、排列及矩阵

摘要　本文根据“循序逐增”原理，论证了数学的组合、排列之间的关系，得出“循序逐增是组合、排列共有基本原理”的结论；发现了组合数表的奥秘及其规律，对组合数循序逐增的若干规律进行了证明，同时论证了组合数与自然数1、自然数、奇数、平方数、金字塔形数等数列之间的循序逐增关系，找到了组合、排列及若干数列的“源”和“流”。

关键词　循序逐增　组合　排列　三角矩阵

在数学中，组合、排列与矩阵有着密切联系，而组合、排列、矩阵与循序逐增原理更是密不可分。依照循序逐增原理，数学的组合数、排列数，均可以矩阵表达出来。

1.“循序逐增”是数学的组合、排列共有的基本原理

事实证明：循序逐增是数学的组合、排列中客观存在的基本原理。

1.1　循序逐增是组合的基本原理

例证1　C_n^2 的组合过程

图1－1是反映 C_n^2 组合过程的一个图表。从该图表看出，当组合元素仅有“1”1个元素时，不能组合为2个元素的组合；当组合元素增加“2”这个元素后，便产生了“12”这个组合；当组合元素增加“3”这个元

素后，便产生了"3"与"1"、"2"的组合，即增加了"13"、"23"2 个组合，使之为 3 个组合；当组合元素增加"4"这个元素后，便产生了"4"与"1"、"2"、"3"的组合，即增加了"14"、"24"、"34"3 个组合，使之为 6 个组合；当组合元素增加"5"这个元素后，便产生了"5"与"1"、"2"、"3"、"4"的组合，即增加了"15"、"25"、"35"、"45"4 个组合，使之为 10 个组合；当组合元素增加"6"这个元素后，便产生了"6"与"1"、"2"、"3"、"4"、"5"的组合，即增加了"16、26、36、46、56"5 个组合，使之为 15 个组合。可见，C_n^2 的组合过程是循序逐增的过程。

C_n^2	组合元素	C_n^2的组合情况	组合数
	1	不能组合为2个元素的组合	
C_2^2	1、2	12	1
C_3^2	1、2、3	12 13 23	3
C_4^2	1、2、3、4	12 13 23 14 24 34	6
C_5^2	1、2、3、4、5	12 13 23 14 24 34 15 25 35 45	10
C_6^2	1、2、3、4、5、6	12 13 23 14 24 34 15 25 35 45 16 26 36 46 56	15

图 1－1（C_n^2 组合过程反映图表）

例证 2　C_n^3 的组合过程

C_n^3	组合元素	C_n^3 的 组 合 情 况	组合数
	1	不能组合为3个元素的组合	
	1、2		
C_3^3	1、2、3	123	1
C_4^3	1、2、3、4	123 124 134 234	4
C_5^3	1、2、3、4、5	123 124 134 234 125 135 145 235 245 345	10
C_6^3	1、2、3、4、5、6	123 124 134 234 125 135 145 235 245 345 126 136 146 236 246 346 156 256 356 456	20

图 1－2（C_n^3 组合过程反映图表）

图 1－2 是反映 C_n^3 组合过程的一个图表。从该图表看出，当组合元素仅有“1”1 个元素和“1”、“2”2 个元素时，不能组合为 3 个元素的组合；当组合元素增至“1”、“2”、“3”3 个元素后，便产生了“123”这个组合；此起，当组合元素增加“4”这个元素后，便产生了“4”与“12”、“13”、“23”的组合，即增加了“124”、“134”、“234”3 个组合，使之为 4 个组合；当组合元素增加“5”这个元素后，便产生了“5”与“12”、“13”、“14”、“23”、“24”、“34”的组合，即增加了“125”、“135”、“145”、“235”、“245”、“345”6 个组合，使之为 10 个组合；当组合元素增加“6”这个元素后，便产生了“6”与“12”、“13”、“14”、“15”、“23”、“24”、“25”、“34”、“35”、“45”的组合，即增加了“126、136、146、156、236、246、256、346、356、456”10 个组合，使之为 20 个组合。可见，C_n^3 的组合过程是循序逐增的过程。

例证 3　C_n^4 的组合过程

C_n^4	组合元素	C_n^4 的组合情况	组合数
	1	不能组合为4个元素的组合	
	1、2		
	1、2、3		
C_4^4	1、2、3、4	1234	1
C_5^4	1、2、3、4、5	1234 1235 1245 1345 2345	5
C_6^4	1、2、3、4、5、6	1234 1235 1245 1345 2345 1236 1246 1256 1346 1356 1456 2346 2356 2456 3456	15

图 1－3（C_n^4 组合过程反映图表）

图 1－3 是反映 C_n^4 组合过程的一个图表。从该图表看出，当组合元素为“1、2、3”3 个元素前，不能组合为 4 个元素的组合；当组合元素增至

“1”、“2”、“3”、“4”4 个元素时，便产生了“1234”这个组合；此起，当组合元素增加“5”这个元素后，便产生了“5”与“123”、“124”、“134”、“234”的组合，即增加了“1235”、“1245”、“1345”、“2345”4 个组合，使之为 5 个组合；当组合元素增加“6”这个元素后，便产生了“6”与“123”、“124”、“125”、“134”、“135”、“145”、“234”、“235”、“245”、“345”的组合，即增加了“1236”、“1246”、“1256”、“1346”、“1356”、“1456”、“2346”、“2356”、“2456”、“3456”10 个组合，使之为 15 个组合。可见，C_n^4 的组合过程是循序逐增的过程。

现将例证 2 图 1－2 与例证 1 图 1－1、例证 3 图 1－3 与例证 2 图 1－2 作比对，可发现，前后组合在组合元素上存在循序逐增现象。

从例证 2 图 1－2 与例证 1 图 1－1 的比对中看出，图 1－2 中 C_n^3 的各组 3 个元素的组合，是在图 1－1C_n^2 的各组 2 个元素的组合基础上增添 1 个元素后所形成的组合：C_3^3 的“123”组合，是在 C_2^2 的“12”组合基础上增添“3”这个元素后形成的组合；C_4^3 的 4 组 3 个元素的组合，是在 C_3^2 的 3 组 2 个元素的组合基础上增添“4”这个元素后形成的组合；C_5^3 的 10 组 3 个元素的组合，是在 C_4^2 的 6 组 2 个元素的组合基础上增添“5”这个元素后形成的组合；C_6^3 的 20 组 3 个元素的组合，是在 C_5^2 的 10 组 2 个元素的组合基础上增添“6”这个元素后形成的组合；总之，图 1－2 中 C_n^3 的各组 3 个元素的组合，是在图 1－1C_n^2 的各组 2 个元素的组合基础上增添 1 个元素后所形成的组合。这个过程，不仅仅是组合元素的增添，而且组合的组数也随之增加。可见，C_n^3 的 3 个元素的组合与 C_n^2 的 2 个元素的组合之间存在循序逐增的关系。

再从例证 3 图 1－3 与例证 2 图 1－2 的比对中也可看出，图 1－3 中 C_n^4 的各组 4 个元素的组合，均是在图 1－2C_n^3 的各组 3 个元素的组合基础上增添 1 个元素后形成的组合。这不仅仅是组合元素的增添，而且组合的组数也随之增加。从中证明，C_n^4 的 4 个元素的组合与 C_n^3 的 3 个

元素的组合之间存在循序逐增的关系。

综例证 1、例证 2、例证 3 的证明，可得结论，C_n^m 的组合过程是循序逐增的过程，这个循序逐增的过程，不仅体现在 n 的量上，在 m 不变的情况下，组合的组数随着 n 的增加而增加，而且也体现在 m 的量上，在 $n>m$ 的前提下，C_n^m 与 C_n^{m+1} 之间也存在循序逐增的关系。可见，循序逐增是 C_n^m 组合的基本原理。

1.2　循序逐增也是数学的排列的基本原理

例证 1　P_n^2 的排列过程

图 1－4 是反映 P_n^2 排列过程的图表。从该图表看出，当排列元素仅有“1”1 个元素时，不能形成 2 个元素的排列；当排列元素增至“1、2”2 个元素时，便产生了“12”、“21”这 2 个排列，排列数为 1 ×2 =2；当排列元素增加“3”这个元素后，便产生了“3”与“1”、“2”的排列，即增加了“13”、“31”、“23”、“32”4 个排列，使之为 6 个排列，排列数为 2 ×3 =6；当排列元素增加“4”这个元素后，便产生了“4”与“1”、“2”、“3”的排列，即增加了“14”、“41”、“24”、“42”、“34”、“43”6 个排列，使之为 12 个排列，排列数为 3 ×4 =12；当排列元素增加“5”这个元素后，便产生了“5”与“1”、“2”、“3”、“4”的排列，即增加了“15”、“51”、“25”、“52”、“35”、“53”、“45”、“54”8 个排列，使之为 20 个排

P_n^2	排列元素	P_n^2 的 排 列 情 况	排列数
	1	不能形成2个元素的排列	
P_2^2	1、2	12 21	2
P_3^2	1、2、3	12 21 13 31 23 32	6
P_4^2	1、2、3、4	12 21 13 31 23 32 14 41 24 42 34 43	12
P_5^2	1、2、3、4、5	12 21 13 31 23 32 14 41 24 42 34 43 15 51 25 52 35 53 45 54	20

图 1－4（P_n^2 排列过程反映图表）

P_n^3	排列元素	P_n^3 的 排 列 情 况	排列数
	1	不能形成2个元素的排列	
	1、2		
P_3^3	1、2、3	123 231 312 213 132 321	6
P_4^3	1、2、3、4	（续上） 124 241 412 214 142 421 134 341 413 314 143 431 234 342 423 324 243 432	24
P_5^3	1、2、3、4、5	（续上） 125 251 512 215 152 521 135 351 513 315 153 531 145 451 514 415 154 541 235 352 523 325 253 532 245 452 524 425 254 542 345 453 534 435 354 543	60

图 1－5（P_n^3 排列过程反映图表）

列，排列数为 4×5=20。可见，P_n^2 的排列过程是循序逐增的过程。

例证 2　P_n^3 的排列过程

图 1-5 是反映 P_n^3 排列过程的图表。从该图表看出，当排列元素仅有"1"1 个元素和"1、2"2 个元素时，不能形成 3 个元素的排列；当排列元素增至"1、2、3"3 个元素时，便产生了"123"、"231"、"312"、"213"、"132"、"321"这 6 个排列，排列数为 1×2×3=6；当排列元素增加"4"这个元素后，便产生了有"4"这个元素的 18 组排列（详见图 1-5），使排列组数增至 24，排列数为 2×3×4=24；当排列元素增加"5"这个元素后，便产生了有"5"这个元素的 36 组排列，使排列组数增至 60，排列数为 3×4×5=60。可见，P_n^3 的排列过程是"循序逐增"的过程，排列数随着 n 的量增加而增加。

现将例证 2 图 1-5P_n^3 的排列与例证 1 图 1-4P_n^2 的排列进行比对，可看出，图 1-5P_n^3 的各组 3 个元素的排列，均是在图 1-4P_n^2 的各组 2 个元素的排列基础上增添 1 个元素后形成的排列：图 1-5 的 P_3^3 的 6 组 3 个元素的排列，是在图 1-4 的 P_2^2 的 2 组 2 个元素排列基础上增添"3"这个元素后形成的排列；图 1-5 的 P_4^3 的 24 组 3 个元素的排列，是在图 1-4 的 P_3^2 的 6 组 2 个元素排列基础上增添"4"这个元素后形成的排列；图 1-5 的 P_5^3 的 60 组 3 个元素的排列，是在图 1-4 的 P_4^2 的 12 组 2 个元素排列基础上增添"5"这个元素后形成的排列。可见，P_n^2 与 P_n^3，在排列上，P_n^3 的 3 个元素的排列与 P_n^2 的 2 个元素的排列之间存在循序逐增的关系。这不仅仅是排列元素的逐增，而且其排列组数也随之逐增。

C_n^2	
	1
C_2^2	
	1 1
C_3^2	
	1 1 1
C_4^2	
	1 1 1 1
C_5^2	
	1 1 1 1 1
C_6^2	
	1 1 1 1 1 1
C_7^2	
	1 1 1 1 1 1 1
C_8^2	
…	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

图 1-6（C_n^2 的三角矩阵）

综例证 1、例证 2 的证明，可得结论，数学的排列过程是循序逐增的

过程,循序逐增是 P_n^m 排列的基本原理。

2. 数学的组合数、排列数均可以矩阵表达

2.1　数学的组合数均可表达为由"1"组成的三角矩阵

数学中的组合,不论其取出元素的 $m(>1)$ 是多少,其任何一个取出 m 元素的组合,均为 C_m^m 组合。因"$C_m^m=1$",又新增元素与前有元素的组合是循序逐增的过程,所以,任何一个组合数均是由"1"有序组成的三角矩阵。如图 1－6,是 C_n^2 的三角矩阵。从该图看出,矩阵中的"1"在量上是"逐 1"增加的。

C_n^3	
C_3^3	1
C_4^3	1 1 1
C_5^3	1 1 1 1 1 1
C_6^3	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
C_7^3	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
…	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

图 1－7(C_n^3 的三角矩阵)

图 1－7 是 C_n^3 的三角矩阵。从该图看出,矩阵中的"1"在量上是循着 2、3、4……逐增的。

C_n^4	
C_4^4	1
C_5^4	1 1 1 1
C_6^4	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
C_7^4	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
…	⋮ ⋮

图 1－8(C_n^4 的三角矩阵)

图 1－8 是 C_n^4 的三角矩阵。从该图看出,矩阵中的"1"在量上是循

着 3、6、10……逐增的。

其实，C_n^5、C_n^6……的三角矩阵中的“1”均是循着它的规律逐增的。正因为数学的组合存在这一规律，从中又发现了组合数与组合数之间的关系，即遵循循序逐增的原理，可将三角矩阵中的“1”通过逐 1 和逐数相加的方法而转换为另一个三角矩阵来表达。如图 1－9、图 1－10 所示，是 C_n^2、C_n^3、C_n^4、C_n^5、C_n^6、C_n^7 三角矩阵，是以 C_n^2 的三角矩阵为模型，依照循序逐增的原理，通过逐 1 和逐数相加的方法而得来的。

n	C_n^2			C_n^3			C_n^4		
	三角矩阵	逐增数	组合数	三角矩阵	逐增数	组合数	三角矩阵	逐增数	组合数
2	1	1	1						
3	1 1	2	3	1	1	1			
4	1 1 1	3	6	1 2	3	4	1	1	1
5	1 1 1 1	4	10	1 2 3	6	10	2 2	4	5
6	1 1 1 1 1	5	15	1 2 3 4	10	20	3 4 3	10	15
7	1 1 1 1 1 1	6	21	1 2 3 4 5	15	35	4 6 6 4	20	35
8	1 1 1 1 1 1 1	7	28	1 2 3 4 5 6	21	56	5 8 9 8 5	35	70
9	1 1 1 1 1 1 1 1	8	36	1 2 3 4 5 6 7	28	84	6 10 12 12 10 6	56	126
10	1 1 1 1 1 1 1 1 1	9	45	1 2 3 4 5 6 7 8	36	120	7 12 15 16 15 12 7	84	210

图 1－9（C_n^2、C_n^3、C_n^4 的三角矩阵图）

n	C_n^5			C_n^6			C_n^7		
	三角矩阵	逐增数	组合数	三角矩阵	逐增数	组合数	三角矩阵	逐增数	组合数
2									
3									
4									
5	1	1	1						
6	2 3	5	6	1	1	1			
7	3 6 6	15	21	3 3	6	7	1	1	1
8	4 9 12 10	35	56	6 9 6	21	28	3 4	7	8
9	5 12 18 20 15	70	126	10 18 18 10	56	84	6 12 10	28	36
10	6 18 24 30 30 21	126	252	15 30 36 30 15	126	210	10 24 30 20	84	120

图 1－10（C_n^5、C_n^6、C_n^7 的三角矩阵图）

现将图 1－9、图 1－10 的 C_n^2、C_n^3、C_n^4、C_n^5、C_n^6、C_n^7 的“逐增数”和“组合数”汇编为一个表，见图 1－11。

n	C_n^2		C_n^3		C_n^4		C_n^5		C_n^6		C_n^7	
	逐增数	组合数	逐增数	组合数	逐增数	组合数	逐增数	组合数	逐增数	组合数	逐增数	组合数
2	1	1										
3	2	3	1	1								
4	3	6	3	4	1	1						
5	4	10	6	10	4	5	1	1				
6	5	15	10	20	10	15	5	6	1	1		
7	6	21	15	35	20	35	15	21	6	7	1	1
8	7	28	21	56	35	70	35	56	21	28	7	8
9	8	36	28	84	56	126	70	126	56	84	28	36
10	9	45	36	120	84	210	126	252	126	210	84	120

图 1－11（C_n^2 至 C_n^7“逐增数”、“组合数”的统计表）

图 1－11 是 C_n^2 至 C_n^7 的“逐增数”、“组合数”的统计表。将前后纵列的数字进行比对，就会发现一种有趣的循序逐增的规律。从图 1－11 看出，C_n^2 的“组合数”则是下一栏 C_n^3 的“逐增数”；C_n^3 的“组合数”则是下一栏 C_n^4 的“逐增数”；C_n^4 的“组合数”则是下一栏 C_n^5 的“逐增数”；C_n^5 的“组合数”则是下一栏 C_n^6 的“逐增数”；C_n^6 的“组合数”则是下一栏 C_n^7 的“逐增数”。同理，C_n^7 之后的“组合数”均是如此。依照归纳法，可得此定律：C_n^m 的“组合数”则是下一栏 C_n^{m+1} 的“逐增数”，C_n^{m+1} 的“组合数”是为 C_n^m 的“组合数”的累加得数。可见，在数学的组合中，循序逐增的基本原理十分凸显。

2.2　数学的排列数也可表为三角矩阵

图 1－12 是 P_n^2 的排列数的三角矩阵。从该矩阵看出，它是由“2”组成的三角矩阵。其实，矩阵中的这个“2”，乃是取出 2 个元素的“2”的排列数，即“1 × 2 = 2”。而“2”的排放，是遵循循序逐增的原理来进行的有序排放。

P_n^2

P_2^2　2

P_3^2　2 2

P_4^2　2 2 2

P_5^2　2 2 2 2

P_6^2　2 2 2 2 2

P_7^2　2 2 2 2 2 2

P_8^2　2 2 2 2 2 2 2

…　⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

图 1－12（P_n^2 的三角矩阵）

现将 P_n^2 的三角矩阵与前文图 1－6C_n^2 的三角矩阵相比较，就会发现 P_n^2 的三角矩阵的“2”的排放，与 C_n^2 的三角矩阵的“1”的排放相对应，这也就是说，P_n^2 的排列数与 C_n^2 的组合数存在这样的关系，即：$P_n^2 = C_n^2 \times (1 \times 2)$，亦即：$P_n^2 = C_n^2 \times 2!$。

图 1－13 是 P_n^3 的排列数的三角矩阵。从该矩阵看出，它是由“6”组成的三角矩阵。其实，矩阵中的这个“6”，乃是取出 3 个元素的“3”的排列数，即“1 ×2 ×3 =6”，而“6”的排放，是遵循循序逐增的原理来进行的有序排放。

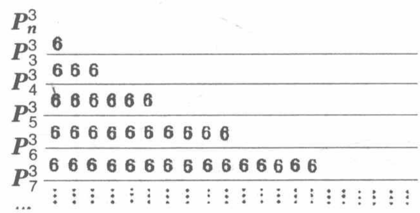

图 1－13（P_n^3 的三角矩阵）

现将 P_n^3 的三角矩阵与前文图 1－7C_n^3 的三角矩阵相比较，就会发现 P_n^3 的三角矩阵的“6”的排放，与 C_n^3 的三角矩阵的“1”的排放相对应，这也就是说，P_n^3 的排列数与 C_n^3 的组合数存在这样的关系，即：$P_n^3 = C_n^3 \times (1 \times 2 \times 3)$，亦即：$P_n^3 = C_n^3 \times 3!$。

全排列数也可表为三角矩阵，见图 1－14。从图 1－14 看出，全排列数的三角矩阵也是循序逐增的。

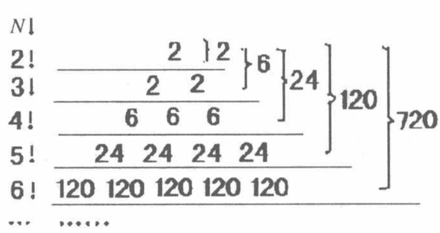

图 1－14（全排列数的三角矩阵）

2.3　组合数与排列数之间的关系

从图 1－12、图 1－13 的证明中可知，排列数与组合数有着密切联系。已知：