高二

代数试卷

全学年

配人教版课本

代数

北京教育出版社

高二代数试卷 （全学年）
配人教版课本
GAOERDAISHUSHIJUAN (QUANXUENIAN)
《高中数学试卷》编写组 编
*
北京教育出版社出版
（北京北三环中路6号）
邮政编码:100011
北京出版社总发行
新 华 书 店 经 销
北京宏伟胶印厂印刷
*
787×1092毫米 16开本 8.5印张 200 000字
1998年5月第1版 1998年5月第1次印刷
印数 1—10000册
ISBN 7-5303-1426-2
G·1401 定价:8.50元

出 版 说 明

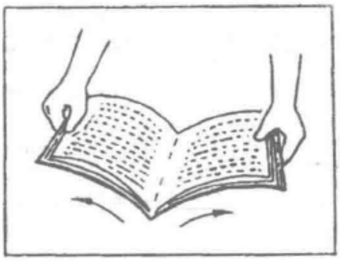
为了切实帮助初高中各年级学生牢固地掌握基础知识，检测他们综合运用知识的能力和水平，提高应试能力，丰富应试经验，我社邀请了北京人大附中、北大附中、清华附中、师大附中、八中、北京实验中学及四中等重点中学有丰富教学经验与考试命题经验的部分特、高级教师，以国家教委颁布的中学教学大纲和现行人民教育出版社教材为依据，编写了这套试卷。这些试题都是从多年教学实践中反复筛选出来的，质量高、科学性强，体现教学要求比较准确．因而受到普遍欢迎。

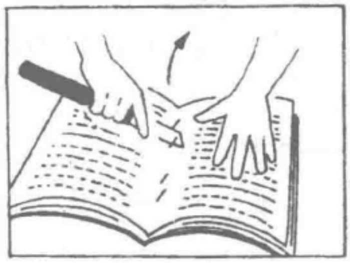
本试卷共有 28 个测试，上学期 14 个测试，其中包括一个期中测试和 1 个期末测试；下学期 14 个测试，其中包括一个期中测试和 1 个期末测试。试卷的编制特别注重在考查知识的同时从多角度、多层次考查各种数学能力、方法。应用此卷可以引导学生学习数学的正确思路，可以检测学生在数学知识、能力、方法各方面的漏洞，及时补缺，提高学习效率。

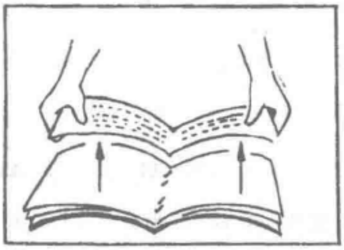
为了便于学生携带、使用，本试卷用 16 开本形式装订，按 8 开本使用。使用时，从中间打开，依次分为试卷一、二、三、……，答案附在最后。

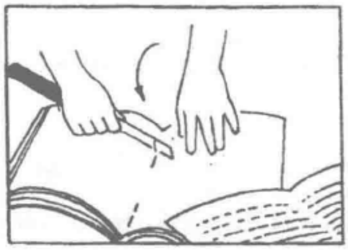
编辑出版这套试卷由于时间紧，水平有限，缺点错误在所难免，恳请读者批评指正。

使用说明


1．从中间打开试卷


2．撬开订书钉

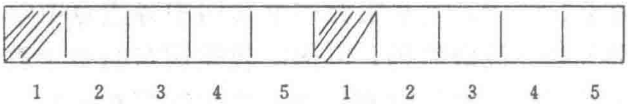

3．取出一份试卷


4．订书钉放回原位

（2）1，2，3，4 排首位的五位数共有 $4P_4^4=96$（个）.

5 排首位，1 排 2 位的五位数共有 6 个．51234，51243，51324，51342，51423，51432，所以第 100 个数是 51342.

16. 解 画出简单的示意图.



可知甲、乙两人只有 5 对位子可坐，故有 $5P_2^2P_8^8=403200$（种）

17. 解 （1）$\because x$ 的系数为 $m+2n=11$，$\therefore m=11-2n$.

又 x^2 的系数为 $C_m^2+4C_n^n=\frac{m(m-1)}{2}+4\frac{n(n-1)}{2}=4n^2-23n+55=4\left(n-\frac{23}{8}\right)^2+\frac{351}{16}$.

$\because$ $n\in N$，$\therefore$ 当 $n=3$ 时，x^2 的系数取得最小值 22.

（2）$\because$ $n=3$，$\therefore$ $m=5$. $\therefore$ x^3 的系数为 $C_5^3+8C_3^3=18$.

18. 解 $\because$ a, b, c, d 是 $(x+y)^n$ 的展开式中相邻四项二项式系数，所以可设 $a=C_n^{k-2}$，$b=C_n^{k-1}$，$c=C_n^k$，$d=C_n^{k+1}$，$\therefore$ $\frac{2b}{b+c}=\frac{2C_n^{k-1}}{C_n^{k-1}+C_n^k}=\frac{2C_n^{k-1}}{C_{n+1}^k}$

$=2\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\cdot\frac{k!(n-k+1)!}{(n+1)!}=\frac{2k}{n+1}$.

$\therefore$ $\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}=\frac{C_n^{k-2}}{C_n^{k-2}+C_n^{k-1}}+\frac{C_n^k}{C_n^k+C_n^{k+1}}=\frac{C_n^{k-2}}{C_{n+1}^{k-1}}+\frac{C_n^k}{C_{n+1}^{k+1}}=\frac{n!}{(k-2)!(n-k+2)!}\cdot$

$\frac{(k-1)!(n+2-k)!}{(n+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}=\frac{k-1}{n+1}+\frac{k+1}{n+1}=\frac{2k}{n+1}$.

$\therefore$ $\frac{2b}{b+c}=\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}$.

设第 $r+1$ 项含 a^3. 则 $T_{r+1}=(-1)^r C_n^r a^{-\frac{1}{4}(n-r)} a^{\frac{2}{3}}=(-1)^r C_n^r a^{-\frac{n}{4}+\frac{11}{12}r}=(-1)^r C_{10}^r a^{-\frac{10}{4}+\frac{11}{12}r}$.

由已知 $-\frac{10}{4}+\frac{11r}{12}=3$，$\therefore\ r=6$.

所求项为 $T_7=210a^3$.

13. **解** 设系数最大的项是第 $r+1$ 项，则 $\begin{cases} C_{12}^r 2^r \geqslant C_{12}^{r-1} 2^{r-1}, \\ C_{12}^r 2^r \geqslant C_{12}^{r+1} 2^{r+1}, \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(12-r+1)\geqslant r, \\ 2(12-r)\leqslant r+1. \end{cases}$

解得 $\frac{23}{3}\leqslant r\leqslant\frac{26}{3}$，又 $r\in N$. $\therefore\ r=8$.

所以 $(x+2)^{12}$ 展开式系数最大的项是 $T_9=C_{12}^8 x^4 2^8=126720x^4$.

14. **解** 设原式 $=M$，则 $9^2M+C_6^0+C_6^1 9=(9+1)^6$. $\therefore\ M=\frac{10^6-54-1}{81}=12345$. 所以原式 $=12345$.

测试 13 二项定理应用、组合数性质

一、1. D. 2. B. 3. A. 4. A. 5. C.

二、6. 5. 7. 33. 8. -1. 9. 210. 10. 4351. 11. $m2^{m-1}$.

三、12. **证明** $\because \left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n$.

又 $n\geqslant 2$，$C_n^i\left(\frac{1}{n}\right)^i>0$，$(n\geqslant 2)$，$\therefore\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+C_n^1\frac{1}{n}=2$.

13. **证明** 原式 $=9^{n+1}-8n-9=(8+1)^{n+1}-8n-9$

$=8^{n+1}+C_{n+1}^1 8^n+C_{n+1}^2 8^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^{n-1}8^2+C_{n+1}^n 8+C_{n+1}^{n+1}-8n-9$

$=64[8^{n-1}+C_{n+1}^1 8^{n-2}+\cdots+C_{n+1}^{n-1}]+8(n+1)+1-8n-9$

$=64[8^{n-1}+C_{n+1}^1 8^{n-2}+\cdots+C_{n+1}^{n-1}]$.

又 8^i，C_{n+1}^k 均为整数，$\therefore\ 8^{n-1}+C_{n+1}^1 8^{n-2}+\cdots+C_{n+1}^{n-1}\in Z$，

$\therefore\ 64\mid 3^{2n+2}-8n-9$.

14. **解** 原式 $=nx[C_{n-1}^0(1-x)^{n-1}+C_{n-1}^1 x(1-x)^{n-2}+\cdots+C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-1-k}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}]$

$=nx(x+1-x)^{n-1}=nx$.

测试 14 期末试题

一、1. B. 2. C. 3. C. 4. C. 5. A. 6. D. 7. C. 8. C. 9. C.

10. D.

二、11. 36. 12. 33. 13. 252；-252；210. 14. 7.

三、15. **解** (1) 1，2 排首位的比 32154 小，共有：$2P_4^4=48$；31 排前两位的比 32154 小，共有 $P_3^3=6$；321 排前三位的共有两个数 32145，32154；所以 32154 是第 56 个数.

一、1. A.　2. D.　3. B.　4. C.

二、5. $k=\pm 2\sqrt{2}$.　6. $x_1=2$，$x_2=-2-i$.　7. 6.　8. 原式$=2\left(x-\frac{3+\sqrt{23}i}{4}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{23}i}{4}\right)$.

三、9. **解**　设 $z=x+yi$（x，$y\in R$）　则$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\(x+1)^2+(y+\sqrt{3})^2=16,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\y=\sqrt{3},\end{cases}$

$\therefore\ z=1+\sqrt{3}i$.

10. **解**　(1) AB 方程为 $x+y=1$，$x\in[0,1]$，$\therefore\ a+b=1.a\in[0,1],b\in[0,1]$.

(2) 设轨迹上任意一点为 $M(x,y)$，$\therefore\ x+yi=2(a+bi)^2-1-i$

$=[2(a^2-b^2)-1]+(4ab-1)i$.

$\therefore\begin{cases}x=2(a^2-b^2)-1,\\y=4ab-1,\end{cases}$　又 $a+b=1$　$\therefore\ \begin{cases}x=2(a-b)-1=4a-3,\\y=-(2a-1)^2,\end{cases}\Rightarrow(x+1)^2=-4y.$

$x\in[-3,1]$.

11. **解**　(1) 设原方程有实根 x. $\therefore\ x^2-(2\mathrm{tg}\theta)x-xi=2+i$

$\therefore\ \begin{cases}x^2-(2\mathrm{tg}\theta)x=2,\\x=-1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1,\\\mathrm{tg}\theta=\frac{1}{2}.\end{cases}$ $\therefore\ x=1$，$\theta=k\pi+\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$.（$k\in Z$）

(2) 假设此方程有纯虚根，设为 $x=bi$（$b\in R$，且 $b\neq0$）. $\therefore\ -b^2+b-b(2\mathrm{tg}\theta)i=2+i$，$\therefore\ -b^2+b=2$ 有实根. 而 $b^2-b+2=0$ 无实根，所以假设不成立. 故无纯虚根.

四、12. D.　13. -1.　14. $a=1$，$b=\sqrt{3}$.

测试 7　期中试题

一、1. A.　2. B.　3. A.　4. A.　5. C.　6. A.　7. D.　8. B.　9. D.

10. A.

二、11. $\pm(2+3i)$　12. i.　13. $m=1-i$；$|m|=\sqrt{2}$；$\arg m=\frac{7\pi}{4}$.　14. $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

三、15. **解**　设 $z=x+yi$（x，$y\in R$），$\therefore\ (\sqrt{x^2+y^2}-x)+yi=1+i$.

$\therefore\ \begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}-x=1,\\y=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\y=1.\end{cases}$ $\therefore\ z=i$.

$\therefore\ x^3=i$，$\therefore\ x_1=-i$，$x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$，$x_3=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$.

16. **解**　$\because\ z_1=2+i$，$z_2=2(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\therefore\ z_1+z_2^2=(2+4\cos2\theta)+(1+4\sin2\theta)i$

$\therefore|z_1+z_2^2|^2=21+16\cos2\theta+8\sin2\theta=21+8\sqrt{5}\sin(2\theta+\mathrm{arctg}2)$.

∴ $|z_1+z_2|\geqslant\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2}=|r_1-r_2|\geqslant r_1-r_2$.

∴ $|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

测试 5　复数的几何表示

一、1. B.　2. B.　3. A.　4. D.

二、5. 以 (−4，3) 为圆心，2 为半径的圆.　6. 垂直.　7. $d_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2}}|\sqrt{5}+\sqrt{10}|$.　8. $-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$；$\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$.

三、9. (−1，−4)，[9，0).　10. **解**　(1) 由已知得 $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2-2\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+4=0$，解得 $\frac{z_2}{z_1}=1\pm\sqrt{3}i=2(\cos60°\pm i\sin60°)$

$\therefore|z_2|=2|z_1|=8$. OP 与 OQ 夹角为 60°. $\therefore S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}4\times8\times\sin60°=8\sqrt{3}$.

(2) 设 $z_1=x_1+y_1i$，$(x_1,\ y_1\in R,\ x_1^2+y_1^2=16)$.

$\therefore|(z_1+1)^2(z_1-2)|=|z_1+1|^2|z_1-2|=[(x_1+1)^2+y_1^2]\sqrt{(x_1-2)^2+y_1^2}=\sqrt{(17+2x_1)^2(20-4x_1)}$

$\leqslant\sqrt{\left(\frac{17+17+20}{3}\right)^3}=54\sqrt{2}$.

11. **解**　由 $|\alpha-3|=1$ 可知 α 在以 3 为圆心 1 为半径的圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 上运动.

又　$\beta=-(1-i)\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\alpha$,

$\therefore S=\frac{1}{2}|\alpha|\sqrt{2}|\alpha|\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{2}|\alpha|^2$.

由图可知 $|\alpha|_{\min}=2$，$|\alpha|_{\max}=4$. $\therefore S_{\max}=8$，$S_{\min}=2$.

四、12. C.　13. 抛物线 $y^2=4(x-2)$.　14. **解**　设点 z_1，z_2 和 z 对应的复数分别为 z_1，z_2 和 z. 如图 5-1

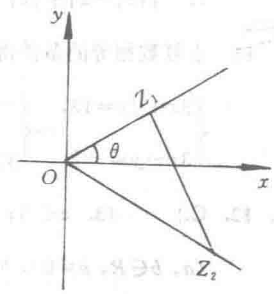


图 5-1

设 $z_1=r_1(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z_2=r_2(\cos\theta-i\sin\theta)$,

根据重心定义，得

$3z=z_1+z_2=(r_1+r_2)\cos\theta+i(r_1-r_2)\sin\theta$. ∴　$|3z|^2=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos2\theta$.

又　$r_1r_2\sin2\theta=2S$，∴　$|3z|^2=r_1^2+\frac{4S^2}{r_1^2\sin^2 2\theta}+4S\operatorname{ctg}2\theta\geqslant\frac{4S}{\sin2\theta}+4S\operatorname{ctg}2\theta=4S\operatorname{ctg}\theta$.

∴　当 $r_1^2=\frac{4S^2}{r_1^2\sin^2 2\theta}$，即 $r_1=r_2=\sqrt{\frac{2S}{\sin2\theta}}$ 时，

$|z|_{\min}=\frac{2}{3}\sqrt{S\operatorname{ctg}\theta}$.

测试 6　复数与方程

答案与提示(下学期)

测试 1 复数概念

一、1. B. 2. B. 3. D. 4. B.

二、5. $x=2$ 或 $-\frac{1}{2}$.

6. $-\sqrt{3}<m<-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}<m<\sqrt{3}$.

7. $1+i$；i；-1.

8. $\theta=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$；$\theta=k\pi-\text{arctg}2$；$(k\in Z)$ $\theta=k\pi+\frac{\pi}{4}$ $(k\in Z)$.

三、9. (1) $m=6$ 或 -1 时，$z\in R$；(2) $m\neq6$ 且 $m\neq-1$ 时 z 为虚数；

(3) $m=4$ 时，z 为纯虚数；

(4) $-1<m\leqslant4$ 时，z 的对应点在复平面的左半部且包括虚轴.

10. $\because$ $||z|-2|+|\bar{z}|-2=0\Leftrightarrow||z|-2|=2-|\bar{z}|\Leftrightarrow||z|-2|=2-|z|$，$\therefore$ 只需证：$|z|\leqslant2$.

又 $|z|^2=\cos^2\theta+(1-\sin\theta)^2=2-2\sin\theta\leqslant4$，$\therefore$ $|z|\leqslant2$.

$\therefore$ $||z|-2|+|\bar{z}|-2=z-|z|+|z|-2=0$.

11. 由复数相等的条件得，

$$\begin{cases}3x+2y=13,\\3x-y=-2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1.\\y=5.\end{cases}$$

四、12. C. 13. $z\in R$；$z\in R$. 14. 证明 必要性：设互为共轭的两虚数为 $z=a+bi$，$\bar{z}=a-bi$ $(a, b\in R, b\neq0)$，则 $z+\bar{z}=2a\in R$，$z\,\bar{z}=a^2+b^2\in R^+$. 必要性得证；充分性：设 $z_1=a_1+b_1i$，$z_2=a_2+b_2i$ $(a_1, b_1, a_2, b_2\in R$，且 $b_1\cdot b_2\neq0)$，

$\because$ $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i\in R$，$\therefore$ $b_1=-b_2$. ①又 $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i\in R$，$\therefore$ $a_1b_2+a_2b_1=0$. ② ①代入②，$a_1=a_2$.

$\therefore$ $z_1=a_1+b_1i=a_2-b_2i=\bar{z}_2$，即 z_1，z_2 互为共轭虚数，充分性得证.

测试 2 复数代数式的运算

一、1. D. 2. C. 3. A. 4. C.

二、5. 1. 6. $\frac{i}{3}$. 7. $x=1$，$y=-3$. 8. $\frac{-3+2i}{13}$.

$\therefore\quad s_n=a\lg a+2a^2\lg a+\cdots+na^n\lg a=\lg a(a+2a^2+3a^2+\cdots+na^n)$ ①

$\therefore\quad as_n=\lg a[a^2+2a^3+\cdots+(n-1)a^n+na^{n+1}]$ ②

①－②$(1-a)s_n=a\lg a(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1}-na^n)=a\lg a(\frac{1-a^n}{1-a}-na^n)$.

又 $a\neq1$，$\therefore\quad s_n=\frac{a\lg a}{1-a}(\frac{1-a^n}{1-a}-na^n)$.

(2)由 $b_{n+1}>b_n,(n\geqslant1,n\in N)$，$\quad\therefore\quad(n+1)a^{n+1}\lg a-na^n\lg a>0$，$\quad\therefore\quad a^n\lg a[n(a-1)+a]>0$.

又 $a^n>0$，$\quad\therefore\quad\lg a[n(a-1)+a]>0,\Leftrightarrow\begin{cases}\lg a>0,\\n(a-1)+a>0,\end{cases}$或$\begin{cases}\lg a<0,\\n(a-1)+a<0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>1,\\n>\frac{-a}{a-1},\end{cases}$或

$\begin{cases}0<a<1,\\n<\frac{-a}{a-1}.\end{cases}$

为使 $n>\frac{-a}{a-1}$对任何自然数 n 均成立，需且仅需

$\frac{-a}{a-1}<1$，$\quad\therefore\quad a<\frac{1}{2}$或 $a>1$，$\quad\therefore\quad\begin{cases}a>1,\\a<\frac{1}{2}\text{或 }a>1,\end{cases}$或$\begin{cases}0<a<1,\\a<\frac{1}{2}\text{或 }a>1.\end{cases}$

$\therefore\quad a>1$ 或 $0<a<\frac{1}{2}$. 即 a 的取值范围是$a\in(0,\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$.

18. 解 (1)由已知，当 $n=1$ 时，有$\frac{a_1+2}{2}=\sqrt{2s_1}$. 又 $s_1=a_1$，$\quad\therefore\quad\frac{a_1+2}{2}=\sqrt{2a_1},\Rightarrow a_1=2$.

当 $n=2$ 时，有$\frac{a_2+2}{2}=\sqrt{2s_2}$，又 $s_2=a_2+2$，$\quad\therefore\quad(a_2-2)^2=16,\Rightarrow a_2=6.(a_2>0)$

$n=3$ 时，有$\frac{a_3+2}{2}=\sqrt{2s_3}$，$s_3=2+6+a_3\quad\therefore\quad(a_3-2)^2=64$，又 $a_3>0$，$\quad\therefore\quad a_3=10$. 故前三项为 2，6，10.

(2)由(1)猜想到 $a_n=4n-2$. Ⓐ

证明：

①当 $n=1$ 时，$a_1=2$，显然Ⓐ成立.

②设 $n=k$ 时有 $a_k=4k-2$. 由$\frac{a_k+2}{2}=\sqrt{2s_k}$. $\quad\therefore\quad2k=\sqrt{2s_k}$，$\quad\therefore\quad s_k=2k^2$，$n=k+1$ 时，$\frac{a_{k+1}+2}{2}$

$=\sqrt{2(s_k+a_{k+1})}$，$\quad\therefore\quad(\frac{a_{k+1}+2}{2})^2=2(2k^2+a_{k+1})$，

整理得 $a_{k+1}^2-4a_{k+1}+4=16k^2$，由 $a_{k+1}>0$，$a_{k+1}=4k+2$，即 $a_{k+1}=4(k+1)-2$，

即 $n=k+1$ 时，Ⓐ式也成立.

综合①，②，对于任何自然数 nⒶ均成立.

19. 解：(1) $\because\quad a_3=a_1+2d$，$\quad\therefore\quad a_1=a_3-2d$. 又 $s_{12}=12a_1+66d=144+42d$，$s_{13}=13a_1+78d=156+52d$，

由已知得$\begin{cases}144+42d>0,\\156+52d<0,\end{cases}-\frac{24}{7}<d<-3$.

(2) $\because\quad a_1=12-d$，$-d<0$，$\quad\therefore\quad a_1>0$，$\quad\therefore\quad a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{12}>a_{13}$.

欲使 s_n 最大，需且仅需 $a_n>0$，$a_{n+1}<0$，

由$\begin{cases}12a_1+66a>0,\\13a_1+78d<0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+5d>-\frac{d}{2}>0,\\a_1+6d<0.\end{cases}$即$\begin{cases}a_6>0,\\a_7<0,\end{cases}$所以 $s_1,s_2,s_3,\cdots,s_{13}$中 s_6 最大.

另法提示：

由$\begin{cases}s_{12}>0,\\s_{13}<0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6(a_6+a_7)>0,\\13a_7<0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_6>0,\\a_7<0.\end{cases}$

$= -(k+1)(4k^2+15k+14)$

$= -(k+1)(k+2)(4k+7)$

$= -(k+1)[(k+1)+1][4(k+1)+3]$.

即 $n=k+1$ 时等式也成立．所以对于任何自然数 n 等式均成立．

7．证明 (1)当 $n=1$ 时 $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, $\therefore$ $x+y \mid x^2-y^2$,即命题成立．

(2)设 $n=k$ 时有 $x+y \mid x^{2k}-y^{2k}$,则 $n=k+1$ 时 $x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)}=x^2\cdot x^{2k}-y^2y^{2k}=x^2x^{2k}-x^2y^{2k}+x^2y^{2k}-y^2y^{2k}=x^2(x^{2k}-y^{2k})+y^{2k}(x^2-y^2)$ $\because$ $x+y \mid x^{2k}-y^{2k}$, $x+y \mid x^2-y^2$, $\therefore$ $x+y \mid x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)}$,即 $n=k+1$ 命题也成立．所以对于任何自然数 n 命题均成立．

8．证明 当 $n=1$ 时,$\frac{1+a}{2}>a^{\frac{1}{2}}$,显然成立．

设 $n=k$ 时有$\frac{1+a}{2}\cdot\frac{1+a^2}{2}\cdot\frac{1+a^3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1+a^k}{2}>a^{\frac{k^2+k}{4}}$.

则 $n=k+1$ 时$\left(\frac{1+a}{2}\cdot\frac{1+a^2}{2}\cdot\frac{1+a^3}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1+a^k}{2}\right)\cdot\frac{1+a^{k+1}}{2}>a^{\frac{k^2+k}{4}}$.

$\frac{1+a^{k+1}}{2}=\frac{a^{\frac{k^2+k}{4}}+a^{\frac{(k+1)(k+4)}{4}}}{2}>a^{\frac{k^2+3k+2}{4}}=a^{\frac{(k+1)^2+(k+1)}{4}}$.

即 $n=k+1$ 时原不等式也成立．

所以对于任何自然数 n 原不等式均成立．

9．解:由已知

$b_1=\frac{a^2+1}{a}=\frac{a^4-1}{a(a^2-1)}$

$b_2=\frac{a^2+1}{a}-\frac{a}{a^2+1}=\frac{a^4+a^2+1}{a(a^2+1)}=\frac{a^6-1}{a(a^4-1)}$

$b_3=\frac{a^2+1}{a}-\frac{a(a^4-1)}{a^6-1}=\frac{a^8-1}{a(a^6-1)}$

一般有:$b_n=\frac{a^{2(n+1)}-1}{a(a^{2n}-1)}$. (＊)

证明 当 $n=1$ 时,$b_1=\frac{a^2+1}{a}$,显然成立．

设 $n=k$ 时有:$b_k=\frac{a^{2k+2}-1}{a(a^{2k}-1)}$

则 $n=k+1$ 时．$b_{k+1}=b_1-\frac{1}{b_k}=\frac{a^2+1}{a}-\frac{a(a^{2k}-1)}{a(^{2k+2}-1)}=\frac{a^{2k+4}-a^2+a^{2k+2}-1-a^{2k+2}+a^2}{a(a^{2(k+1)}-1)}$

$=\frac{a^{2[(k+1)+1]}-1}{a(a^{2(k+1)}-1)}$.

即 $n=k+1$ 时(＊)式也成立．

所以对于任何自然数 n(＊)式均成立．

测试 13 数列综合练习题

一 **1**. B. **2**. B. **3**. D. **4**. D. **5**. A. **6**. B. **7**. A. **8**. D. **9**. B. **10**. A.

二 **11**.90. **12**. 10 或 11. **13**.1. **14**. 20. **15**. $\frac{2}{n(n+1)}$.

三 **16．解** 设三数为 $x-d,x,x+d$．则 $\begin{cases}3x=30,\\(x-4)^2=(x-5-d)(x+d),\end{cases}$ $\therefore$ $d^2+5d-14=0$,

$\therefore$ $d_1=-7$ 或 $d_2=2$．所求三数为:17,10,3 或 8,10,12．

17．解 (1) $\because$ $a_n=a\cdot a^{n-1}=a^n$,又 $a>0$, $\therefore$ $b_n=na^n\lg a$.

$\therefore\quad 1<\log_2 x<2, \Rightarrow 2<x<4.$

或② $\begin{cases} t-1<0, \\ t^2+t-2\geqslant 0, \end{cases} \Rightarrow t\leqslant -2.\qquad \therefore\quad \log_2 x\leqslant -2\quad \therefore\quad x\leqslant \frac{1}{4}.$

综上:原不等式的解是$(2,4)\cup\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]$.

20. 解:设 $u=\log_2\frac{a+1}{2a}$,则原式化为$(u+3)x^2-2ux+2u>0$, (A)

① $u=-3$时,有$x-1>0$,显然只对$x>1$成立.

② $u\neq -3$时,欲使(A)对所有实数x恒成立,其充要条件是:$\begin{cases} 3+u>0, \\ 4u^2-8u(u+3)<0 \end{cases}\Rightarrow u>0.$

由 $\log_2\frac{a+1}{2a}>0, \Rightarrow \frac{a+1}{2a}>1 \Rightarrow 0<a<1.$

21. 解:(1)定义域$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2+1}{1+2ax}>0$, $\because\quad (x-1)^2+1>0, \Leftrightarrow 1+2ax>0, \Leftrightarrow 2ax>-1$. 所求定义域为

①$a=0$时,$x\in R$;②$a>0$时,$x>-\frac{1}{2a}$;③$a<0$时,$x<-\frac{1}{2a}$.

(2)由 $f(x)>0 \Leftrightarrow 0<\frac{(x-1)^2+1}{1+2ax}<1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2ax>0, \\ \frac{(x-1)^2+1}{1+2ax}<1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2ax>0, \\ (x-1)^2+1<1+2ax, \end{cases} \Leftrightarrow x^2-2(1+a)x+1<0.$

$\triangle=4(a^2+2a)$.

当$\triangle\leqslant 0$,即$-2\leqslant a\leqslant 0$时,无解;

当$\triangle>0$,即$a>0$或$a<-2$时,解是

$(a+1)-\sqrt{a^2+2a}<x<(a+1)+\sqrt{a^2+2a}$.

测试8 数列和等差数

一 **1.** C. **2.** B. **3.** C. **4.** C.

二 **5.** $a=1, b=3, c=99$. **6.** $s_{21}=420$. **7.** $-\frac{5}{3}$. **8.** 156.

三 **9. 解:**设等差数列$\{a_n\}$首项为a_1,公差为d,由已知$\begin{cases} 5(a_1+3d)=2(4a_1+6d), \\ 6a_1+15d-(3a_1+3d)=15, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ d=1 \end{cases}\quad \therefore\quad S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.\quad \therefore b_n=\frac{2}{n(n+1)}.$

10. 解:设公差为d $\therefore\quad S_{2n}=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})=S_n+S_n+n^2d.$

$\therefore\quad 100=2\times 25+n^2d.\quad \therefore\quad n^2d=50.\quad \therefore\quad S_{3n}=S_{2n}+(a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n})=S_{2n}+S_n+2n^2d=225.$

11. 证明: $\because\quad \frac{a}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c},\quad \therefore\quad \frac{2(a+b+c)}{b}=\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{c},\quad \therefore\quad \frac{2(a+c)}{b}=\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}.$

$\therefore\quad \frac{b+c}{a},\frac{a+c}{b},\frac{a+b}{c}$成等差数列.

四 选做

12. 证明:设公差为d

① 当$d=0$时,有$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{2}{2\sqrt{a}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}.\quad \therefore\quad \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$成等差数列.

二 5. $a\in(-2,-1]\cup[3,4)$.　6. $3\sqrt[3]{2\pi v^2}$.　7. $\left(-\infty,\frac{1}{9}\right)\cup(1,+\infty)$.　8. 2.

三 9. **解**:原不等式化为$(\log_3 m-3)(\log_3 m+1)x^2-(\log_3 m-3)x-1<0$.

(1)当$(\log_3 m-3)(\log_3 m+1)=0$时.①由$\log_3 m=3$,即$m=27$时有$-1<0$,显然命题成立.②由$\log_3 m=-1$.有$4x-1<0$.显然命题不成立.

(2)当$\log_3 m\neq3$且$\log_3 m\neq-1$时,命题成立的充要条件是:

$\begin{cases}(\log_3 m-3)(\log_3 m+1)<0,\\(\log_3 m-3)^2+4(\log_3 m-3)(\log_3 m+1)<0,\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt[5]{3}}<m<27$.综上:$\frac{1}{\sqrt[5]{3}}<m\leqslant27$.

10. **解**:原方程化为$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-x^2+5x-3\\1<x<3\end{cases}\Leftrightarrow$求函数$a=-x^2+5x-3$在$(1,3)$上的值域,$\Leftrightarrow a\in\left(1,\frac{13}{4}\right]$.

另法:原方程有解的充要条件是

$\begin{cases}13-4a\geqslant0,\\1<\frac{5+\sqrt{13-4a}}{2}<3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}13-4a\geqslant0,\\1<\frac{5-\sqrt{13-4a}}{2}<3\end{cases}\Rightarrow1<a\leqslant\frac{13}{4}$.

法3:令$f(x)=x^2-5x+3+a$.方程有解的充要条件是 $\begin{cases}f\left(\frac{5}{2}\right)\leqslant0,\\f(1)>0,\end{cases}\Rightarrow1<a\leqslant\frac{13}{4}$.

11. 提示如图6-1:$B(0,b)$,设$P(a\cos\alpha,b\sin\alpha)$

$$\begin{aligned}V_{锥}&=\frac{1}{3}\pi a^2\cos^2\alpha(b-b\sin\alpha)\\&=\frac{1}{3}\pi a^2b(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)\\&=\frac{1}{6}\pi a^2b(1-\sin\alpha)(2+2\sin\alpha)(1-\sin\alpha)\\&\leqslant\frac{1}{6}\pi a^2b\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{32}{81}\pi a^2b.\end{aligned}$$

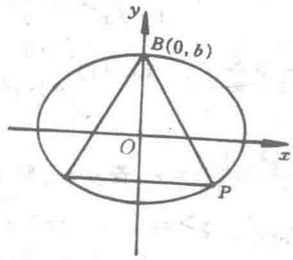


图6-1

测试7　期中试题

一 1. D.　2. A.　3. B.　4. B.　5. D.　6. B.　7. D.　8. A.
9. B.　10. D.　11. D.　12. C.

二 13. $\left\{x\mid-\frac{3}{2}<x<3,x\neq-1,x\neq0\right\}$.

14. $\{x\mid x\leqslant\log_2(\sqrt{2}-1)$或$x\geqslant\frac{1}{2}\}$.　15. $3+2\sqrt{2}$.

16. $x=6$时,最小值24;　17. $\{x\mid x>1\}$

三 18. **解**:注意到解集$\subset(1,2)\cup(2,+\infty)$.

当$1<x<2$时,$\log_2(x-1)<0$,$\log_2\sqrt{1+x}>0$,

$\therefore\ \frac{1}{\log_2(x-1)}<\frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$.

当$x>2$时,$\log_2(x-1)>0$,$\log_2\sqrt{x+1}>0$.　$\therefore$　原式$\Leftrightarrow\log_2\sqrt{x+1}<\log_2(x-1)\Leftrightarrow$
$\begin{cases}x>2,\\\sqrt{x+1}<x-1,\end{cases}\Rightarrow x>3$.　综上:原不等式的解为$\{x\mid1<x<2$或$x>3\}$.

19. 令$\log_2x=t$,　原式化为

$\sqrt{t^2+t-2}>2(t-1),\Leftrightarrow$①$\begin{cases}t-1\geqslant0,\\t^2+t-2>0,\\t^2+t-2>4(t-1)^2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\geqslant1,\\t>1,或t<-2,\\1<t<2,\end{cases}$　$\therefore$　$1<t<2$.

答案与提示(上学期)

测试1　不等式的性质

一　1. D.　2. A.　3. D.　4. B.

二　5. $(a+b)c>c^2+ab$.　6. $c<a<d<b$.　7. 必要不充分条件.　8. m,n 中至少有一个等于 1.

三　9. 由 $c>a>b>0\Rightarrow 0<c-a<c-b\Rightarrow \frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0$, 又 $a>b>0\Rightarrow \frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

10. 由 $2(a^2+b^2)-(a+b)^2\Rightarrow(a-b)^2\geqslant 0\Rightarrow 2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$①又 $a,b\in R^+$, $\Rightarrow 2(a^2+b^2)$, $a+b>0$.②, 由①, ②$\Rightarrow\sqrt{2(a^2+b^2)}\geqslant a+b$.

11. **解**:函数 $y=f(x)$的定义域为 $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$. $y=-1+\frac{2}{1-\sqrt{x}}$.

∴　$-\sqrt{x}\in(-1,0]\cup(-\infty,-1)$,　∴　$1-\sqrt{x}\in(0,1]\cup(-\infty,0)$.　∴　$\frac{2}{1-\sqrt{2}}\in[2,+\infty)\cup(-\infty,0)$,　∴　$-1+\frac{2}{1-\sqrt{x}}\in[1,+\infty)\cup(-\infty,-1)$, 即 $y\in[1,+\infty)\cup(-\infty,-1)$.

四　12. $\sqrt{\frac{b^2+1}{a^2+1}}>\frac{b}{a}$.　13. (1) $\left.\begin{matrix}x>0\\ yz>x^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow yz>0$. $\left.\begin{matrix}x>0\\ x^2-2xy+z^2=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow xy>0\Rightarrow y>0$. 又 $yz>0$, $\Rightarrow z>0$;

(2) $y=\frac{x^2+z^2}{2x}\geqslant\frac{2xz}{2x}=z$. 若 $y=z$, 则 $x^2-2xy+z^2=(x-y)^2=0\Rightarrow x=y$, $\Rightarrow x=y=z$, $\Rightarrow yz=x^2$ 与 $yz>x^2$ 矛盾.　∴　$y>z$.　∵　$yz>x^2$　∴　$yz-2xy+z^2>x^2-2xy+z^2=0$.　∴　$z(y+z)-2xy>0$, 又 $y+z>0$.　∴　$z>\frac{2xy}{y+z}>\frac{2xy}{2y}=x$.　∴　$y>z>x$.

测试2　不等式的证明(一)

一　1. ×　2. ×　3. ×　4. ×　5. ×　6. √.

二　7. D.　8. B.

三　9. $x=\pm\sqrt[6]{3}, 3\sqrt[3]{3}$.　10. $\sqrt{10}$.　11. $-\frac{1}{2}, 1$.　12. 101.

四　13. 由 $\left.\begin{matrix}2xa+2by-(a+b)(x+y)=(x-y)(a-y)\\ a>b, x>y\end{matrix}\right\}\Rightarrow ax+by>\frac{1}{2}(a+b)(x+y)$

14. 由 $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}-9=\frac{(3a-1)^2}{a(1-a)}\geqslant 0\Rightarrow$原式成立.

另法: $\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}=\left(a+\frac{1-a}{2}+\frac{1-a}{2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{1-a}+\frac{2}{1-a}\right)\geqslant 9$.

15. 注意到原式$\Leftrightarrow\frac{1}{\lg a}+\frac{1}{\lg b}\geqslant 4$, $\Leftrightarrow(\lg a+\lg b)\left(\frac{1}{\lg a}+\frac{1}{\lg b}\right)\geqslant 4$.

五　**证明**:　∵　$a_n\in R^+$,　∴　$a_n-a_{n+1}\geqslant a_n^2>0$, 即 $a_n>a_{n+1}$.

∴　数列$\{a_n\}$是递减数列.

又　$0<a_{n+1}\leqslant a_n(1-a_n)\leqslant\frac{1}{4}<1$,　∴　$0<a_n<1$.

当 $n=1$ 时, 有 $a_1<1=\frac{1}{1}$, $a_n<\frac{1}{n}$显然成立.

设 $n=k$ 时有: $a_k<\frac{1}{k}$,

18. （10分）已知 a，b，c，d 为 $(x+y)^n$ 的展开式中相邻四项的二项式系数，求证：

$$\frac{2b}{b+c}=\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}.$$

高二代数下学期测试 14　期末试题

班级________姓名________得分________

（90 分钟）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．请把每小题的唯一正确的选项填在题后的括号中）

1. 用 0，1，2，3 这四个数字，组成个位数字不是 1 的无重复数字的四位数共有（　　）

A. 16 个　B. 14 个　C. 12 个　D. 10 个

2. 在 $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中常数项是（　　）

A. -28　B. -7　C. 7　D. 28

3. 从 8 人中选出 3 人参加 A，B，C 三个兴趣小组，其中甲不在 A 组的选法种数是（　　）

A. 210　B. 252　C. 294　D. 366

4. $C_n^0+3C_n^1+3^2C_n^2+\cdots+3^rC_n^r+\cdots+3^nC_n^n$ 的值等于（　　）

A. 3^n　B. 3^{n-1}　C. 4^n　D. 4^{n-1}

5. 已知 $(1-2x)^n$ 展开式中，奇数项的二项式系数之和为 32，则该二项式展开式的中间项为（　　）

A. $-160x^3$　B. $160x^3$　C. $240x^4$　D. $-240x^4$

6. 设在甲、乙、丙三个宿舍中，每个宿舍住 3 个同学，现从这 9 人中选出 3 名代表，其中甲宿舍至少选 1 人，则一共有不同的选法（　　）

A. $C_3^1C_6^2$ 种　B. $C_3^1C_8^2$ 种　C. $C_3^1C_3^1C_3^1$ 种　D. $C_3^1C_6^2+C_3^2C_6^1+C_3^3$ 种

7. 由 $(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2})^{100}$ 展开所得关于 x 的多项式中，系数为有理数的项共有（　　）

A. 15 项　B. 16 项　C. 17 项　D. 18 项

8. 如果多项式 $C_n^0(x+1)^n-C_n^1(x+1)^{n-1}+\cdots+(-1)^rC_n^r(x+1)^{n-r}+\cdots+(-1)^nC_n^n=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，则 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$ 等于（　　）

14.（12 分）化简：$C_n^1x\,(1-x)^{n-1}+2C_n^2x^2\,(1-x)^{n-2}+\cdots+KC_n^kx^k\,(1-x)^{n-k}+\cdots+nC_n^nx^n$.