中国社会科学院创新工程学术出版资助项目

经济与管理系列

投入产出经济学理论与矩阵理论之间关系的新进展

曾力生 著

Advances in Relationship between the Input-Output Economics and the Theory of Matrices

中国社会科学出版社

中国社会科学院创新工程学术出版资助项目

经济与管理系列

投入产出经济学理论与矩阵理论之间关系的新进展

曾力生 著

Advances in Relationship between the Input-Output Economics and the Theory of Matrices

中国社会科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

投入产出经济学理论与矩阵理论之间关系的新进展/曾力生著．—北京：中国社会科学出版社，2015. 10
ISBN 978 - 7 - 5161 - 7157 - 8

Ⅰ．①投…　Ⅱ．①曾…　Ⅲ．①投入产出经济学—理论研究　Ⅳ．①F223

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 281971 号

出 版 人	赵剑英
责任编辑	卢小生
责任校对	周晓东
责任印制	王　超
出　　版	中国社会科学出版社
社　　址	北京鼓楼西大街甲 158 号
邮　　编	100720
网　　址	http：//www. csspw. cn
发 行 部	010 - 84083685
门 市 部	010 - 84029450
经　　销	新华书店及其他书店
印　　刷	北京君升印刷有限公司
装　　订	廊坊市广阳区广增装订厂
版　　次	2015 年 10 月第 1 版
印　　次	2015 年 10 月第 1 次印刷
开　　本	710 × 1000　1/16
印　　张	13. 25
插　　页	2
字　　数	223 千字
定　　价	50. 00 元

凡购买中国社会科学出版社图书，如有质量问题请与本社营销中心联系调换
电话：010 - 84083683

前　言

投入产出模型的基本框架就是投入产出表的第一象限[1]，即中间产品流量矩阵。因此，投入产出模型与数值矩阵具有天然的联系。这就使得许多投入产出经济问题都与矩阵理论密切相关。由于中间产品流量矩阵属于非负矩阵，所以，许多投入产出经济问题主要与非负矩阵理论有紧密的关联。

早在20世纪初，著名德国数学家弗罗宾纽斯就创立了非负矩阵的理论[2]，以他的姓氏命名的“弗罗宾纽斯定理”成为非负矩阵领域中众所周知的核心理论。自从美国经济学家里昂惕夫于20世纪30年代后期开创了投入产出模型[3]以来，非负矩阵理论终于在属于非纯粹数学领域的投入产出模型中找到了用武之地，得到了比较充分的发挥和利用。许多投入产出经济学家和数理经济学家都运用非负矩阵理论来分析研究相关的投入产出经济问题，取得了不少投入产出经济学的研究成果。

事实上，经济学和数学是相互依赖、相互促进的。一方面，我们可以利用数学方法来研究解决经济学中的数量关系问题；另一方面，经济学中的一些数量关系问题可以抽象地归纳为某个数学问题。如果该数学问题是数学家们尚未解决的或未涉及的，我们就可以通过这些起源于经济学中的数学问题来研究新的数学理论，如果有所突破，就能既解决了经济学中的数量关系的问题，也发展了数学理论。上述两个方面相比较，后者的工作

---

① Miller, R. E., Blair, P. D., *Input - Output Analysis: Foundations and Extensions* (Second Edition). Cambridge University Press, Cambridge, 2009, pp. 2 - 3.

② Frobenius, G., Über matrizen aus nicht negativen elementen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussichen Akademie der Wissenschaften*, 1 (1912), pp. 456 - 477.

③ Leontief, W. W., Quantitative input - output relations in the economic system of the United States. *Review of Economics and Statistics*, 18 (1936), pp. 105 - 125.

Leontief, W. W., *The Structure of American Economy 1919 - 1939*. Oxford University Press, New York, 1941.

对于一般的经济学家来说可能是更困难的，因为这需要具备深厚的数学功底。而对于后者来说，具体到投入产出经济学理论与非负矩阵理论之间的关系，直到20世纪末，笔者未发现非负矩阵中与投入产出模型直接有关的一些理论在对投入产出模型应用过程中得到进一步改进或发展，即在利用经济学来发展数学这方面，似乎没有取得什么重要的进展。

当人类进入到21世纪以后，笔者从2001—2014年在线性代数与矩阵理论领域内的国际顶级学术期刊和投入产出分析与数理经济学领域内的国际权威学术期刊上独立发表了五篇研究论文①，并被多次引用。这些研究成果不仅发展了投入产出经济学理论，而且改进或发展了矩阵与行列式的理论，使得投入产出经济学理论和矩阵理论融合得更加紧密。这些成果的取得，就是起源于对某些投入产出经济问题的深入研究，将这些问题抽象归纳为某些数学问题，而这些数学问题又是数学家们尚未解决的或未涉及的，因而需要做创新性的数学研究。这些成果的推出不仅对于人们更加深刻地认识投入产出模型的内在机理或基本属性具有重要的意义，而且对于人们更加深刻地认识与投入产出模型相关的矩阵与行列式的理论也具有重要的意义。由于上述成果的创新性，笔者因此荣获了第十四届孙冶方经济科学奖和第七届中国社会科学院优秀科研成果奖等奖项。

在上述五篇研究论文的基础之上，笔者又对其进行了全面、系统的梳理，归纳总结，并补充了一些新内容，从而形成了本书。与那五篇研究论文相比，本书更全面、系统地论述了投入产出经济学理论与矩阵理论之间关系及其新进展。

本书共分为四章。第一章和第三章属于数学部分，论述了与投入产出模型相关的矩阵与行列式的新理论。第二章和第四章属于投入产出经济学部分，第一章和第三章中的内容在这里得到了充分的发挥与利用，从而使

① Zeng, L., A property of the Leontief inverse and its applications to comparative static analysis. *Economic Systems Research*, 13 (2001), pp. 299 – 315.

Zeng, L., Some applications of spectral theory of nonnegative matrices to input – output models. *Linear Algebra and Its Applications*, 336 (2001), pp. 205 – 218.

Zeng, L., Effects of changes in outputs and in prices on the economic system: an input – output analysis using the spectral theory of nonnegative matrices. *Economic Theory*, 34 (2008), pp. 441 – 471.

Zeng, L., Conditions for some balances of economic system: An input – output analysis using the spectral theory of nonnegative matrices. *Mathematical Social Sciences*, 59 (2010), pp. 330 – 342.

Zeng, L., Two kinds of Pareto improvements of the economic system: An input – output analysis using the nonnegative matrices theory. *Mathematical Social Sciences*, 71 (2014), pp. 12 – 19.

投入产出经济学理论与矩阵理论得到了充分的融合，两者之间的关系更加紧密。

第一章论述了非负矩阵谱理论的新进展。以引理 1.1 为基础，详细地推导出了非负矩阵拥有一个唯一正的特征向量的充分必要条件。该条件虽然是前人已有的结果，但通过引理 1.1 的推导过程，笔者首次发现了当非负矩阵可约时，上述唯一正的特征向量是以一个基本特征子向量为基础的，上述唯一正的特征向量的每个剩余分量都是基本特征子向量的分量的线性函数，并推导出了相应的解析式，这些结果是前人没有发现的。这些新结果的推出不仅对于人们更加深刻地认识非负矩阵的谱性质具有重要意义，而且可以扩大非负矩阵谱理论的应用深度和广度。例如，在接下来的有一个正的特征向量的非负矩阵的谱性质的分析中，以及在迭代矩阵的谱性质的分析中都用到了上述新结果。在论述非负矩阵与对应的非奇异 M 矩阵的逆矩阵的关系时，首次提出了可约的非负矩阵对应于（非）初始类的分块列指标集和对应于（非）最终类的分块行指标集的新概念，从而全面、精确地揭示了任意一个非负矩阵与对应的非奇异 M 矩阵的逆矩阵之间的关系。本章中提出的非负矩阵新的谱理论为后面的章节打下了坚实的数学基础。

第二章给出了非负矩阵新的谱理论在投入产出分析中的应用部分，它充分展示了非负矩阵谱理论与投入产出经济学理论之间的紧密关系。

在第二章第一节中，推导出了里昂惕夫动态投入产出模型的平衡增长解存在且唯一的充分必要条件，并清晰地给出了该条件的经济解释，与前人的有关成果相比较，这些新成果明显地发展了里昂惕夫动态投入产出模型的理论。

与第二章第一节相对偶，在第二章第二节中，推导出了生产价格存在且唯一的充分必要条件及其清晰的经济解释。

综合前两节的结果，在第二章第三节中，推导出了生产价格与平衡增长解同时存在且唯一的充分必要条件及其清晰的经济解释。

在第二章第四节和第五节中，首次建立了实物型产量调整模型，并推出了产量调整模型和价格调整模型的基本性质。这两个相互对偶的模型是分析产量变动和价格变动对经济系统影响的基本工具。

在第二章第六节中，利用中间产出系数矩阵、高士逆矩阵、价值型中间投入系数矩阵、价值型里昂惕夫逆矩阵、最终产出率对角矩阵和增加价

值率对角矩阵，把这六种矩阵进行适当的组合，首次系统地提出了十二种谱半径都等于 1 的特殊的半正矩阵，推导出了它们的基本性质，并对其中四种半正矩阵的经济含义做出了精确的分析和解释。在这十二种特殊的半正矩阵中，只有第五种是前人曾提到过的所谓“增加价值乘数”矩阵，而笔者在这里给出了该矩阵的更全面且更精确的经济解释和称谓。这十二种特殊的半正矩阵被应用于后面的理论分析中。

在第二章第七节中，首次对最终产出率、投入乘数、增加价值率和产出乘数这四项指标给出了明确的经济含义，指出了最终产出率和增加价值率越高，对经济系统越有利；投入乘数和产出乘数越小，对经济系统越有利。

在第二章第八节中，分析了产量变动对中间产出系数矩阵的影响和价格变动对价值型中间投入系数矩阵的影响。

在第二章第九节中，分析了产量变动对最终产出率和投入乘数的影响以及价格变动对增加价值率和产出乘数的影响。

在中间产出（或投入）系数矩阵至少有一个非最终类（或非初始类）的条件下，在第二章第十节中，笔者首次提出了最终产出率和投入乘数的帕累托改进的新概念以及增加价值率和产出乘数的帕累托改进的新概念，并给出了这两种帕累托改进的具体方法，前者是通过调整产出系统来实现的，后者是通过调整价格系统来实现的。

在第二章第十一节中，推导出了最终产出率和投入乘数以及增加价值率和产出乘数这四种经济指标中的每一种在各个部门中的一致性的条件。

在第二章第十二节中，首次提出了经济系统中的两种平衡的新概念，分析了这两种平衡的经济含义。这两种平衡就是最终产值与增加价值之间的平衡，以及投入乘数（或称供给乘数）与产出乘数（或称需求乘数）之间的平衡。还推导出了上述两种平衡状态发生的一个充分条件，推导出了上述两种平衡状态发生的一个必要条件，分别推出了上述两种平衡状态发生的若干个充分必要条件。

最后，在第二章第十三节中，对非负矩阵谱理论在产量调整模型和价格调整模型中的应用进行了全面的概括总结。

第三章推出了关于矩阵与行列式的一些新结果。在第三章第一节中，通过定理 3.1 可以发现，由一个 n 阶矩阵的任意一个二阶子式按一定规则所构成的 $n-1$ 阶行列式与该 n 阶矩阵的行列式之间的数量关系。引理

3.1 给出了由一个 n 阶矩阵的任意 4 个元素的代数余子式按一定规则构成的二阶行列式与那 4 个元素构成的二阶矩阵的代数余子式和该 n 阶矩阵的行列式之间的数量关系。这些新结果为后面的分析与论证奠定了基础。在第三章第二节中，尽管前人已经建立了类似于定理 3.2 的关于逆矩阵的扰动理论，但笔者在这里建立的有关公式在形式上与前人略有不同，证明方法也不同。在第三章第三节中，首次建立了任意一个矩阵的逆与该矩阵的余子矩阵的逆之间的关系，这个新结果是非常重要的，若没有它，第四章中的许多结果就无法得出。总之，本章中推出的矩阵与行列式的新理论为后面的第四章打下了坚实的数学基础。

第四章运用第三章中得到的矩阵与行列式的新结果，论述了投入产出模型的比较静态分析的有关理论。在第四章第一节和第二节中，分别分析了中间投入系数矩阵变动对里昂惕夫逆矩阵和产出乘数的影响规律。在第四章第三节中，分析了中间产出系数矩阵变动对投入产出乘数的影响规律。在第四章第四节中，给出了里昂惕夫逆矩阵和高士逆矩阵的重要性质，该性质表明了里昂惕夫逆矩阵和高士逆矩阵中的任意二阶子矩阵的行列式所具有的重要特征，这个新结果在投入产出模型的比较静态分析中发挥了非常重要的作用，若没有它，许多关于投入产出模型的比较静态分析的结果就无法正确地得出，它还可用于识别关于投入产出模型的关键部门群组。在第四章第五节中，分析了最终需求和中间投入系数变动对总产出及其结构的影响规律。在第四章第六节中，分析了增加价值系数和中间投入系数变动对价格的影响规律。

数学符号和术语说明

一　一般的数学符号和术语

$\neg$ ——逻辑符号，否定；

$\wedge$——逻辑符号，合取；

$\vee$——逻辑符号，析取；

$\Leftrightarrow$——逻辑符号，等价；

$\Rightarrow$或$\Leftarrow$——逻辑符号，蕴涵，例如，$\Gamma \Rightarrow \Omega$，或 $\Omega \Leftarrow \Gamma$，表示 Γ 蕴涵 Ω；

$\forall$——集合符号，任意；

$\exists$——集合符号，存在；

$\in$——集合符号，属于；

$\cup$——集合的并；

$\cap$——集合的交；

$A \subset B$——集合 A 是集合 B 的真子集；

$A - B$——两个集合的差，即属于集合 A 而不属于集合 B 的集合；

Φ——空集合；

$\sum$ ——求和符号；

$\prod$ ——求积符号；

max——最大；

min——最小；

Δa——a 的增量；

$|C|$——矩阵 C 的行列式，或数 C 的绝对值；

$\frac{\partial y}{\partial x}$——$y$ 对 x 的偏导数；

$e(x,\ y)=\frac{\partial y}{\partial x}\frac{x}{y}$——$y$ 对 x 的偏弹性；

0——数值零，或零向量，或零矩阵；

$E=(1,\ 1,\cdots,\ 1)$——每个分量都是 1 的行向量；

I——单位矩阵；

W——置换矩阵；

$\hat{H}$——以（行或列）向量 H 的分量为主对角线元素的对角矩阵；

M^t——向量或矩阵 M 的转置；

$\rho(M)$ ——矩阵 M 的谱半径；

$rank(M)$ ——矩阵 M 的秩。

向量或矩阵 $M>0$，表示 M 是半正的，即 M 的所有元素都非负，并且 M 不是零矩阵；

向量或矩阵 $M\gg0$，表示 M 是正的，即 M 的所有元素都是正的；

向量或矩阵 M 称为是严格半正的，如果 M 是半正的且至少有一个零元素；

设 A 是非负矩阵集合，B 是半正矩阵集合，C 是严格半正矩阵集合，D 是正矩阵集合，$\{0\}$是零矩阵集合，显然有$(D\cup C)=B\subset(B\cup\{0\})=A$，$D\cap C=\Phi=B\cap\{0\}$。

一个矩阵的对应于一个特征值的特征向量被称为是该矩阵对应于该特征值的唯一的特征向量，意味着在相差一个数量因子的情况下是唯一的。一个齐次线性方程组的非零解是唯一的，意味着在相差一个数量因子的情况下是唯一的。

二　第二章和第四章中的基本符号和术语

$q=(q_i)_{n\times1}\gg0$——实物型总产出列向量；

$p=(p_j)_{1\times n}\gg0$——价格行向量；

$X=\hat{p}q=(x_i)_{n\times1}\gg0$——价值型总产出（总产值）列向量；

$X^t\gg0$——总投入值行向量；

$x=EX>0$——社会总产值，即各个部门总产值之和，或各个部门总投入值之和；

$\widetilde{W}=x^{-1}X=(w_i)_{n\times1}\gg0$——总产值结构系数列向量；

$\bar{Z}>0$——实物型中间产品流量矩阵；

$Z=\hat{p}\bar{Z}>0$——价值型中间产品流量矩阵；

$ZE^t>0$——中间产出总值列向量；

$EZ>0$——中间投入总值行向量；

$w=EZE^t>0$——各个部门中间产出总值之和，或各个部门中间投入总值之和；

$\bar{F}=(\bar{f}_i)_{n\times 1}>0$——实物型最终产出（实物型最终需求）列向量；

$F=\hat{p}\bar{F}=(f_i)_{n\times 1}>0$——价值型最终产出（最终产值）列向量；

$Y=\hat{q}^{-1}\bar{F}=\hat{X}^{-1}F=(y_i)_{n\times 1}>0$——最终产出率（最终产出与总产出的比率）列向量；

$V=X^t-EZ=(v_j)_{1\times n}>0$——增加价值行向量；

$\bar{R}=V\hat{q}^{-1}=(\bar{r}_j)_{1\times n}>0$——增加价值系数（单位实物总产出的增加价值）行向量；

$R=V\hat{X}^{-1}=(r_j)_{1\times n}>0$——增加价值率（增加价值与总产值的比率）行向量；

$\bar{A}=\bar{Z}\hat{q}^{-1}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}>0$——实物型中间投入系数矩阵；

$\bar{L}=(I-\bar{A})^{-1}=(\bar{l}_{ij})_{n\times n}>0$——实物型里昂惕夫（Leontief）逆矩阵；

$\vec{A}=\hat{q}^{-1}\bar{Z}=\hat{X}^{-1}Z=(\vec{a}_{ij})_{n\times n}>0$——中间产出系数矩阵；

$\vec{L}=(I-\vec{A})^{-1}=(\vec{l}_{ij})_{n\times n}>0$——高士（Ghosh）逆矩阵；

$G=\vec{L}E^t=(g_i)_{n\times 1}\gg 0$——投入乘数列向量，可设 $\alpha\geqslant\max(g_1, g_2, \cdots, g_n)$；

$A=Z\hat{X}^{-1}=(a_{ij})_{n\times n}>0$——价值型中间投入系数矩阵；

$L=(I-A)^{-1}=(l_{ij})_{n\times n}>0$——价值型里昂惕夫逆矩阵；

$D=EL=(d_j)_{1\times n}\gg 0$——产出乘数行向量，可设 $\beta\geqslant\max(d_1, d_2, \cdots, d_n)$；

$\bar{B}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}>0$——实物型资本投入系数矩阵；

$B=\hat{p}\bar{B}\hat{p}^{-1}=(b_{ij})_{n\times n}>0$——价值型资本投入系数矩阵；

$Q=\hat{q}^{-1}q^{\#}=(Q_i)_{n\times 1}\gg 0$——实物产出调整系数列向量，其中 $q^{\#}$ 是调整后的实物型总产出列向量；

$P = p^* \hat{p}^{-1} = (P_j)_{1\times n} \gg 0$——价格调整系数行向量，其中 p^* 是调整后的价格行向量；

其中，$0 \leqslant \rho(\overline{A}) = \rho(\vec{A}) = \rho(A) < 1$，并且 $\vec{A} = \hat{q}^{-1}\overline{A}\hat{q} = \hat{X}^{-1}A\hat{X}$，$\vec{L} = \hat{q}^{-1}\overline{L}\hat{q} = \hat{X}^{-1}L\hat{X}$，$A = \hat{p}\overline{A}\hat{p}^{-1}$，$L = \hat{p}\overline{L}\hat{p}^{-1}$。

目　录

第一章　非负矩阵谱理论的新进展

非负矩阵（或向量）是指元素都是非负实数的矩阵（或向量），它包括零矩阵和半正矩阵。零矩阵是指元素都是零的矩阵。半正矩阵是指非负矩阵中的非零矩阵，即至少包含一个正元素的非负矩阵，它包括正矩阵和严格半正矩阵。正矩阵是指元素都是正数的矩阵，严格半正矩阵是指半正矩阵中至少有一个零元素的矩阵。非负矩阵谱理论是指非负矩阵的特征值和特征向量的有关理论。

第一节　非负矩阵有唯一正的特征向量的等价条件

著名德国数学家弗罗宾纽斯①首先发现了非负矩阵存在半正的特征向量，尽管他的理论不是按照现代的流行方式陈述的。施奈德②和卡尔森③用 M 矩阵的术语讨论了这个主题。维克托瑞④应用图论的概念推广了弗罗宾纽斯的结果。施奈德⑤又对上述成果做了一个综述。利用这些已知结果，本节证明了非负矩阵有唯一正的特征向量的等价条件，其中特征向量的唯一性和非负矩阵可约的情况被强调了。尤其是发现了当拥有唯一正的

---

① Frobenius, G., Über matrizen aus nicht negativen elementen. *Sitzungsberichte der Königlich Preussichen Akademie der Wissenschaften*, 1 (1912), pp. 456 – 477。

② Schneider, H., The elementary divisors, associated with 0, of a singular M – matrix. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 10 (1956), pp. 108 – 122.

③ Carlson, D., A note on M – matrix equations. *SIAM J.*, 11 (1963), pp. 1027 – 1033.

④ Victory, H. D. Jr., On nonnegative solutions of matrix equations. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 6 (1985), pp. 406 – 412.

⑤ Schneider, H., The influence of the marked reduced graph of a nonnegative matrix on the Jordan form and on related properties: a survey. *Linear Algebra and Its Applications*, 84 (1986), pp. 161 – 189.

特征向量的非负矩阵可约时，该特征向量是以一个基本特征子向量作为基础的，而该特征向量的每个剩余分量都是基本特征子向量的分量的线性函数，并推导出了具体的函数解析式。研究上述问题的主要动机来自某些投入产出经济问题，在这些问题中，必须求解非负矩阵的唯一的正特征向量，而且这些非负矩阵很可能是可约的。

不失一般性，我们假定一个非负的 $n\geqslant 2$ 阶矩阵 T 本身有一个上三角的弗罗宾纽斯标准型，即：

$$T=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1r} \\ & T_{22} & \cdots & T_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & T_{rr} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

其中，$1\leqslant r\leqslant n$，方阵 T_{ii} 不可约或是一阶矩阵，$i=1,\cdots,r$。

引理 1.1 令 L 和 R 分别是 T 的对应于 $\rho(T)$ 的半正的左和右特征向量。对下列 $2r+5$ 个条件：

(i_i) $\rho(T)=\rho(T_{ii})>\rho(T_{jj})$, $j=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,r$, $i=1,2,\cdots,r$;

(ii_i) L 和 R 分别有一个子向量 L_i 和 R_i，它们分别是 T_{ii} 的唯一正的左和右特征向量，L 和 R 的每个剩余正分量（如果存在）分别是 L_i 和 R_i 的分量的线性函数，$i=1,2,\cdots,r$;

(iii) L 和 R 都是唯一的;

(iv) T 只有一个初始类;

(v) T 只有一个最终类;

(vi) L 是正的且唯一;

(vii) R 是正的且唯一。

我们有如下结论:

(a) $(\mathrm{i}_i)\Rightarrow[(\mathrm{ii}_i)\wedge(\mathrm{iii})]$, $i=1,2,\cdots,r$;

(b) $[(\mathrm{i}_1)\wedge(\mathrm{iv})]\Leftrightarrow(\mathrm{vi})$;

(c) $[(\mathrm{i}_r)\wedge(\mathrm{v})]\Leftrightarrow(\mathrm{vii})$。

证明 令 $\lambda=\rho(T)$。根据弗罗宾纽斯定理，$L=(L_1, L_2,\cdots, L_r)$ 和

$$R=\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_r \end{bmatrix}$$

存在，其中，L_i 和 R_i 分别是 L 和 R 的对应于标准型（1.1）的子向量，$i=1, 2,\cdots, r$。

先证结论（a）。显然，对 $\forall i \in \{1, 2,\cdots, r\}$条件（$\mathrm{i}_i$）蕴涵 $r\geqslant 2$，且由 $T_{ii}>0$ 不可约可知，λ 是 T 的一个简单特征值。所以，L 和 R 分别是 T 的对应于 λ 的唯一左和右特征向量。由文献［11］中的引理6.2 的对偶形式可知：

$$L_m=0 \qquad (m=1,\cdots, i-1) \tag{1.2}$$

并且由 $T_{ii}>0$ 不可约可知，L_i 是 T_{ii}的对应于 $\lambda=\rho(T_{ii})$ 的唯一正的左特征向量。此外，若 $i<r$，则由公式（1.2）和 $LT=\lambda L$ 可得：

$$L_k=\sum_{j=i}^{k-1} L_j T_{jk}(\lambda I_k - T_{kk})^{-1} \qquad (k=i+1,\cdots, r) \tag{1.3}$$

其中，I_i 是相应的单位矩阵，$i=1, 2,\cdots, r$，且由条件（i_i）和 T_{kk}是不可约的或是一个一阶非负矩阵以及文献［1］中第六章的（3.11）定理可知，$\lambda I_k - T_{kk}$ 非奇异且 $(\lambda I_k - T_{kk})^{-1}\gg 0$，$k=i+1,\cdots, r$。根据公式（1.3），若 $i<r$，则：

$$L_{i+1}=L_i T_{ii+1}(\lambda I_{i+1} - T_{i+1i+1})^{-1} \tag{1.4$_i$}$$

若 $i<r-1$，令 $b_0=i$，我们需要用数学归纳法证明：

$$L_a = L_i\left\{T_{ia} + \sum_{j=1}^{a-1-i}\left[\sum_{b_1=i+1}^{a-j}\cdots\sum_{b_j=b_{j-1}+1}^{a-1}\prod_{x=1}^{j} T_{b_{x-1}b_x}(\lambda I_{b_x} - T_{b_xb_x})^{-1}T_{b_ja}\right]\right\}(\lambda I_a - T_{aa})^{-1}$$

$$(a=i+2,\cdots, r) \tag{1.5$_i$}$$

令 $F_k=(\lambda I_k - T_{kk})^{-1}$，$k=i+1,\cdots, r$。根据公式(1.3)和公式(1.4$_i$)可得：

$$L_{i+2}=(L_iT_{ii+2}+L_{i+1}T_{i+1i+2})F_{i+2}=L_i(T_{ii+2}+T_{ii+1}F_{i+1}T_{i+1i+2})F_{i+2}$$

即 $r=i+2$ 时，公式（1.5$_i$）成立。假定 $r=m$ 时，公式（1.5$_i$）成立。即：

$$L_a = L_i\left[T_{ia} + \sum_{j=1}^{a-1-i}\left(\sum_{b_1=i+1}^{a-j}\cdots\sum_{b_j=b_{j-1}+1}^{a-1}\prod_{x=1}^{j} T_{b_{x-1}b_x}F_{b_x}T_{b_ja}\right)\right]F_a$$

$$(a=i+2,\cdots, m) \tag{1.6}$$

我们只需证：

$$L_{m+1} = L_i\left[T_{im+1} + \sum_{j=1}^{m-i}\left(\sum_{b_1=i+1}^{m+1-j}\cdots\sum_{b_j=b_{j-1}+1}^{m}\prod_{x=1}^{j} T_{b_{x-1}b_x}F_{b_x}T_{b_jm+1}\right)\right]F_{m+1}$$

由公式（1.3）和公式（1.4$_i$）可得：