McGraw Hill Education

国外优秀数学教材系列

复变函数及其应用

（翻译版·原书第9版）

Complex Variables and Applications

[美] 詹姆斯·沃德·布朗(James Ward Brown)
鲁埃尔 V. 丘吉尔(Ruel V. Churchill) 著
张继龙 李升 陈宝琴 译

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

国外优秀数学教材系列

复变函数及其应用

（翻译版·原书第9版）

[美] 詹姆斯·沃德·布朗（James Ward Brown）
鲁埃尔 V. 丘吉尔（Ruel V. Churchill） 著
张继龙 李 升 陈宝琴 译

机械工业出版社

James Ward Brown, Ruel V. Churchill
Complex Variables and Applications
978-0073383170

图书在版编目（CIP）数据

复变函数及其应用：第 9 版/（美）布朗（Brown，J. W. ），（美）丘吉尔（Churchill，R. V. ）著；张继龙，李升，陈宝琴译. —北京：机械工业出版社，2015.12

书名原文：Complex Variables and applications

国外优秀数学教材系列

ISBN 978-7-111-50506-8

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①布… ②丘… ③张… ④李… ⑤陈… Ⅲ. ①复变函数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 129147 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：汤 嘉 责任编辑：汤 嘉 王 芳 任正一 版式设计：霍永明
责任校对：陈延翔 封面设计：张 静 责任印制：李 洋
北京振兴源印务有限公司印刷
2016 年 4 月第 1 版 • 第 1 次印刷
169mm×239mm • 30 印张 • 653 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-50506-8
定价：69.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www.golden-book.com

本书是一部经典的复变函数教材，已经有70多年的历史，被密歇根大学、美国加州理工学院、普渡大学等众多国际名校采用。全书共有12章，分别介绍了复数、解析函数、初等函数、积分、级数、留数和极点、留数的应用、初等函数的映射、共形映射、施瓦茨-克里斯托费尔映射、泊松型积分公式等内容。

本书一直致力于突出有着重要应用的理论部分，尤其介绍了留数和共形映射的应用，留数的应用包括用它来计算实数广义积分，求拉普拉斯逆变换和函数的零点。共形映射主要是解热传导和流体流动中产生的边值问题。本书对应原书第9版，新版本添加了很多例子，为了阐明刚刚学过的理论，将例子作为单独的一节紧随其后；另外还根据读者意见重新安排了章节内容，使得更加利于教学。此外在书后配有部分习题的辅导，方便读者自学。

本书可作为理工科专业学生的教材，也可作为相关科研工作者的参考书。

詹姆斯·沃德·布朗（James Ward Brown）密歇根大学迪尔本分校数学系荣誉教授. 取得哈佛大学理学学士学位和密歇根大学科学技术研究院数学硕士和博士学位. 他与丘吉尔博士合著了《傅里叶级数和边值问题》，目前刊印到第9版. 他曾获美国国家科学基金和密歇根大专院校董事会协会杰出教师奖，被列入世界名人录.

鲁埃尔V. 丘吉尔（Ruel V. Churchill）密歇根大学数学系荣誉教授，从1922年开始在密歇根大学任教，1987年去世，曾取得芝加哥大学理学学士学位和密歇根大学物理硕士学位以及密歇根大学数学博士学位. 他和布朗博士合著了《傅里叶级数和边值问题》，这是一部经典著作，大约起草于75年前. 他还编写了《运算数学》一书. 他曾在美国数学学会和其他数学协会或委员会担任过多种职务.

译 者 序

本书英文版已经有70多年的历史，是一部经典复变函数教材，被密歇根大学等众多国际名校采用。本书内容丰富，不仅包含复变函数的基本内容，还介绍了留数和共形映射的应用。全书行文流畅、语言简练、定理的证明通俗易懂。本书的定义定理等重要部分都使用黑体字，还配有大量的图形和例题加以说明，很适合初学者学习。译者多年从事复分析方向的研究，在翻译本书的时候受益匪浅，感觉本书内容非常流畅，结论水到渠成，特别适合数学、物理或工程专业修完“微积分”的高年级学生使用，同时也适合研究生自学。

本书英文第7版由北京师范大学邓冠铁教授等翻译，已经由机械工业出版社出版，是一部非常好的翻译教材。本书翻译英文第9版，如序言中所述，该版本较之前的第7版和第8版有了很大的变动，需要重新翻译，这是翻译本书的初衷。

本书前4章以及序言由张继龙翻译，第5~8章由陈宝琴翻译，第9~12章由李升翻译。译者们感谢高宗升教授给予的指导意见，感谢柴富杰在本书翻译过程中给予的帮助。在翻译过程中，译者忠实原著，同时兼顾中文语言习惯。

由于译者的水平有限，敬请读者批评指正。

张继龙

于北京航空航天大学

作　者　序

本版本包含很多新例子，有些例子来源于上一版本的习题. 为了阐明刚刚学过的理论，通常我们将例子作为单独的一节紧随其后.

内容的清晰度用其他方式得到了加强. 我们用粗体字使得定义更加容易识别. 本书包含15个新图并对大量已有的图进行完善. 当定理证明比较长的时候，我们把证明清晰地分成几个部分. 例如，第49节在证明关于原函数存在和应用的三部分定理的时候，证明分成了三部分. 第51节关于柯西-古萨定理的证明也一样. 最后，本书配有《复变函数及其应用习题解答》. 该书包含第1章到第7章部分习题的求解过程，其中包含了留数的题目.

为了适应尽可能多的读者，我们偶尔添加脚注，使读者可以参考微积分和高等微积分中关于结论的详细的证明和讨论. 关于复变量著作的其他参考目录见附录A，其中大部分是高等的. 附录B给出了常用的区域映射图.

我们已经说过，本版本中的一些变动是由上一版本的使用者提出的. 此外，在准备此版本的时候，很多人给予了关注和支持，尤其是麦格劳·希尔出版社的工作人员和我的妻子 Jacqueline Read Brown.

詹姆斯·沃德·布朗
James Ward Brown

前　言

本书是单复变函数理论及应用的一本教科书，供一学期使用．本书保持了之前版本的基本内容和风格，最初两版是由已故的 Ruel V. Churchill 独自编写而成．

本书有两个主要目标．第一个目标是发展那些在应用中表现突出的理论部分．第二个目标是介绍留数和共形映射的应用．留数的应用包括用它来计算实数反常积分，求拉普拉斯逆变换和函数的零点．共形映射可以用来解热传导和流体流动中产生的边值问题．作者的另一著作《傅里叶变换和边值问题》讲解了一种解偏微分方程边值问题的另一种经典方法，因此本书可以看作是该书的姊妹篇．

本书前 9 章在密歇根大学作为必修的课程已经有很多年了．后 3 章有一些变动主要是用来自学和参考．本书主要适用于数学．工程或物理专业的高年级学生．学习本书之前，应该至少完成三学期的微积分课程和一个学期的常微分方程课程的学习．如果想在本书中提前学习初等函数的映射，读者可以在完成第 3 章后直接跳到第 8 章学习初等函数，然后再回来学习第 4 章的积分．

我们介绍一些此版本的变动，其中一些变动是使用过本书的学生和教师提出的．首先移动了很多内容．例如，虽然在第 2 章仍然介绍调和函数，但是共轭调和函数挪到了第 9 章，因为第 9 章更需要共轭调和函数．另外，证明代数基本定理的一个重要不等式的推导从第 4 章移到了第 1 章，因为第 1 章介绍了与其密切相关的不等式．这样做的优点在于把这些不等式放在一起可以使读者关注这些不等式，而且使得代数基本定理的证明更加简明，不让读者分心．第 2 章对映射定义的介绍有所缩短，只强调了映射 $w=z^2$．这是上一版的读者提出的建议，因为他们觉得在第 2 章用这一个例子阐明映射的定义就足够了．最后，因为第 5 章学习的大多数泰勒级数和洛朗级数依赖于读者对 6 个麦克劳林级数的熟悉程度，我们把它们放在一起方便读者查询．另外，第 5 章在泰勒定理之后包含单独的一节，主要致力于涉及 $z-z_0$ 的负次幂的级数表达式．经验表明，这使得从泰勒级数到洛朗级数的转变显得很自然．

目　录

第1章 复数

本章我们将概述复数系的代数和几何结构. 我们假设读者已经熟知实数的相关性质.

1. 和与积

复数可定义为有序实数对(x,y). 就像实数x可以认为是实轴上的点一样，复数也可以看作是复平面上的点，其直角坐标分别是x和y. 当实数x被看作实轴上的点$(x,0)$时，我们将之记作$x=(x,0)$，这样实数显然就是复数的子集. 形如$(0, y)$的复数，对应y轴上的点，且在$y\neq 0$时称为纯虚数，因此y轴也叫虚轴.

习惯上用z表示复数(x,y)，即（见图1）

$$z=(x,y). \tag{1}$$

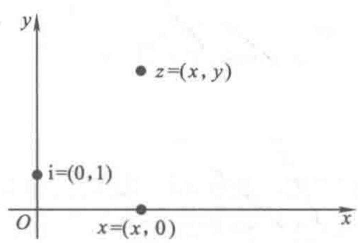

图1

我们分别称实数x和y为z的实部和虚部，记作

$$x=\mathrm{Re}z, \quad y=\mathrm{Im}z. \tag{2}$$

两个复数z_1和z_2相等是指它们有相同的实部和相同的虚部. 因此$z_1=z_2$表示z_1和z_2对应复平面（或z平面）上的同一个点.

两个复数$z_1=(x_1,y_1)$和$z_2=(x_2,y_2)$的和z_1+z_2与乘积z_1z_2分别定义如下，

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2), \tag{3}$$

$$(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,y_1x_2+x_1y_2). \tag{4}$$

注意到当限制z_1，z_2为实数时，由方程(3)和方程(4)所定义的运算将变为一般的加法和乘法运算，即

$$(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0),$$

$$(x_1,0)(x_2,0)=(x_1x_2,0).$$

因此，复数系是实数系的一个自然推广.

任意复数 $z=(x,y)$ 可以写成 $z=(x,0)+(0,y)$，并且容易看到$(0,1)(y,0)=(0,y)$. 因此，

$$z=(x,0)+(0,1)(y,0),$$

如果我们把实数看作是 x 或$(x,0)$，并且用 i 表示纯虚数$(0,1)$，如图 1 所示，则显然有

$$z=x+\mathrm{i}y. \tag{5}$$

另外，应用约定 $z^2=zz$，$z^3=z^2z$ 等，我们有

$$\mathrm{i}^2=(0,1)(0,1)=(-1,0),$$

或

$$\mathrm{i}^2=-1. \tag{6}$$

因为$(x,y)=x+\mathrm{i}y$，所以定义(3)和定义(4)就变成

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2), \tag{7}$$

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(y_1x_2+x_1y_2). \tag{8}$$

注意到上述两方程的右端可由把左端各项从形式上当成实数运算得来，其中遇到的 i^2用 -1 代替. 另外，方程(8)告诉我们任何复数与零的乘积是零. 更确切地说，对任意复数 $z=x+\mathrm{i}y$，有

$$z\cdot 0=(x+\mathrm{i}y)(0+\mathrm{i}0)=0+\mathrm{i}0=0.$$

2. 基本代数性质

复数加法和乘法的各种性质与实数相同. 我们这里列出一些最基本的代数性质，并且证明其中的一些性质. 其他性质留为习题.

交换律

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\ z_1z_2=z_2z_1 \tag{1}$$

和结合律

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3),\ (z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3) \tag{2}$$

容易从第 1 节中复数加法和乘法的定义以及实数也满足相同的运算规律得到. 同理，分配律

$$z(z_1+z_2)=zz_1+zz_2 \tag{3}$$

也成立.

* 在电气工程中，用字母 j 代替 i.

例　如果 $z_1=(x_1,\ y_1)$，$z_2=(x_2,\ y_2)$，则

$$z_1+z_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)=(x_2+x_1,y_2+y_1)=z_2+z_1.$$

由乘法交换律得 $\mathrm{i}y=y\mathrm{i}$. 因此，$z=x+y\mathrm{i}$ 可写成 $z=x+\mathrm{i}y$. 而因为结合律，和 $z_1+z_2+z_3$ 与积 $z_1z_2z_3$ 不用括号就可定义，这和实数的情况一样.

实数的加法单位元 $0=(0,\ 0)$ 和乘法单位元 $1=(1,\ 0)$ 同样适用于复数．即对任意的复数 z，都有

$$z+0=z \text{ 和 } z\cdot 1=z. \tag{4}$$

此外，0 和 1 是具有这种性质的唯一复数(见练习 8).

对于每一个复数 $z=(x,y)$，存在一个加法逆元

$$-z=(-x,\ -y) \tag{5}$$

满足方程 $z+(-z)=0$. 对于给定的复数 z，加法逆元唯一，这是因为方程

$$(x,y)+(u,v)=(0,0)$$

意味着

$$u=-x \text{ 和 } v=-y.$$

对任意非零复数 $z=(x,y)$，存在复数 z^{-1}，使得 $zz^{-1}=1$. 这个乘法逆元不像加法逆元那么明显．为了得到它，我们找出实数 u 和 v，使得对上述的 x 和 y 有

$$(x,y)(u,v)=(1,0).$$

根据第 1 节中两个复数的乘法定义式(4)，u 和 v 一定满足线性方程组

$$xu-yv=1,\quad yu+xv=0.$$

通过简单计算，得到唯一解

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

所以 $z=(x,y)$ 的乘法逆元是

$$z^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\quad (z\neq 0). \tag{6}$$

当 $z=0$ 时，逆元没有定义. 事实上，$z=0$ 意味着 $x^2+y^2=0$，而这在式(6)中是不允许的.

练　　习

1. 验证：

(a) $(\sqrt{2}-\mathrm{i})-\mathrm{i}(1-\sqrt{2}\mathrm{i})=-2\mathrm{i}$;

(b) $(2,-3)(-2,1)=(-1,8)$;

(c) $(3,1)(3,-1)\left(\frac{1}{5},\ \frac{1}{10}\right)=(2,1)$.

2. 证明：

(a) $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)=-\mathrm{Im}z$;

(b) $\mathrm{Im}(\mathrm{i}z)=\mathrm{Re}z$.

3. 证明：$(1+z)^2=1+2z+z^2$.

4. 验证：两个复数 $z=1\pm \mathrm{i}$ 都满足方程 $z^2-2z+2=0$.

5. 证明：第2节开始给出的两个复数的乘法交换律.

6. 验证：第2节开始给出的

(a) 加法结合律；

(b) 分配律(3).

7. 用加法结合律和分配律证明：

$$z(z_1+z_2+z_3)=zz_1+zz_2+zz_3.$$

8. (a)记$(x,y)+(u,v)=(x,y)$，并指出复数$0=(0,0)$是满足此性质的唯一的加法单位元.(b)同样，记$(x,y)(u,v)=(x,y)$，并证明：$1=(1,0)$是满足此性质的唯一的乘法单位元.

9. 利用$-1=(-1,0)$和$z=(x,y)$证明：$(-1)z=-z$.

10. 利用$\mathrm{i}=(0,1)$和$y=(y,0)$验证：$-(\mathrm{i}y)=(-\mathrm{i})y$. 从而证明：复数$z=x+\mathrm{i}y$的加法逆元可以写为$-z=-x-\mathrm{i}y$.

11. 通过

$$(x,y)(x,y)+(x,y)+(1,0)=(0,0)$$

解关于x和y的线性方程组，然后，求解关于$z=(x,y)$的方程$z^2+z+1=0$.

提示：应用没有实数x满足上述方程这一事实证明$y\neq 0$.

答案：$z=\left(-\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. 其他代数性质

本节，我们给出一些有关复数加法和乘法的其他代数性质，这些性质可以由第2节叙述的性质推出．因为这些性质同样适用于实数，所以它们对复数是可以预计成立的，读者可直接跳到第4节而不会有太大障碍.

首先，根据乘法逆元的存在性我们可以证明：如果z_1和z_2的乘积是零，则z_1和z_2至少有一个是零. 因为假设$z_1z_2=0$且$z_1\neq 0$，则逆元z_1^{-1}存在. 根据任何复数乘以零等于零(第1节)，我们有

$$z_2=z_2\cdot 1=z_2(z_1z_1^{-1})=(z_1^{-1}z_1)z_2=z_1^{-1}(z_1z_2)=z_1^{-1}\cdot 0=0.$$

也就是说，如果$z_1z_2=0$，则$z_1=0$或者$z_2=0$，或者z_1和z_2都等于零．此结论的另外一种表述是如果两个复数z_1和z_2都不是零，则它们的乘积z_1z_2也不是零.

减法和除法分别定义为加法和乘法的逆运算：

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2), \tag{1}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1z_2^{-1}\quad (z_2\neq 0). \tag{2}$$

因此，根据第2节中的式(5)和式(6)，当$z_1=(x_1,y_1)$，$z_2=(x_2,y_2)$时，我们有

$$z_1-z_2=(x_1,y_1)+(-x_2,-y_2)=(x_1-x_2,y_1-y_2) \tag{3}$$

和

$$\frac{z_1}{z_2}=(x_1,y_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{-y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)\quad (z_2\neq 0). \tag{4}$$

应用 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$，我们可以把式(3)和式(4)分别改写为

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{5}$$

和

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0). \tag{6}$$

式(6)不容易记忆，不过它可以通过以下途径得到，先写出(见练习 7)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}, \tag{7}$$

然后把右端分子和分母中的乘积分别乘出，最后利用性质得到

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = (z_1 + z_2)z_3^{-1} = z_1z_3^{-1} + z_2z_3^{-1} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} \quad (z_3 \neq 0). \tag{8}$$

从式(7)出发的动机见第 5 节．

例　方法说明如下：

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{5+14i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i.$$

涉及商的一些预期性质来自于关系式

$$\frac{1}{z_2} = z_2^{-1} \quad (z_2 \neq 0), \tag{9}$$

也就是当 $z_1 = 1$ 时的式(2)．应用关系式(9)，我们可以将式(2)写成如下形式

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_2}\right) \quad (z_2 \neq 0). \tag{10}$$

另外，注意到(见练习 3)

$$(z_1z_2)(z_1^{-1}z_2^{-1}) = (z_1z_1^{-1})(z_2z_2^{-1}) = 1 \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0),$$

所以我们有 $z_1^{-1}z_2^{-1} = (z_1z_2)^{-1}$，从而可以由关系式(9)得到

$$\left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right) = z_1^{-1}z_2^{-1} = (z_1z_2)^{-1} = \frac{1}{z_1z_2} \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0). \tag{11}$$

另一个将会在练习中出现的有用的性质是

$$\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right) = \frac{z_1z_2}{z_3z_4} \quad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0). \tag{12}$$

最后，我们指出涉及实数的二项式公式对复数仍然成立．也即如果 z_1 和 z_2 是任意两个非零复数，则

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{13}$$

其中，

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n).$$

并且约定 $0! = 1$．证明留为练习．由于复数的加法满足交换律，二项式公式当然也可以写为

$$(z_1+z_2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1^{n-k}z_2^k \quad (n=1,2,\cdots). \tag{14}$$

练　　习

1. 把下列各式化为实数：

(a) $\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2-i}{5i}$;

(b) $\dfrac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$;

(c) $(1-i)^4$.

答案　(a) $-2/5$;　(b) $-1/2$;　(c) -4.

2. 证明：

$$\frac{1}{1/z}=z \quad (z\neq 0).$$

3. 应用乘法结合律和交换律证明：

$$(z_1z_2)(z_3z_4)=(z_1z_3)(z_2z_4).$$

4. 证明：如果 $z_1z_2z_3=0$，则至少有一个因子为零．

提示：记 $(z_1z_2)z_3=0$，并应用关于两个因子（第 3 节）的类似结论．

5. 通过第 3 节式(6)之后描述的方法，推导第 3 节关于商 z_1/z_2 的式(6).

6. 应用第 3 节式(10)和式(11)，推导等式

$$\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right)=\frac{z_1z_2}{z_3z_4} \quad (z_3\neq 0,z_4\neq 0).$$

7. 应用练习 6 中的等式推导消去律

$$\frac{z_1z}{z_2z}=\frac{z_1}{z_2} \quad (z_2\neq 0,z\neq 0).$$

8. 应用数学归纳法验证第 3 节中二项式公式(13). 具体地说，当 $n=1$ 时公式成立．然后，假设当 $n=m$ 时，式（13）成立，这里 m 表示任何一个正整数，证明：当 $n=m+1$ 时公式也成立．

提示：当 $n=m+1$ 时，记

$$(z_1+z_2)^{m+1}=(z_1+z_2)(z_1+z_2)^m=(z_2+z_1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}z_1^kz_2^{m-k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}z_1^kz_2^{m+1-k}+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}z_1^{k+1}z_2^{m-k},$$

然后在最后一个和式中用 $k-1$ 代替 k 得到

$$(z_1+z_2)^{m+1}=z_2^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\left[\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right]z_1^kz_2^{m+1-k}+z_1^{m+1}.$$

最后，说明上式右端怎样变成

$$z_2^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}z_1^kz_2^{m+1-k}+z_1^{m+1}=\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}z_1^kz_2^{m+1-k}.$$

4. 向量和模

由任何非零复数 $z=x+iy$ 联想到复平面中从原点到代表 z 的点 $(x,\ y)$ 的有向线段