

Mc
Graw
Hill
Education



复变函数 及其应用

(翻译版·原书第9版)

Complex Variables
and Applications

詹姆斯·沃德·布朗 (James Ward Brown)

[美] 鲁埃尔 V. 丘吉尔 (Ruel V. Churchill) 著

张继龙 李升 陈宝琴 译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

国外优秀数学教材系列

复变函数及其应用

(翻译版·原书第9版)

[美] 詹姆斯·沃德·布朗 (James Ward Brown) 著
鲁埃尔 V. 丘吉尔 (Ruel V. Churchill)
张继龙 李 升 陈宝琴 译



机械工业出版社

James Ward Brown, Ruel V. Churchill
Complex Variables and Applications
978-0073383170

Copyright © 2014 by McGraw-Hill Education.

All Rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including without limitation photocopying, recording, taping, or any database, information or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

This authorized Chinese translation edition is jointly published by McGraw-Hill Education and China Machine Press. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only, excluding Hong Kong, Macao SAR and Taiwan.

Copyright © 2015 by McGraw-Hill Education and China Machine Press.

版权所有。未经出版人事先书面许可, 对本出版物的任何部分不得以任何方式或途径复制或传播, 包括但不限于复印、录制、录音, 或通过任何数据库、信息或可检索的系统。

本授权中文简体字翻译版由麦格劳-希尔(亚洲)教育出版公司和机械工业出版社合作出版。此版本经授权仅限在中华人民共和国境内(不包括香港特别行政区、澳门特别行政区和台湾)销售。

版权© 2015 由麦格劳-希尔(亚洲)教育出版公司与机械工业出版社所有。

本书封面贴有 McGraw-Hill Education 公司防伪标签, 无标签者不得销售。

北京市版权局著作权合同登记 图字: 01-2014-0321 号。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数及其应用: 第9版/(美)布朗(Brown, J. W.), (美)丘吉尔(Churchill, R. V.)著; 张继龙, 李升, 陈宝琴译. —北京: 机械工业出版社, 2015.12

书名原文: Complex Variables and applications

国外优秀数学教材系列

ISBN 978-7-111-50506-8

I. ①复… II. ①布… ②丘… ③张… ④李… ⑤陈… III. ①复变函数—高等学校—教材 IV. ①O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第129147号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑: 汤嘉 责任编辑: 汤嘉 王芳 任正一 版式设计: 霍永明

责任校对: 陈延翔 封面设计: 张静 责任印制: 李洋

北京振兴源印务有限公司印刷

2016年4月第1版·第1次印刷

169mm×239mm·30印张·653千字

标准书号: ISBN 978-7-111-50506-8

定价: 69.00元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

电话服务

服务咨询热线: 010-88379833

读者购书热线: 010-88379649

网络服务

机工官网: www.cmpbook.com

机工官博: weibo.com/cmp1952

教育服务网: www.cmpedu.com

金书网: www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版

本书是一部经典的复变函数教材，已经有 70 多年的历史，被密歇根大学、美国加州理工学院、普渡大学等众多国际名校采用。全书共有 12 章，分别介绍了复数、解析函数、初等函数、积分、级数、留数和极点、留数的应用、初等函数的映射、共形映射、施瓦茨-克里斯托费尔映射、泊松型积分公式等内容。

本书一直致力于突出有着重要应用的理论部分，尤其介绍了留数和共形映射的应用，留数的应用包括用它来计算实数广义积分，求拉普拉斯逆变换和函数的零点。共形映射主要是解热传导和流体流动中产生的边值问题。本书对应原书第 9 版，新版本添加了很多例子，为了阐明刚刚学过的理论，将例子作为单独的一节紧随其后；另外还根据读者意见重新安排了章节内容，使得更加利于教学。此外在书后配有部分习题的辅导，方便读者自学。

本书可作为理工科专业学生的教材，也可作为相关科研工作者的参考书。



詹姆斯·沃德·布朗 (James Ward Brown) 密歇根大学迪尔本分校数学系荣誉教授。取得哈佛大学理学学士学位和密歇根大学科学技术研究院数学硕士和博士学位。他与丘吉尔博士合著了《傅里叶级数和边值问题》，目前刊印到第9版。他曾获美国国家科学基金和密歇根大专院校董事会协会杰出教师奖，被列入世界名人录。

鲁埃尔 V. 丘吉尔 (Ruel V. Churchill) 密歇根大学数学系荣誉教授，从1922年开始在密歇根大学任教，1987年去世，曾取得芝加哥大学理学学士学位和密歇根大学物理硕士学位以及密歇根大学数学博士学位。他和布朗博士合著了《傅里叶级数和边值问题》，这是一部经典著作，大约起草于75年前。他还编写了《运算数学》一书。他曾在美国数学学会和其他数学协会或委员会担任过多种职务。

译者序

本书英文版已经有 70 多年的历史，是一部经典复变函数教材，被密歇根大学等众多国际名校采用。本书内容丰富，不仅包含复变函数的基本内容，还介绍了留数和共形映射的应用。全书行文流畅、语言简练、定理的证明通俗易懂。本书的定义定理等重要部分都使用黑体字，还配有大量的图形和例题加以说明，很适合初学者学习。译者多年从事复分析方向的研究，在翻译本书的时候受益匪浅，感觉本书内容非常流畅，结论水到渠成，特别适合数学、物理或工程专业修完“微积分”的高年级学生使用，同时也适合研究生自学。

本书英文第 7 版由北京师范大学邓冠铁教授等翻译，已经由机械工业出版社出版，是一部非常好的翻译教材。本书翻译英文第 9 版，如序言中所述，该版本较之前的第 7 版和第 8 版有了很大的变动，需要重新翻译，这是翻译本书的初衷。

本书前 4 章以及序言由张继龙翻译，第 5~8 章由陈宝琴翻译，第 9~12 章由李升翻译。译者们感谢高宗升教授给予的指导意见，感谢柴富杰在本书翻译过程中给予的帮助。在翻译过程中，译者忠实原著，同时兼顾中文语言习惯。

由于译者的水平有限，敬请读者批评指正。

张继龙

于北京航空航天大学

作者序

本版本包含很多新例子，有些例子来源于上一版本的习题。为了阐明刚刚学过的理论，通常我们将例子作为单独的一节紧随其后。

内容的清晰度用其他方式得到了加强。我们用粗体字使得定义更加容易识别。本书包含 15 个新图并对大量已有的图进行完善。当定理证明比较长的时候，我们把证明清晰地分成几个部分。例如，第 49 节在证明关于原函数存在和应用的三部分定理的时候，证明分成了三部分。第 51 节关于柯西-古萨定理的证明也一样。最后，本书配有《复变函数及其应用习题解答》。该书包含第 1 章到第 7 章部分习题的求解过程，其中包含了留数的题目。

为了适应尽可能多的读者，我们偶尔添加脚注，使读者可以参考微积分和高等微积分中关于结论的详细的证明和讨论。关于复变量著作的其他参考目录见附录 A，其中大部分是高等的。附录 B 给出了常用的区域映射图。

我们已经说过，本版本中的一些变动是由上一版本的使用者提出的。此外，在准备此版本的时候，很多人给予了关注和支持，尤其是麦格劳·希尔出版社的工作人员和我的妻子 Jacqueline Read Brown。

詹姆斯·沃德·布朗

James Ward Brown

前 言

本书是单复变函数理论及应用的一本教科书，供一学期使用。本书保持了之前版本的基本内容和风格，最初两版是由已故的 Ruel V. Churchill 独自编写而成。

本书有两个主要目标。第一个目标是发展那些在应用中表现突出的理论部分。第二个目标是介绍留数和共形映射的应用。留数的应用包括用它来计算实数反常积分，求拉普拉斯逆变换和函数的零点。共形映射可以用来解热传导和流体流动中产生的边值问题。作者的另一著作《傅里叶变换和边值问题》讲解了一种解偏微分方程边值问题的另一种经典方法，因此本书可以看作是该书的姊妹篇。

本书前 9 章在密歇根大学作为必修的课程已经有很多年了。后 3 章有一些变动主要是用来自学和参考。本书主要适用于数学、工程或物理专业的高年级学生。学习本书之前，应该至少完成三学期的微积分课程和一个学期的常微分方程课程的学习。如果想在本书中提前学习初等函数的映射，读者可以在完成第 3 章后直接跳到第 8 章学习初等函数，然后再回来学习第 4 章的积分。

我们介绍一些此版本的变动，其中一些变动是使用过本书的学生和教师提出的。首先移动了很多内容。例如，虽然在第 2 章仍然介绍调和函数，但是共轭调和函数挪到了第 9 章，因为第 9 章更需要共轭调和函数。另外，证明代数基本定理的一个重要不等式的推导从第 4 章移到了第 1 章，因为第 1 章介绍了与其密切相关的不等式。这样做的优点在于把这些不等式放在一起可以使读者关注这些不等式，而且使得代数基本定理的证明更加简明，不让读者分心。第 2 章对映射定义的介绍有所缩短，只强调了映射 $w = z^2$ 。这是上一版的读者提出的建议，因为他们觉得在第 2 章用这一个例子阐明映射的定义就足够了。最后，因为第 5 章学习的大多数泰勒级数和洛朗级数依赖于读者对 6 个麦克劳林级数的熟悉程度，我们把它放在一起方便读者查询。另外，第 5 章在泰勒定理之后包含单独的一节，主要致力于涉及 $z - z_0$ 的负次幂的级数表达式。经验表明，这使得从泰勒级数到洛朗级数的转变显得很自然。

目 录

译者序

作者序

前言

第 1 章 复数 1

1. 和与积 1
2. 基本代数性质 2
3. 其他代数性质 4
4. 向量和模 6
5. 三角不等式 8
6. 共轭复数 11
7. 指数形式 13
8. 指数形式的乘积与幂 16
9. 乘积与商的辐角 17
10. 复数的根 20
11. 例子 22
12. 复平面中的区域 26

第 2 章 解析函数 30

13. 函数与映射 30
14. 映射 $w = z^2$ 32
15. 极限 35
16. 关于极限的定理 37
17. 涉及无穷远点的极限 39
18. 连续性 41
19. 导数 44
20. 导数的运算法则 46
21. 柯西-黎曼方程 49
22. 例子 50
23. 可微的充分条件 51
24. 极坐标 53
25. 解析函数的定义及性质 56
26. 其他例子 58
27. 调和函数 60
28. 唯一确定的解析函数 63

29. 反射原理 64

第 3 章 初等函数 67

30. 指数函数 67
31. 对数函数 70
32. 例子 71
33. 对数函数的分支和导数 72
34. 一些涉及对数的恒等式 75
35. 幂函数 77
36. 例子 78
37. 三角函数 $\sin z$ 和 $\cos z$ 80
38. 三角函数的零点和奇点 82
39. 双曲函数 85
40. 反三角函数与反双曲函数 87

第 4 章 积分 90

41. 函数 $w(t)$ 的导数 90
42. 函数 $w(t)$ 的定积分 91
43. 围线 94
44. 围线积分 98
45. 一些例子 100
46. 涉及支割线的例子 103
47. 围线积分的模的上界 107
48. 原函数 111
49. 定理的证明 114
50. 柯西-古萨定理 117
51. 定理的证明 119
52. 单连通区域 123
53. 多连通区域 124
54. 柯西积分公式 129
55. 柯西积分公式的推广 130
56. 推广的柯西积分公式的证明 133
57. 推广的柯西积分公式的一些
结果 134
58. 刘维尔定理与代数基本定理 137
59. 最大模原理 138

第5章 级数	143	第8章 初等函数的映射	240
60. 序列的收敛性	143	96. 线性变换	240
61. 级数的收敛性	145	97. 变换 $w = 1/z$	242
62. 泰勒级数	148	98. $1/z$ 的映射	242
63. 泰勒定理的证明	149	99. 分式线性变换	246
64. 例子	151	100. 隐式分式线性变换	248
65. $(z - z_0)$ 的负次幂	154	101. 上半平面的映射	251
66. 洛朗级数	157	102. 例子	253
67. 洛朗定理的证明	159	103. 指数函数的映射	255
68. 例子	161	104. 垂线段在 $w = \sin z$ 映射下的象	256
69. 幂级数的绝对收敛和一致收敛	167	105. 水平线段在 $w = \sin z$ 映射下 的象	258
70. 幂级数的和函数的连续性	169	106. 与正弦函数相关的映射	259
71. 幂级数的积分与求导	171	107. z^2 的映射	262
72. 级数展开式的唯一性	173	108. $z^{1/2}$ 的分支的映射	263
73. 幂级数的乘法和除法	177	109. 多项式的平方根	266
第6章 留数和极点	182	110. 黎曼曲面	271
74. 孤立奇点	182	111. 相关函数的曲面	273
75. 留数	184	第9章 共形映射	276
76. 柯西留数定理	187	112. 保角性和伸缩因子	276
77. 无穷远点处的留数	188	113. 两个例子	278
78. 三种类型的孤立奇点	191	114. 局部逆变换	280
79. 例子	193	115. 调和共轭	282
80. 极点处的留数	194	116. 调和函数的映射	285
81. 例子	196	117. 边界条件的映射	287
82. 解析函数的零点	199	第10章 共形映射的应用	292
83. 零点和极点	201	118. 稳定温度	292
84. 函数在孤立奇点附近的性质	205	119. 半平面上的稳定温度	293
第7章 留数的应用	208	120. 一个相关问题	295
85. 广义积分的计算	208	121. 在象限内的温度	297
86. 计算广义积分的例子	210	122. 静电势	301
87. 傅里叶分析中的广义积分	214	123. 求解电势问题的例子	302
88. 若尔当引理	216	124. 二维的流体流动	306
89. 缩进路径	221	125. 流函数	308
90. 绕分支点的缩进路径	223	126. 沿拐角和柱面的流动	310
91. 沿着交割线的积分	225	第11章 施瓦茨-克里斯托费尔 映射	316
92. 涉及正弦和余弦的定积分	229	127. 实轴到多边形的映射	316
93. 辐角原理	232	128. 关于施瓦茨-克里斯托费尔	
94. 儒歇定理	234		
95. 拉普拉斯逆变换	237		

映射	317	38. 三角函数的零点和奇点	379
129. 三角形和矩形	320	39. 双曲函数	382
130. 退化的多边形	323	40. 反三角函数与反双曲函数	384
131. 管道内通过狭缝的流体流动	327	第4章 积分	384
132. 有支管的管道内的流动	329	42. 函数 $w(t)$ 的定积分	384
133. 导电板边缘的静电势	331	43. 围线	385
第12章 泊松型积分公式	335	46. 涉及支割线的例子	386
134. 泊松积分公式	335	47. 围线积分的模的上界	389
135. 圆盘的狄利克雷问题	337	49. 定理的证明	392
136. 例子	339	53. 多连通区域	393
137. 相关的边值问题	342	57. 推广的柯西积分公式的一些 结果	395
138. 施瓦茨积分公式	344	第5章 级数	399
139. 半平面的狄利克雷问题	345	61. 级数的收敛性	399
140. 诺伊曼问题	348	65. $(z - z_0)$ 的负次幂	400
部分习题解答	352	68. 例子	402
第1章 复数	352	72. 级数展开式的唯一性	406
2. 基本代数性质	352	73. 幂级数的乘法和除法	407
3. 其他代数性质	353	第6章 留数和极点	411
5. 三角不等式	353	77. 无穷远点处的留数	411
6. 共轭复数	355	79. 例子	416
9. 乘积与商的辐角	357	81. 例子	419
11. 例子	360	83. 零点和极点	423
12. 复平面上的区域	363	第7章 留数的应用	428
第2章 解析函数	365	86. 广义积分计算的例子	428
14. 映射 $w = z^2$	365	88. 若尔当引理	438
18. 连续性	366	91. 沿着支割线的积分	445
20. 导数的运算法则	367	92. 涉及正弦和余弦的定 积分	451
24. 极坐标	368	94. 儒歇定理	452
26. 其他例子	371	95. 拉普拉斯逆变换	454
27. 调和函数	371	附录A 参考文献	459
第3章 初等函数	372	附录B 区域映射图 (见 第8章)	462
30. 指数函数	372		
33. 对数函数的分支和导数	375		
34. 一些涉及对数的恒等式	377		
36. 例子	378		

第 1 章

复数

本章我们将概述复数系的代数和几何结构. 我们假设读者已经熟知实数的相关性质.

1. 和与积

复数可定义为有序实数对 (x, y) . 就像实数 x 可以认为是实轴上的点一样, 复数也可以看作是复平面上的点, 其直角坐标分别是 x 和 y . 当实数 x 被看作实轴上的点 $(x, 0)$ 时, 我们将之记作 $x = (x, 0)$, 这样实数显然就是复数的子集. 形如 $(0, y)$ 的复数, 对应 y 轴上的点, 且在 $y \neq 0$ 时称为纯虚数, 因此 y 轴也叫虚轴.

习惯上用 z 表示复数 (x, y) , 即 (见图 1)

$$z = (x, y). \quad (1)$$

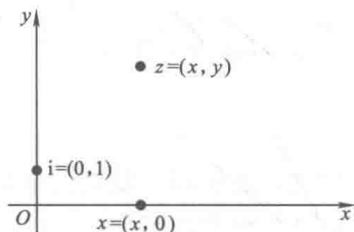


图 1

我们分别称实数 x 和 y 为 z 的实部和虚部, 记作

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \quad (2)$$

两个复数 z_1 和 z_2 相等是指它们有相同的实部和相同的虚部. 因此 $z_1 = z_2$ 表示 z_1 和 z_2 对应复平面 (或 z 平面) 上的同一个点.

两个复数 $z_1 = (x_1, y_1)$ 和 $z_2 = (x_2, y_2)$ 的和 $z_1 + z_2$ 与乘积 $z_1 z_2$ 分别定义如下,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (3)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2). \quad (4)$$

注意到当限制 z_1, z_2 为实数时, 由方程 (3) 和方程 (4) 所定义的运算将变为一般的加法和乘法运算, 即

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0).$$

因此, 复数系是实数系的一个自然推广.

任意复数 $z = (x, y)$ 可以写成 $z = (x, 0) + (0, y)$, 并且容易看到 $(0, 1)(y, 0) = (0, y)$. 因此,

$$z = (x, 0) + (0, 1)(y, 0),$$

如果我们把实数看作是 x 或 $(x, 0)$, 并且用 i 表示纯虚数 $(0, 1)$, 如图 1 所示, 则显然有

$$z = x + iy. \quad (5)$$

另外, 应用约定 $z^2 = zz$, $z^3 = z^2 z$ 等, 我们有

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0),$$

或

$$i^2 = -1. \quad (6)$$

因为 $(x, y) = x + iy$, 所以定义(3)和定义(4)就变成

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \quad (7)$$

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2). \quad (8)$$

注意到上述两方程的右端可由把左端各项从形式上当成实数运算得来, 其中遇到的 i^2 用 -1 代替. 另外, 方程(8)告诉我们任何复数与零的乘积是零. 更确切地说, 对任意复数 $z = x + iy$, 有

$$z \cdot 0 = (x + iy)(0 + i0) = 0 + i0 = 0.$$

2. 基本代数性质

复数加法和乘法的各种性质与实数相同. 我们这里列出一些最基本的代数性质, 并且证明其中的一些性质. 其他性质留为习题.

交换律

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad (1)$$

和结合律

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \quad (2)$$

容易从第 1 节中复数加法和乘法的定义以及实数也满足相同的运算规律得到. 同理, 分配律

$$z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2 \quad (3)$$

也成立.

* 在电气工程中, 用字母 j 代替 i .

例 如果 $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, 则

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = z_2 + z_1.$$

由乘法交换律得 $iy = yi$. 因此, $z = x + yi$ 可写成 $z = x + iy$. 而因为结合律, 和 $z_1 + z_2 + z_3$ 与积 $z_1 z_2 z_3$ 不用括号就可定义, 这和实数的情况一样.

实数的加法单位元 $0 = (0, 0)$ 和乘法单位元 $1 = (1, 0)$ 同样适用于复数. 即对任意的复数 z , 都有

$$z + 0 = z \text{ 和 } z \cdot 1 = z. \quad (4)$$

此外, 0 和 1 是具有这种性质的唯一复数(见练习 8).

对于每一个复数 $z = (x, y)$, 存在一个加法逆元

$$-z = (-x, -y) \quad (5)$$

满足方程 $z + (-z) = 0$. 对于给定的复数 z , 加法逆元唯一, 这是因为方程

$$(x, y) + (u, v) = (0, 0)$$

意味着

$$u = -x \text{ 和 } v = -y.$$

对任意非零复数 $z = (x, y)$, 存在复数 z^{-1} , 使得 $zz^{-1} = 1$. 这个乘法逆元不像加法逆元那么明显. 为了得到它, 我们找出实数 u 和 v , 使得对上述的 x 和 y 有

$$(x, y)(u, v) = (1, 0).$$

根据第 1 节中两个复数的乘法定义式(4), u 和 v 一定满足线性方程组

$$xu - yv = 1, \quad yu + xv = 0.$$

通过简单计算, 得到唯一解

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

所以 $z = (x, y)$ 的乘法逆元是

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad (z \neq 0). \quad (6)$$

当 $z = 0$ 时, 逆元没有定义. 事实上, $z = 0$ 意味着 $x^2 + y^2 = 0$, 而这在式(6)中是不允许的.

练 习

1. 验证:

- (a) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i) = -2i$;
- (b) $(2, -3)(-2, 1) = (-1, 8)$;
- (c) $(3, 1)(3, -1)\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right) = (2, 1)$.

2. 证明:

- (a) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}z$;
- (b) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}z$.

3. 证明: $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$.

4. 验证: 两个复数 $z = 1 \pm i$ 都满足方程 $z^2 - 2z + 2 = 0$.

5. 证明: 第2节开始给出的两个复数的乘法交换律.

6. 验证: 第2节开始给出的

(a) 加法结合律;

(b) 分配律(3).

7. 用加法结合律和分配律证明:

$$z(z_1 + z_2 + z_3) = zz_1 + zz_2 + zz_3.$$

8. (a) 记 $(x, y) + (u, v) = (x, y)$, 并指出复数 $0 = (0, 0)$ 是满足此性质的唯一的加法单位元. (b) 同样, 记 $(x, y)(u, v) = (x, y)$, 并证明: $1 = (1, 0)$ 是满足此性质的唯一的乘法单位元.

9. 利用 $-1 = (-1, 0)$ 和 $z = (x, y)$ 证明: $(-1)z = -z$.

10. 利用 $i = (0, 1)$ 和 $y = (y, 0)$ 验证: $-(iy) = (-i)y$. 从而证明: 复数 $z = x + iy$ 的加法逆元可以写为 $-z = -x - iy$.

11. 通过

$$(x, y)(x, y) + (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$$

解关于 x 和 y 的线性方程组, 然后, 求解关于 $z = (x, y)$ 的方程 $z^2 + z + 1 = 0$.

提示: 应用没有实数 x 满足上述方程这一事实证明 $y \neq 0$.

$$\text{答案: } z = \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

3. 其他代数性质

本节, 我们给出一些有关复数加法和乘法的其他代数性质, 这些性质可以由第2节叙述的性质推出. 因为这些性质同样适用于实数, 所以它们对复数是可以预计成立的, 读者可直接跳到第4节而不会有太大障碍.

首先, 根据乘法逆元的存在性我们可以证明: 如果 z_1 和 z_2 的乘积是零, 则 z_1 和 z_2 至少有一个是零. 因为假设 $z_1 z_2 = 0$ 且 $z_1 \neq 0$, 则逆元 z_1^{-1} 存在. 根据任何复数乘以零等于零(第1节), 我们有

$$z_2 = z_2 \cdot 1 = z_2(z_1 z_1^{-1}) = (z_1^{-1} z_1) z_2 = z_1^{-1}(z_1 z_2) = z_1^{-1} \cdot 0 = 0.$$

也就是说, 如果 $z_1 z_2 = 0$, 则 $z_1 = 0$ 或者 $z_2 = 0$, 或者 z_1 和 z_2 都等于零. 此结论的另外一种表述是如果两个复数 z_1 和 z_2 都不是零, 则它们的乘积 $z_1 z_2$ 也不是零.

减法和除法分别定义为加法和乘法的逆运算:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2), \quad (1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \quad (z_2 \neq 0). \quad (2)$$

因此, 根据第2节中的式(5)和式(6), 当 $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ 时, 我们有

$$z_1 - z_2 = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \quad (3)$$

和

$$\frac{z_1}{z_2} = (x_1, y_1) \left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right) \quad (z_2 \neq 0). \quad (4)$$

应用 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$, 我们可以把式(3)和式(4)分别改写为

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (5)$$

和

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0). \quad (6)$$

式(6)不容易记忆, 不过它可以通过以下途径得到, 先写出(见练习7)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}, \quad (7)$$

然后把右端分子和分母中的乘积分别乘出, 最后利用性质得到

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = (z_1 + z_2)z_3^{-1} = z_1 z_3^{-1} + z_2 z_3^{-1} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} \quad (z_3 \neq 0). \quad (8)$$

从式(7)出发的动机见第5节.

例 方法说明如下:

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{5+14i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i.$$

涉及商的一些预期性质来自于关系式

$$\frac{1}{z_2} = z_2^{-1} \quad (z_2 \neq 0), \quad (9)$$

也就是当 $z_1 = 1$ 时的式(2). 应用关系式(9), 我们可以将式(2)写成如下形式

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \left(\frac{1}{z_2} \right) \quad (z_2 \neq 0). \quad (10)$$

另外, 注意到(见练习3)

$$(z_1 z_2)(z_1^{-1} z_2^{-1}) = (z_1 z_1^{-1})(z_2 z_2^{-1}) = 1 \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0),$$

所以我们有 $z_1^{-1} z_2^{-1} = (z_1 z_2)^{-1}$, 从而可以由关系式(9)得到

$$\left(\frac{1}{z_1} \right) \left(\frac{1}{z_2} \right) = z_1^{-1} z_2^{-1} = (z_1 z_2)^{-1} = \frac{1}{z_1 z_2} \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0). \quad (11)$$

另一个将会在练习中出现的有用的性质是

$$\left(\frac{z_1}{z_3} \right) \left(\frac{z_2}{z_4} \right) = \frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} \quad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0). \quad (12)$$

最后, 我们指出涉及实数的二项式公式对复数仍然成立. 也即如果 z_1 和 z_2 是任意两个非零复数, 则

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (13)$$

其中,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

并且约定 $0! = 1$. 证明留为练习. 由于复数的加法满足交换律, 二项式公式当然也可以写为

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k \quad (n=1, 2, \dots). \quad (14)$$

练习

1. 把下列各式化为实数:

(a) $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$;

(b) $\frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$;

(c) $(1-i)^4$.

答案 (a) $-2/5$; (b) $-1/2$; (c) -4 .

2. 证明:

$$\frac{1}{1/z} = z \quad (z \neq 0).$$

3. 应用乘法结合律和交换律证明:

$$(z_1 z_2)(z_3 z_4) = (z_1 z_3)(z_2 z_4).$$

4. 证明: 如果 $z_1 z_2 z_3 = 0$, 则至少有一个因子为零.

提示: 记 $(z_1 z_2) z_3 = 0$, 并应用关于两个因子(第3节)的类似结论.

5. 通过第3节式(6)之后描述的方法, 推导第3节关于商 z_1/z_2 的式(6).

6. 应用第3节式(10)和式(11), 推导等式

$$\left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right) = \frac{z_1 z_2}{z_3 z_4} \quad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0).$$

7. 应用练习6中的等式推导消去律

$$\frac{z_1 z}{z_2 z} = \frac{z_1}{z_2} \quad (z_2 \neq 0, z \neq 0).$$

8. 应用数学归纳法验证第3节中二项式公式(13). 具体地说, 当 $n=1$ 时公式成立. 然后, 假设当 $n=m$ 时, 式(13)成立, 这里 m 表示任何一个正整数, 证明: 当 $n=m+1$ 时公式也成立.

提示: 当 $n=m+1$ 时, 记

$$(z_1 + z_2)^{m+1} = (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^m = (z_2 + z_1) \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z_1^k z_2^{m-k} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z_1^k z_2^{m+1-k} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} z_1^{k+1} z_2^{m-k},$$

然后在最后一个和式中用 $k-1$ 代替 k 得到

$$(z_1 + z_2)^{m+1} = z_2^{m+1} + \sum_{k=1}^m \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right] z_1^k z_2^{m+1-k} + z_1^{m+1}.$$

最后, 说明上式右端怎样变成

$$z_2^{m+1} + \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} z_1^k z_2^{m+1-k} + z_1^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} z_1^k z_2^{m+1-k}.$$

4. 向量和模

由任何非零复数 $z = x + iy$ 联想到复平面中从原点到代表 z 的点 (x, y) 的有向线段