21世纪高等学校工科数学辅导教材

大学生数学竞赛分类解析

聂宏 祝丹梅 刘晶 等编著

化学工业出版社

21世纪高等学校工科数学辅导教材

大学生数学竞赛分类解析

聂宏 祝丹梅 刘晶 等编著

化学工业出版社
·北京·

本书以“中国大学生数学竞赛大纲”的要求为依据，专门为大学生数学竞赛而编写。

全书共分八个专题，总计29节。每节内容涵盖知识要点、重点题型解析及综合训练三部分。全书知识要点、解题技巧归纳清晰明了，典型题目丰富，解析过程论述深入浅出，富有启发性。同时为方便学习，节末附有综合训练的参考答案。

本书既可作为大学生数学竞赛培训教程，也可作为硕士研究生入学考试复习的重要辅导资料，对学习高等数学的读者是一本有益的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

大学生数学竞赛分类解析/聂宏等编著. —北京：化学工业出版社，2015.12

21世纪高等学校工科数学辅导教材

ISBN 978-7-122-25914-1

Ⅰ.①大… Ⅱ.①聂… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第297841号

责任编辑：郝英华　　装帧设计：韩　飞

责任校对：战河红

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　装：三河市延风印装有限公司

787mm×1092mm　1/16　印张16¾　字数512千字　2015年12月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888(传真：010-64519686)　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：39.00元

前言

FOREWORD

2009 年，首届全国大学生数学竞赛开始举办。作为一项面向本科生的全国性高水平学科赛事，全国大学生数学竞赛为青年学子提供了一个展示数学基本功和数学思维的舞台，为发现和选拔优秀数学人才、促进高等学校数学课程建设起到了积极的推动作用，为数学课程的改革积累了丰富的调研素材。

鉴于大学生数学竞赛时效性强、目前专门指导教材不多见、考生复习缺乏针对性的现状，辽宁石油化工大学数学竞赛指导组按照“中国大学生数学竞赛大纲”的要求，结合多年指导大学生数学竞赛的经验编写此书，其目的是为考生备考提供有益的帮助和指导。

全书共分八个专题，分别为函数、极限、连续，一元函数微分学，一元函数积分学，常微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数。专题 1、2 由刘敏执笔，专题 3 由李金秋执笔，专题 4、6 由聂宏执笔，专题 7 由祝丹梅执笔，专题 5、8 由刘晶执笔。全书由祝丹梅统稿，聂宏教授审阅并修改全文。

专题包含竞赛大纲（2015 版）以及各节内容。在每节中包括知识要点、重点题型解析及综合训练三部分。其中，知识要点主要阐述重要概念和基础理论知识、解题方法和处理技巧。通过重点题型解析，对竞赛真题及技巧性较强的题目进行分析、论证和评注，使学生能融会贯通地掌握相关知识。在综合训练部分配备了针对性强的习题，通过练习进一步巩固解题方法与解题技巧。

本书在编写过程中得到了辽宁石油化工大学教务处的大力支持和帮助，在此深表谢意。

由于水平有限，书中疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编著者

2015 年 12 月

目录

CONTENTS

专题 6 多元函数微分学 146

专题 7 多元函数积分学 175

专题 8 无穷级数 237

专题1　函数、极限、连续

竞赛大纲

（1）函数的概念及表示法、简单应用问题的函数关系的建立.

（2）函数的性质：有界性、单调性、周期性和奇偶性.

（3）复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数.

（4）数列极限与函数极限的定义及其性质、函数的左极限与右极限.

（5）无穷小和无穷大的概念及其关系、无穷小的性质及无穷小的比较.

（6）极限的四则运算、极限存在的单调有界准则和夹逼准则、两个重要极限.

（7）函数的连续性（含左连续与右连续）、函数间断点的类型.

（8）连续函数的性质和初等函数的连续性.

（9）闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理）.

1.1　函数与极限

一、知识要点

1. 函数的概念与性质

（1）函数的定义：设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 f：$D\subset\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，简记为 $y=f(x),x\in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

（2）函数的性质：有界性，单调性，奇偶性，周期性.

（3）基本初等函数：幂函数 $y=x^{\mu}$（$\mu\in\mathbf{R}$）；

指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）；

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$）；

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等；

反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

（4）初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并可以用一个式子表示的函数．如：$y=\sqrt{\sin(2^{x}-1)}$.

2. 极限的概念与性质

(1) 数列极限的定义：设 $\{x_n\}$ 为一数列，若存在常数 a 满足

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in \mathbf{R}^{+},\ 当 n>N 时，有 |x_n-a|<\varepsilon$$

成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \text{ 或 } x_n\to a\ (n\to\infty).$$

(2) 收敛数列的性质：极限唯一性，全局有界性，局部保号性.

(3) 函数极限的定义

① 函数极限的定义 1：设函数 $f(x)$ 在$U(x_0)$ 内有定义，若存在常数 A 满足

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ 当 0<|x-x_0|<\delta 时，有 |f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

② 函数极限的定义 2：设函数 $f(x)$ 在 $|x|>P>0$ 内有定义，若存在常数 A 满足

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists X>0,\ 当 |x|>X 时，有 |f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

(4) 函数极限的性质：极限唯一性，局部有界性，局部保号性.

(5) 函数极限与数列极限的关系（归结原则或海涅定理）：若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n\neq x_0$ $(n\in\mathbf{R})$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

注意 ① 若将上述关系中的 x_0 换为∞，结论仍成立.

② 特别地，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$.

3. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小的定义：若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小.

(2) 无穷小的性质：① 有限个无穷小的和、差、积也是无穷小.

② 有界函数与无穷小的乘积也是无穷小.

注意 有限个无穷小的商不一定还是无穷小，具体情况见下面无穷小的比较.

(3) 无穷小的比较：设 f 及 g 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，且 $g\neq 0$，$\lim \dfrac{f}{g}$也是在这个变化过程中的极限，

① 若 $\lim \dfrac{f}{g}=0$，则称 f 是比 g 高阶的无穷小，g 是比 f 低阶的无穷小，记作 $f=o(g)$；

② 若 $\lim \dfrac{f}{g}=c\neq 0$，则称 f 与 g 是同阶无穷小；

③ 若 $\lim \dfrac{f}{g^k}=c\neq 0$ $(k>0)$，则称 f 是关于 g 的 k 阶无穷小；

④ 若 $\lim \dfrac{f}{g}=1$，则称 f 与 g 是等价无穷小，记作 $f\sim g$.

注意 当 $k=1$ 时，1 阶无穷小即为同阶无穷小；当 $c=1$ 时，同阶无穷小变成等价无穷小，即等价无穷小为同阶无穷小的特殊情况.

(4) 无穷大的定义：设函数 $f(x)$ 在$U(x_0)$（或 $|x|>P>0$）内有定义，若

$\forall M>0$，$\exists\delta>0$（或 $X>0$），当 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$）时，有 $|f(x)|>M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大.

(5) 无穷小与无穷大的关系：在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

注意 无穷小与无穷大的关系简言之为倒数关系.

4. 极限的计算

方法总结如下.

(1) 利用极限定义.

注意 此法能解决的求极限问题非常有限，更常用于证明极限的问题.

(2) 利用极限运算法则. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)$ 均存在，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)\pm\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x);$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)g(x)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x);$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)}\quad\left[\text{此时需加条件}\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)\neq 0\right].$$

特殊地，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[Cf(x)]=C\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)]^n=[\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)]^n$.

(3) 利用函数的连续性：若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

(4) 变形消去分母中的零因子：约分，通分，有理化，倒代换，等差、等比数列求和公式等.

(5) 利用特殊极限：

$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0(a>0)$；

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^p}{a^n}=0(a>0,p>0)$；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$；

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\,[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}]$.

注意 通过换元法，不难发现以上特殊极限可以代表相应的一类极限：

$\lim\limits_{\alpha(n)\to+\infty} q^{\alpha(n)}=0(|q|<1)$；$\lim\limits_{\alpha(n)\to+\infty}\sqrt[\alpha(n)]{\alpha(n)}=1$；

$\lim\limits_{\alpha(n)\to+\infty}\dfrac{\alpha^p(n)}{a^{\alpha(n)}}=0(a>0,p>0)$；$\lim\limits_{\alpha(x)\to0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$；$\lim\limits_{\alpha(n)\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha(n)}\right)^{\alpha(n)}=\mathrm{e}$；

$\lim\limits_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)}=\mathrm{e}(\lim\limits_{\alpha(x)\to0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e})$.

(6) 等价无穷小代换：当 $x\to0$ 时，

$$\mathrm{e}^x-1\sim x,a^x-1\sim x\ln a,\ln(1+x)\sim x,\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a},$$

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,(1+x)^\mu-1\sim\mu x.$$

注意 以上等价无穷小都代表相应的一类等价无穷小：只要 $\alpha(x)\to0$,

$$\mathrm{e}^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x),a^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)\ln a,\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x),\log_a(1+\alpha(x))\sim\frac{\alpha(x)}{\ln a},$$

$$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\tan\alpha(x)\sim\alpha(x),1-\cos\alpha(x)\sim\frac{1}{2}\alpha^2(x),$$

$$\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x),\arctan\alpha(x)\sim\alpha(x),(1+\alpha(x))^\mu-1\sim\mu\alpha(x).$$

(7) 利用无穷小和无穷大的性质.

① 有限个无穷小的和、差、积也是无穷小.

② 有界函数与无穷小的乘积也是无穷小.

③ 无穷小和无穷大互为倒数关系.

④ $\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 是同一变化过程中的无穷小.

(8) 两边夹准则（迫敛准则或夹逼准则）：若当 $x\in U(x_0)$（或 $|x|>M$）时有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$（或$\infty$），则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A\ (\text{或}\infty).$$

注意 此法常用于求 n 项和式的极限.

(9) 单调有界准则：单调有界数列必有极限.

注意 此法常用于解决递推数列的极限问题，可以具体化为“单调增加有上界必有极限”和“单调减少有下界必有极限”.

(10) 洛必达法则. 设 $f(x)$，$g(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}g(x)=0$（或$\infty$），若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$（或$\infty$），则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A(\text{或}\infty).$$

注意 此法适用于求未定式：$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，1^∞，∞^0，0^0 的极限，其中

$$0\cdot\infty\to\frac{0}{0}\text{或}\frac{\infty}{\infty};\quad\infty-\infty\to\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\to\frac{0-0}{0\cdot0}\to\frac{0}{0};$$

$$1^\infty\to\mathrm{e}^{\infty\ln1}\to\mathrm{e}^{\infty\cdot0};\quad\infty^0\to\mathrm{e}^{0\ln\infty}\to\mathrm{e}^{0\cdot\infty};\quad0^0\to\mathrm{e}^{0\ln0}\to\mathrm{e}^{0\cdot\infty}.$$

(11) 利用函数极限和数列极限的关系.

注意 此法可将数列极限转化为函数极限，进而利用求导等方法.

(12) 利用泰勒展开式：若函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内 n 次可导，则

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}x+\frac{f''(x_0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

常见函数在 $U(0)$ 内的麦克劳林展开式：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n-1});$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n});$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n);$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n).$$

(13) 利用导数的定义：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

(14) 利用定积分的定义：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

特殊地，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $\xi_i=\frac{i}{n}$ 或 $\xi_i=\frac{i-1}{n}$ 或 $\xi_i=\frac{2i-1}{2n}$.

注意 此法常用于求 n 项和式的极限.

(15) 利用级数的敛散性：

$$\lim_{n\to\infty}s_n=s\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{ 收敛}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

注意 级数的敛散性就是其部分和数列的极限问题，所以数列极限和级数的敛散性密切相关，尤其是某些 n 项和式的极限可以借助级数的相关知识来解决.

(16) 利用微分或积分中值公式：

拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

二、重点题型解析

【例 1.1】（首届全国大学生数学竞赛预赛试题）求极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}\quad (n\in\mathbf{R}^+)$$

解析 法 1：利用恒等变形及洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{e}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e[\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n]}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e(e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx})}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}}=e^{\frac{n+1}{2}e}.$$

法 2：利用第二重要极限，

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{n}\right)^{\frac{n}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}}\right]^{\frac{e(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n)}{nx}}$$

$$=e^{e\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}-n}{nx}}=e^{e\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{n}}=e^{\frac{n+1}{2}e}.$$

【例 1.2】（第二届全国大学生数学竞赛决赛试题）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解析 法 1：利用恒等变形、等价无穷小代换和洛必达法则，

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}-1+1\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{(1/2)x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{(1/2)x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{(3/2)x^2}}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

法 2：利用第二重要极限，

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\cdot\frac{1}{2}x^2}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}}=e^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}}=e^{-\frac{1}{3}}.$$

评注 例 1.1 和例 1.2 均属于求“幂指函数 $f(x)^{g(x)}$”的极限，此类极限的求解常有两种方法，一种是借助恒等变形 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$，转化为求指数部分的极限；另一种是利用第二重要极限（本质为 1^{∞}）. 另外，在处理对数部分时，既可用洛必达法则，如例 1.1 的法 1，也可用等价无穷小代换，如例 1.2 的法 1.

【例 1.3】（首届全国大学生数学竞赛决赛试题）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right]$.

解析 由归结原则、倒代换和洛必达法则，

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to0^+}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

评注 本题将未定式 $0\cdot\infty$ 转化为 $\frac{0}{0}$，之后借助倒代换化简函数式．一般函数式中的 $\frac{1}{x}$ 比 x 多的时候，常借助倒代换化简．另外本题又涉及到幂指函数 $f(x)^{g(x)}$ 的求导，其方法是借助恒等变形 $f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$，再利用复合函数的求导法则．

【例 1.4】 （第二届全国大学生数学竞赛决赛试题）求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right).$$

解析 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln2.$$

【例 1.5】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+(2n-1)}\right)$.

解析 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+(2n-1)}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+(2i-1)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+2\,\frac{2i-1}{2n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+2x}\mathrm{d}x=\ln\sqrt{3}\ .$$

评注 例 1.4 和例 1.5 属于求“n 项和式”的极限，采用的方法是利用定积分的定义，将“n 项和式”的极限转化为某个函数在某个区间的定积分，而常用的区间是 $[0,1]$．另外注意例 1.4 中 $\xi_i=\frac{i}{n}$，例 1.5 中 $\xi_i=\frac{2i-1}{2n}$.

【例 1.6】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

解析 $\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\leqslant\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$,

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

评注 本题是通过将定积分的定义和两边夹准则这两种方法结合在一起解决的.

【例 1.7】 (2011 年辽宁省大学生数学竞赛试题) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right).$$

解析 由
$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

可得 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2.$$

评注 本题借助了等差数列前 n 项和公式化简分母, 出现$\frac{1}{n(n+1)}$, 考虑裂项为$\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$的技巧.

【例 1.8】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}$.

解析 因为 $$u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{u_n},$$
$$u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}=\frac{1}{4n}\cdot\frac{1}{u_n},$$

有$\frac{1}{4n}\leqslant u_n^2\leqslant\frac{1}{2n+1}$, 即

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}=0.$$

评注 本题的表达式比较特殊, 处理的方法是放缩, 放大和缩小之后的式子中仍然出现原来的表达式, 进而通过移项找到上下"界", 而后利用两边夹准则.

【例 1.9】 (首届全国大学生数学竞赛决赛试题) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$.

解析 利用泰勒展开式和定积分定义

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left[\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\pi\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\pi\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\pi\int_0^1(1+x)x\,\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{6}.\end{aligned}$$

评注 本题若直接用定积分定义, 很难分离出代表区间长度的项$\frac{1}{n}$, 故先用泰勒展开式将 sin 去掉.

【例 1.10】 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\tan x^2[x+\ln(1-x)]}$.

解析 利用泰勒展开式

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

于是
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\tan x^2[x+\ln(1-x)]}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)-1+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{8}-o(x^4)}{x^2\left[x-x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^4}{12}+o(x^4)}{-\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)}=\frac{1}{6}.$$

评注 一般当所给的函数式中含有的函数类型很多且为代数和式时，可考虑用泰勒展开式，进而能将各种类型的函数都统一成多项式函数.

【例 1.11】（第二届全国大学生数学竞赛预赛试题）设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，$|a|<1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解析 根据所给表达式的特点，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}x_n&=\lim_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\\&=\frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\\&=\frac{1}{1-a}\lim_{n\to\infty}(1-a^{2^{n+1}})=\frac{1}{1-a}.\end{aligned}$$

评注 本题借助平方差公式将所给的 $n+1$ 项的乘积进行化简减项.

【例 1.12】 设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解析 由不等式$\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\dfrac{1}{a_n}}=1$ 知 $\{a_n\}$ 有下界，故只需再证 $\{a_n\}$ 单调递减，

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-a_n\right),$$

由 $a_n\geqslant 1$，有 $a_{n+1}-a_n\leqslant 0$，即 $a_{n+1}\leqslant a_n$. 由 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$，对 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$，令 $n\to\infty$，两边取极限得 $b=\dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$，解得 $b=\pm 1$. 舍去-1，得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

评注 本题是求“递推数列”的极限，此类极限常用的方法就是先用“单调有界准则”证明极限存在，再对递推式两边同时取极限求得.

【例 1.13】 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

解析 利用等价无穷小代换

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)}&=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{\ln(1+x^2)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\ln(1+x^2)}+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

评注 请判别下列解法是否正确：

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1;$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{3}{2}.$$

这两种解法均是错误的．第一种解法的错误是将原式中的部分先取了极限，而另一部分不取极限，这显然是不合理的，因为变量的变化过程是同时的．第二种解法的错误是对式中的加、减项作等价无穷小的代换，尽管此题的结果是对的，但这只是巧合，这样的代换是不允许的．

【例 1.14】 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

解析 根据分子、分母间的特殊关系，

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x(1-e^{\sin x-x})}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}e^x\lim_{x\to0}\frac{1-e^{\sin x-x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-(\sin x-x)}{x-\sin x}=1.$$

评注 在计算$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^{\sin x-x}}{x-\sin x}$时，除了利用等价无穷小代换外，还可以利用洛必达法则.

【例 1.15】 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+3)^a-x]=b\neq0$，求 a，b 的值.

解析 因为

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^5+7x^4+3)^a-x]=\lim_{x\to+\infty}x\left[x^{5a-1}\left(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)^a-1\right]=b\neq0,$$

有 $5a-1=0$，所以

$$a=\frac{1}{5},\ b=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)^{\frac{1}{5}}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{7}{x}+\frac{3}{x^5}\right)=\frac{7}{5}.$$

评注 本题属未定式$\infty-\infty$，处理方法是转化为乘积形式，并且需知道：∞只有当其与0相乘时，极限才有可能存在.

【例 1.16】 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq0,f'(0)\neq0$，若 $af(x)+bf(2x)-f(0)$ 在 $x\to0$ 时是比 x 高阶的无穷小，试确定 a，b 的值.

解析 由题设条件，运用洛必达法则可得

$$0=\lim_{x\to0}\frac{af(x)+bf(2x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{af'(x)+2bf'(2x)}{1}=(a+2b)f'(0).$$

根据已知 $f'(0)\neq0$，则 $a+2b=0$；又

$$0=\lim_{x\to0}[af(x)+bf(2x)-f(0)]=(a+b-1)f(0),$$

以及已知 $f(0)\neq 0$，从而 $a+b-1=0$；所以

$$\begin{cases}a+2b=0\\a+b-1=0\end{cases}\Rightarrow a=2,b=-1.$$

评注 本题考查的是无穷小比较的知识，需了解各种无穷小关系的定义．另外还用到：当分母极限为0时，整体极限要想存在，分子的极限必须是0.

【例1.17】（首届全国大学生数学竞赛决赛试题）设 $f(x)$ 在 $x=1$ 附近有定义，且在 $x=1$ 可导，$f(1)=0$，$f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}$.

解析 借助函数在一点的导数定义凑形，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\cos x-\cos^2 x)}{\cos x-\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2+x\tan x}\right]$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x(x+\tan x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(x+\tan x)}=\frac{1}{2}.$$

评注 本题属于含有抽象函数的求极限问题，因为已知中给出了函数在一点的导数，故考虑应用函数在一点的导数定义，切记本题不能用洛必达法则，因为已知中没有提供函数在某个区间或邻域内可导的信息.

【例1.18】 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，且 $f(a)>0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right)^x$.

解析 借助第二重要极限凑形，

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}}\right]^{\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)\cdot\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)\cdot\frac{1}{x}}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$$

评注 本题既用到了第二类重要极限，又用到了函数在一点的导数定义.

【例1.19】（首届全国大学生数学竞赛决赛试题）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，无穷积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y}\int_0^y xf(x)\mathrm{d}x$.

解析 由题设条件，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\to l\ (x\to+\infty)$，显然 $F'(x)=f(x)$.

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\mathrm{d}x=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y x\mathrm{d}F(x)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\left[yF(y)-\int_0^y F(x)\mathrm{d}x\right]=\lim_{y\to+\infty}\left[F(y)-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)\mathrm{d}x\right]=l-l=0.$$

评注 本题属于综合求极限的问题，主要用到了反常积分、分部积分公式和积分上限函数的求导知识，需知道：一个函数的积分上限函数就是它的一个原函数.