全国成人高考复习指要丛书

数学

（速成本）

主编　王鸿仁　陈康煊

精编·强化·速成

华东师范大学出版社

全国成人高考复习指要丛书

数学

（速成本）

王鸿仁　陈康煊　主编

王德纲　唐清成　编著

华东师范大学出版社

(沪)新登字第 201 号

全国成人高考复习指要丛书

数　　学

(速 成 本)

王鸿仁　陈康煊　主编

华东师范大学出版社出版发行
(上海中山北路 3663 号)
邮政编码: 200062
新华书店上海发行所经销　　商务印书馆上海印刷厂印刷
开本: 850×1168　1/32　印张: 11.75　字数: 305 千字
1993 年 8 月第一版　　1993 年 8 月第 1 次印刷
印数: 01—11,000 本

ISBN 7-5617-1039-9/G·454　　　　定　价: 7.90 元

前　　言

我国经济的繁荣和社会的进步，从根本上说取决于提高劳动者的素质，培养大批专门人才。全国各行各业的兴旺发达，急需大量各级各类的人才．为了适应社会对人才的需要，国家在积极发展普通高等教育的同时，必定大力发展成人高等教育，吸收具有高中学历有志接受高等教育的成人参加学习，把他们培养成为社会主义建设需要的专门人才．因此，成人高考将成为广大愿意接受高等教育的成年人的必经之路．

近年来，全国众多有志者，利用业余时间，积极复习功课，参加成人高等学校统一招生考试．但是由于成人高考有其特殊要求，难以直接借用普通中学现行教材，给他们的复习迎考带来一定困难．不少考生期望尽快编写出一套适合成人特点的复习指导丛书．

为此，我们按照全国各类成人高等学校(包括广播电视大学、成人高等学校、农民高等学校、管理干部学校、教育学院和教师进修学院、独立设置的函授学院、普通高等学校举办的干部专修科、师资班、函授部、夜大学等等)对新生所必需具备的高中文化基础知识和能力要求，并根据国家教委1992年重新审核制订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》，组织以上海华东师范大学第二附属中学为主的一批有多年成人教学经验的中高级教师，编写出这套《全国成人高考复习指要丛书》．全套丛书共八册，包括政治、语文、数学、物理、化学、历史、地理、英语等八个科目，每册二十万字左右。

丛书从成人教育的特点出发，考虑到报考成人高校考生迎考

复习时间有限，提出在“精编”这两个字上下功夫，在编写中抓住各科知识的基础、重点和难点，力求做到内容精、质量高、实用性强，以达到速成的目的．既可帮助考生复习，进行自我检测；也可帮助教师备课，检查教学效果．总之，这套丛书既可作成人高复班的辅导教材，也是自学者的良师益友．

主　编

1993 年 6 月

编者的话

«全国成人高考复习指要丛书·数学»(速成本)是根据国家教委重新审核制订的«全国各类成人高等学校招生复习考试大纲»的要求编写的.

«数学»(速成本)一书共有三编. 第一编是单元复习和练习. 把数学的四大部分: 代数、三角、立体几何和平面解析几何分成十四个单元, 每个单元都有知识点、学习和解题方法指导、练习题及自测题. 提供迎考成人高校必备的数学知识, 配有一定数量的例题, 帮助考生理解和掌握这些知识, 所配的练习题和自测题, 题量和难度适当; 第二编是综合测试. 共有六套综合测试题, 其中理工医农类四套, 文史财经类两套. 供考生考前总复习和检查复习效果之用. 第三类是练习题、自测题和综合测试题参考解答. 最后还附有最近几年全国成人高考试题及解答分析, 帮助考生了解成人高考要求.

凡报考理工农医类的考生必需复习本书的全部内容, 而报考文史、财经类的考生只需复习书中标题及题号前不标有"▲"的内容.

本书既可作为成人高考教学参考书, 也是有志自学者的良师益友. 参加本书编写是华东师范大学第二附中高级教师唐清成和王德纲. 由于时间仓促, 限于水平, 疏漏缪误之处, 在所难免, 恳请广大读者批评指正.

目　　录

第一编　单元复习和学习解题指导

第一单元　数、式、方程和方程组

知　识　点

一、实数

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{array}\right\}\text{有限小数或循环小数}\\ \text{无理数}\left\{\begin{array}{l}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{array}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

二、式

1. 代数式及其分类

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}$$

2. 代数式的运算

(1) 整式运算中常用公式：

乘法公式：

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;$$
$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3;$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3.$$

幂运算公式： $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$；

$a^m\div a^n=a^{m-n}\quad(a\neq 0,\ m>n)$；

$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$.

(2) 分式运算：

$$\left(\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}\right)=\frac{ad\pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad(n\text{ 为正整数}).$$

3．多项式因式分解：

常用方法：提取公因式法、公式法、分组分解法、十字相乘法、求根公式法等．

4．二次根式运算

加减法：先把各二次根式化为最简二次根式，然后合并同类二次根式．

乘除法则应用下列公式：

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab},\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

三、方程和方程组

1．一元一次方程

一般形式：$ax+b=0\quad(a\neq 0)$．解：$x=-\frac{b}{a}$.

2．一元二次方程

一般形式：$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)$.

解： $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

判别式：$\Delta=b^2-4ac$.

当 $\Delta>0$ 有两个不相等实根；

$\Delta=0$ 有两个相等实根；

$\Delta<0$ 没有实数根.

根与系数关系：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

3．方程组：

二元一次方程组一般式：

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}$$

三元一次方程组一般式：

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3.\end{cases}$$

一个二元二次方程和一个二元一次方程一般式：

$$\begin{cases}a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+dx+ey+f=0\\a_2x+b_2y+c_2=0.\end{cases}$$

两个二元二次方程一般式：

$$\begin{cases}a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0\\a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+e_2y+f_2=0\end{cases}$$

解法：代入消元法、加减消元法.

学习和解题方法指导

例1 化简

(1) $|x+1|+\sqrt{4-4x+x^2}$.

(2) $\dfrac{(1-3x+3x^2-x^3)\cdot(4x^2-1)}{(x^2-2x+1)\cdot(2x^2-3x+1)}$.

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$.

解：(1) 分析. $\because$ $|a|$永远是一个大于或等于零的数，

$$\therefore \quad |a|=\begin{cases} a & a>0 \\ 0 & a=0 \\ -a & a<0. \end{cases}$$

原式$=|x+1|+\sqrt{(2-x)^2}=|x+1|+|x-2|$;

当$x\geqslant 2$时，　　原式$=(x+1)+(x-2)=2x-1$;

当$-1\leqslant x<2$时，原式$=(x+1)+(2-x)=3$;

当$x<-1$时，　　原式$=-(x+1)+(2-x)=1-2x$。

(2) 分析：应用乘法公式、十字相乘法等分解因式

原式$=\dfrac{(1-x)^3\cdot(2x-1)(2x+1)}{(x-1)^2\cdot(2x-1)\cdot(x-1)}=-2x-1$。

(3) 分析：用二次根式的分母有理化

$$\begin{aligned}原式&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\\&\quad+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1)}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{4}\\&=\frac{2\sqrt{6}-2}{4}=\frac{\sqrt{6}-1}{2}.\end{aligned}$$

例2 计算:

(1) $3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\dfrac{3}{\sqrt{5}-2}$

(2) $1-\left(a-\dfrac{1}{1-a}\right)^2\div\dfrac{a^2-a+1}{a^2-2a+1}$

(3) $8a^2b^4\div\left(-\dfrac{3a}{4b^3}\right)\cdot\left(\dfrac{3a}{2b^2}\right)^2\div 8a^3b$

解:

(1) 原式$=6\sqrt{5}+12\sqrt{5}-8\sqrt{5}-\dfrac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}$

$=7\sqrt{5}-6$。

(2) 原式$=1-\left(\dfrac{a-a^2-1}{1-a}\right)^2\times\dfrac{(a-1)^2}{a^2-a+1}$

$=1-(a^2-a+1)=a-a^2$.

(3) 原式$=8a^2b^4\cdot\left(-\dfrac{4b^3}{3a}\right)\times\dfrac{9a^2}{4b^4}\times\dfrac{1}{8a^3b}=-3b^2$.

例3 解方程

(1) $(m^2-4)x=m^2-m-2$.

(2) $x^2+3x-\dfrac{20}{x^2+3x}=8$.

解:

(1) 分析: 未知数 x 前有字母时, 要对该系数进行讨论.

$$(m-2)(m+2)x=(m-2)(m+1)$$

当 $m\neq\pm2$ 时, $x=\dfrac{m+1}{m+2}$, 方程有唯一解;

当 $m=2$ 时, 方程有无穷多个解;

当 $m=-2$ 时, 方程无解.

(2) 分析: 引入辅助未知数; 将原方程转化为一元二次方程来解.

令 $y=x^2+3x$

即 $$y-\frac{20}{y}=8$$

$$y^2-8y-20=0 \qquad (y-10)\cdot(y+2)=0$$

$$\therefore\quad y_1=10,\ y_2=-2.$$

$$x^2+3x=10 \qquad x_1=-5,\ x_2=2$$

$$x^2+3x=-2 \qquad x_3=-1,\ x_4=-2$$

$\therefore$ 原方程解: $x=-5$; $x=2$; $x=-1$; $x=-2$.

例4 解方程

(1) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4x}{x^2-4}=1+\dfrac{2}{x-2}$.

(2) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x+4}=0$.

解:

(1) $\frac{x-2}{x^2-4}+\frac{4x}{x^2-4}=\frac{(x^2-4)+2(x+2)}{x^2-4}$

$$\frac{5x-2}{x^2-4}=\frac{x^2+2x}{x^2-4}$$

即　　$5x-2=x^2+2x$　　$\therefore\ x=1,\ x=2,$

经检验：$x=1$ 为原方程解.

(2) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{5x+4}$　两边平方：

$$(2x-1)+(3x+1)+2\sqrt{(2x-1)(3x+1)}=5x+4$$

$$(2x-1)(3x+1)=4 \qquad 6x^2-x-5=0.$$

$$\therefore\quad x=-\frac{5}{6},\quad x=1.$$

经检验：$x=1$ 为原方程解.

注意：凡分式方程、无理方程都要进行根的检验，即把求得的解代入原方程，如果不适合，就是增根，应舍去.

例 5　当 k 是什么实数时：方程

$$2(k+1)x^2+4kx+3k-2=0$$

(1) 有两个不相等的实数根；

(2) 有两个相等的实数根.

解：分析：有两个根，必须 $k+1\neq 0$ 即 $k\neq -1$.

(1) $\Delta=16k^2-8(k+1)(3k-2)>0$

$$k^2+k-2<0 \qquad -2<k<1$$

$\because\ k\neq -1,$　　$\therefore\ -2<k<-1$　或　$-1<k<1$

时方程有两个不相等实数根.

(2) $\Delta=16k^2-8(k+1)(3k-2)=0$

$k=1$ 或 $k=-2$. 方程有两个相等实数根.

例 6　已知 α、β 是方程 $x^2-6x+3=0$ 的两个根，

(1) 求 $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$ 的值

(2) 求作两根为 $\alpha+\frac{1}{\beta}$，和 $\beta+\frac{1}{\alpha}$ 的一元二次方程.

解：$\because\ \alpha$、β 是方程的两根，$\therefore\ \alpha+\beta=6,\ \alpha\cdot\beta=3.$

(1) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]}{\alpha\cdot\beta}$

$$=\frac{6\cdot(6^2-9)}{3}=54.$$

(2) 设所求方程为$x^2+px+q=0$,则:

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=-p,\quad \left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=q,$$

$$\therefore\ p=-\left[\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)\right]$$

$$=-\left[(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right]=-8,$$

$$q=\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\cdot\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=5\frac{1}{3}.$$

即所求一元二次方程为:

$$x^2-8x+5\frac{1}{3}=0.$$

例 7 解方程组

(1) $\begin{cases}4(x+1)=3(y+3)\\ 3x-2y=-2-\dfrac{7y-6x}{3}\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x^2-4y^2+x+3y=1\\ 2x-y=1\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{5}{8}\\ \dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{3}{8}\end{cases}$

解.

(1) 分析:二元一次方程组,可用加减消元法求解

$$\begin{cases}4x-3y=5 & ①\\ 3x+y=-6 & ②\end{cases}$$

①+②×3　　$13x=-13$　$x=-1$ 代 ② 得 $y=-3$,

$$\therefore\ \begin{cases}x=-1\\ y=-3,\end{cases}$$

(2) 分析：一个二元二次方程和一个二元一次方程组，可用代入消元法：

$$\begin{cases} x^2-4y^2+x+3y=1 & ① \\ y=2x-1 & ② \end{cases}$$

② 代入 ① $x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)=1$

$$15x^2-23x+8=0 \qquad x=1,\ x=\frac{8}{15} \qquad 代②$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{8}{15} \\ y=\dfrac{1}{15}. \end{cases}$$

(3) 分析：引入辅助未知数

设：$\dfrac{1}{x+y}=a,\quad \dfrac{1}{x-y}=b.$

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{5}{8} & ① \\ b-a=\dfrac{3}{8} & ② \end{cases}$$

$$①+② \quad b=\frac{1}{2}, \qquad ①-② \quad a=\frac{1}{8}$$

$$\therefore \begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x=5 \\ y=3. \end{cases}$$

例 8 当 k 是什么整数的时候，方程

$$(k^2-1)x^2-6(3k-1)x+72=0$$

有两个不相等的正整数根？

解：分析：要使原方程有两个不相等的正整数根，须有 $k^2-1\neq0$，$\Delta>0$，$x_1+x_2>0$，$x_1\cdot x_2>0$。且 x_1，x_2 都为正整数。

$$k^2-1\neq0, \quad k\neq\pm1$$

$$\Delta=36(3k-1)^2-288(k^2-1)=36(k-3)^2>0 \qquad \therefore \quad k\neq3.$$

$$x=\frac{6(3k-1)\pm6(k-3)}{2(k^2-1)} \quad x_1=\frac{12}{k+1}, \quad x_2=\frac{6}{k-1}$$

为了使 x_1，x_2 都是正整数，