Springer

QUANTUM GROUPS

量子群

Kassel Christian 著

闫淼 刘保相 郭小强 译

清华大学出版社

Springer

QUANTUM GROUPS

量子群

Kassel Christian 著

闫焱 刘保相 郭小强 译

清华大学出版社

北京

Translation from English language edition:
Quantum Groups
by Kassel Christian

本书为英文版 Quantum Groups 的简体中文翻译版，作者 Kassel Christian，由 Springer 出版社授权清华大学出版社出版发行。

北京市版权局著作权合同登记号　图字：01-2015-0651 号

图书在版编目(CIP)数据

量子群/(法)卡塞尔(Kassel,C.)著；闫淼，刘保相，郭小强译. --北京：清华大学出版社，2015

书名原文：Quantum Groups
ISBN 978-7-302-41904-4

Ⅰ. ①量…　Ⅱ. ①卡…　②闫…　③刘…　④郭…　Ⅲ. ①量子群
Ⅳ. ①O152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 265956 号

责任编辑：付弘宇　柴文强
封面设计：何凤霞
责任校对：焦丽丽
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：三河市中晟雅豪印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：148mm×210mm　　**印　　张**：7.5　　**字　　数**：200 千字
版　　次：2015 年 12 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 12 月第 1 次印刷
印　　数：1～1000
定　　价：39.00 元

产品编号：061095-01

译者序

霍普夫代数(Hopf algebra)是20世纪60年代以后迅速发展起来的代数学的新学科,是代数学的一个重要分支,它起源于代数拓扑和代数群理论,是Hopf在研究紧致李群的同调及其推广时发现的一种代数结构.域k上的Hopf代数是同时具有k代数结构和它的对偶结构(k余代数结构)并满足一定相容条件的代数系统.

在数学的许多分支中都存在着具有Hopf代数结构的对象,Hopf代数理论也在许多数学分支中都有重要的应用,例如代数群理论、域扩张的伽罗瓦理论和布饶尔群理论、李代数和李超代数、组合理论等.随着量子群的出现,Hopf代数进入了一个快速发展的阶段,并在代数拓扑、代数群、李代数、表示论、组合学、数学物理以及量子力学和纽结理论等方面得到了广泛的应用.Hopf代数在物理学中的模型是量子群,因此,它在物理学,特别是量子逆扩散方法和超对称理论的研究中,占有重要地位.

全书共7章,内容包括:第1章 预备知识;第2章 张量积;第3章 Hopf代数;第4章 量子平面及其对称性;第5章 SL(2)的李代数;第6章 sl(2)的量子包络代数;第7章 Uq(sl(2))的Hopf代数结构.本书是在线性代数和拓扑学的基础上编写的,主要介绍了Hopf代数的定义,并借助SL(2)和Uq(sl(2)两个Hopf代数(与典型群有关)具体例子进行详细说明,它们都是量子群的最简单的模型,从而为后期量子群的学习打下良好的基础.

本书的目的是为进一步学习 Hopf 代数中的专门著作和论文进行铺垫，为研究 Hopf 代数的自身性质及其上的作用、余作用等；研究 Hopf 代数上的附加结构，Smash 积等；研究 Hopf 代数的推广形式奠定扎实的基础. 希望通过本书的学习，读者可以了解 Hopf 代数，并有兴趣深入学习.

原版书的公式等序号，均以节为单位，为尊重原书我们仍以此为准，望读者关注。

译 者

2015 年 5 月

前　　言

Eh bien, Monsieur, que pensez-vous des x et des y?
Je lui ai repondu:
C'est bas de plafond.
V. Hugo[Hug51]

"量子群"这一术语是 1986 年费尔德在伯克利国际数学家大会上提出的。它代表某个特殊的 Hopf 代数,可以是半单李代数的 Hopf 代数包络的广义定义,也可以是相应代数群上正则函数的代数。正如后来发现的那样,量子群与数学物理中各种前沿领域有着密切的联系。

本书的目的就是利用低维拓扑学为量子群的基本代数结构提供极好的介绍。尽管有一定难度,我们依然尝试用通俗易懂的语言进行描述。假设你已经学习过线性代数和简单的拓扑学知识。

本书共分为四部分:第一部分,主要介绍 Hopf 代数的定义,借助 $SL_q(2)$和 $U_q(sl(2))$两个 Hopf 代数(与典型群 SL_2 有关)进行详细说明。它们是量子群中最简单的例子,也是我们能做到详细介绍仅有的实例。第二部分,主要关注两类 Hopf 代数,它们以系统的方式提供了 Yang-Baxter(杨-巴克斯特)方程的解。我们回顾的方法归功于 Faddeev(法捷耶夫)、Reshetikhin 和 Takhtadjian,如同 Drinfeld 的量子双层结构,它们都可以生成量子群。这两部分形成为期一年的关于量子群入门课程的核心。

第三和四部分都致力于前面提到的一些连接。第三部分的目

标是构建 R^3 中节点和纽带的痕不变量，包含来自 Yang－Baxter 方程的解琼斯多项式。为此，引入各类张量来拉近量子群和纽结理论的关系。第四部分提出了更前沿的内容：利用 Drinfeld 模求解 Knizhnik－Zamolodchikov 方程的单值解。我们的目标是要突出 Drinfeld 模更深入的结果用它来表达相应的半单李代数的辫子张量。我们总结了“通用的扭结不变量”的构建。这是前面章节中代数技术的一个很好的应用。

我要感谢 Drinfeld（参考论文[Dri87]［Dri89a]［Dri89b]［Dri90]）、Joyal 和 Street（参考论文[JS93]）、Reshetikhin 和 Turaev（参考论文[Tur89]［RT90]），是他们的论文给了我撰写本书的灵感。这些原始资料的引用在每章的最后都做了说明。Lusztig 和 Turaev 的专著（[Lus93]、［Tur94]）补充了我们的描述。

本书脱胎于 1990－1992 期间我在斯特拉斯堡路易·巴斯德大学数学系所教的两个研究生课程。第一部分是[Kas92]扩展的英译版。感谢 C. Bennis，R. Berger，C. Mitschi，P. Nuss，C. Reutenauer，M. Rosso，V. Turaev，M. Wambst 他们对本书有价值的讨论和评论，也感谢 Raymond Seroul 为本书编辑了图形。特别感谢 Patrick Ion 为准备印刷本书做出的工作。

注释：整本书中，k 是一个域，“向量空间”，“线性映射”均指域 k 上的向量空间和线性映射。字母 N，Z，Q，R 和 C 代表非负整数集，整数集，有理数域，实数域和复数域。符号 δ_{ij} 定义为：当 $i=j$ 时，$\delta_{ij}=1$；否则，$\delta_{ij}=0$。我们用 S_n 表示 n 个字母的对称群。$\varepsilon(\sigma)$ 表示一个置换 σ。

符号□表示一个证明的结束。罗马数字指章节的编号。

克里斯蒂安·卡塞尔

1994 年 3 月，斯特拉斯堡

目　　录

第1章 序　　言

本章主要介绍由 2×2 可逆矩阵构成的多项式代数 $GL(2)$ 和 $SL(2)$ 的结构，矩阵的乘法在这些代数上赋予了一种附加结构，这种结构正是第 3 章所要介绍的 Hopf 代数的一个重要基础. 此外本章引入了一些环理论，这些理论在今后的学习中还会经常用到，设所有的讨论在基础数域 k 上进行.

1.1 代数和模

先来回顾关于代数和模的一些基本概念.

A 是代数，即若环 A 满足如下条件：

(1) 存在环映射 $\eta_A: k\to A$，且其象元属于 A 的中心，即 $\eta_A(\lambda)\in Z(A)$，$\forall\lambda\in k$.

(2) 存在映射 $k\times A\to A((\lambda,a)\to\eta_A(\lambda)a)$ 赋予 A 一个域 k 上的向量空间结构，且乘法映射 $\mu_A: A\times A\to A$ 是双线性的.

若 A,B 是代数，且 $f: A\to B$ 是环映射，使得

$$f\circ\eta_A=\eta_B \tag{1.1}$$

则称 f 为代数态射.

上述代数态射 f 保单位性，即 $f(1)=1$.

线性映射 $\eta_A: k\to A$ 是代数态射.

如果 $i: A\to B$ 是单代数态射，则称 A 是 B 的子代数.

将 $A\to B$ 所有的代数态射组成的集合用 $Hom_{\mathrm{Alg}}(A,B)$ 表示，

一般来说,这个集合没有什么特殊的结构.然而,可以验证,当 A 和 B 满足某些附加条件之后,$Hom_{\mathrm{Alg}}(A,B)$便具有了一个群结构.

下面给出后面将会经常用到一些代数的例子.

(1) 反代数 A^{op}:若 A 是代数,A^{op} 作为向量空间与 A 相同,其乘法定义为

$$\mu_{A^{op}} = \mu_A \circ \tau_{A,A} \tag{1.2}$$

这里 $\tau_{A,A}$是 $A\times A$ 的翻转因子,即

$$\mu_{A^{op}}(a,a') = a'a \tag{1.3}$$

若 A 是交换代数当且仅当

$$\mu_{A^{op}} = \mu_A \tag{1.4}$$

(2) 中心子代数 $Z(A)$:代数 A 的中心

$$Z(A)=\{a\in A \mid aa'=a'a, \forall\, a'\in A\}$$

是 A 的子代数,且 $Z(A)=Z(A^{op})$.

(3) A 的双侧理想 I:I 是 A 的一个子空间,满足

$$\mu_A(I\times A)\subset I\supset\mu_A(A\times I)$$

则商空间 A/I 存在唯一的代数结构,使得标准映射 $A\to A/I$ 是代数态射.后面将双侧理想简称为理想.

(4) 积代数 $A=\prod_{i\in I}A_i$:A_i 为代数,则 A 具有唯一的代数结构使得标准映射 $A\to A_i$ 是代数态射,其中 A 的乘法为

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)(b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots)=(a_1b_1,a_2b_2,\cdots,a_nb_n,\cdots)$$

(5) 多项式代数 $A[x]$,$A[x,x^{-1}]$:若 A 是一个代数,$A[x]$是多项式 $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ 按照多项式乘法构成,其中 n 为非负整数;$A[x,x^{-1}]$是所有洛朗多项式 $\sum_{i=m}^{n}a_ix^i$ 按照多项式乘法构成,其中 m,$n\in\mathbb{Z}$.

(6) $n\times n$ 矩阵代数 $M_n(A)$:由 A 中元素形成的 $n\times n$ 矩阵,按照矩阵乘法构成的代数.

(7) $End(V)$:由向量空间 V 的线性自同态构成的代数,其乘

法为映射的合成,单位元是 id_V.

设 A 是代数,V 是向量空间,若存在双线性映射

$$A\times V\to V \quad ((a,v)\to av)$$

使得

$$a(a'v)=(aa')v,\quad 1v=v \tag{1.5}$$

成立,则称 V 是左 A-模.

同理,我们可以类似定义右 A-模.

事实上,一个右 A-模就是左 A^{op}-模. 这样,只需要研究左模即可,今后将左模简称为模.

若 V 和 V'都是 A-模,f: $V\to V'$称为 A-模态射,如果

$$f(av)=af(v),\quad \forall a\in A, v\in V \tag{1.6}$$

若 V'是 V 的子空间,且 V 和 V'都是 A 模,称 V'是 V 的 A-子模,如果包含映射 f: $V\to V'$是 A-线性的.

若 A 为代数,V 是 A-模,设 ρ: $A\to End(V)$是代数态射,即

$$\rho(a)v=av \tag{1.7}$$

则称 ρ 是 A 在 V 上的表示.

设 $V_1,\cdots,V_n$ 都是 A-模,其直和 $V_1\oplus\cdots\oplus V_n$ 也是 A-模,如果

$$a(v_1,\cdots,v_n)=(av_1,\cdots,av_n) \tag{1.8}$$

$\forall a\in A, v_1\in V_1,\cdots,v_n\in V_n$.

定义 1.1.1　如果除$\{0\}$,V 外没有其他子模,称 A-模 V 是单的. 如果 V 同构于单 A-模的直和,称 A-模 V 是半单的. 如果 V 不同构于两个非零子模的直和,称 A-模 V 是不可分的.

用表示的语言,一个单模(半单模)是不可约表示(完全可约表示). 下面这个著名的命题将在第 5～7 章用到.

命题 1.1.2　若 V 和 V'都是有限 A-模,且 $V'\subset V$,则下列叙述等价:

(1) 存在 A-模 V'',使 $V\cong V'\oplus V''$.

(2) 若 V'是单的,则存在 A-模 V'',使 $V\cong V'\oplus V''$.

(3) 存在 A-模映射 p: $V\to V'$,使 $p^2=p$.

(4) 若 V' 是单的,则存在 A-模映射 $p: V \to V'$,使 $p^2=p$.

(5) 任一有限维 A-模是半单的.

【证】

(1)⇒(2)和(3)⇒(4)显然成立.

通过定义标准映射 $p: V' \oplus V'' \to V'$,(1)⇒(3)显然成立.

类似地,可以证明(2)⇒(4)成立.

(3)⇒(1):设 $V''=Ker(p)$,显然 V'' 是 V 的 一个子模.因为

$$v=p(v)+(v-p(v)), \quad p^2=p$$

所以 $V=V' \oplus V''$.

同理,可证(4)⇒(2)成立.

(2)⇒(5):设任一 A-模 V,且 $\dim(V)$ 有限.

取 V_1 为 V 中维数最小的非零子模,则 V_1 是单的.由(2)存在 V^1,使得 $V \cong V_1 \oplus V^1$,其中 $\dim(V^1)<\dim(V)$.

对 V^1 重复上面的过程,得到一列单子模 $(V_n)_{n>0}$ 和一列子模 $(V^n)_{n>0}$,使得

$$V^n \cong V_{n+1} \oplus V^{n+1}, \quad \dim(V^{n+1})<\dim(V^n)$$

所以存在整数 p,使得 $V^p=\{0\}$,从而 $V \cong V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_p$.

(5)⇒(1):设 $V' \subset V$,$V=\bigoplus_{i \in I} V_i$,$V_i$ 是单子模,令 J 是使得

$$V' \cap \left(\bigoplus_{j \in J} V_j\right)=\{0\} \tag{1.9}$$

的 I 的最大子集.

如果 $i \notin J$,则 $V' \cap (V_i \oplus \bigoplus_{j \in J} V_j) \neq \{0\}$,所以

$$V_i \cap (V'+\bigoplus_{j \in J} V_j) \neq \{0\}$$

因为 V_i 是单的,所以 $V_i \subset V'+\bigoplus_{j \in J} V_j$,$i \notin J$.

如果 $i \in J$,$V_i \subset V'+\bigoplus_{j \in J} V_j$,所以 $V=V'+\bigoplus_{j \in J} V_j$.

综上,$V=V' \oplus \bigoplus_{j \in J} V_j$. □

1.2　自由代数

令 X 是包含 0 的集合，向量空间 $k\{X\}$ 的基集为

$$\{x_{i1}\cdots x_{ip} \mid x_{i1},\cdots,x_{ip}\in X\}$$

其中 $x_{i1}\cdots x_{ip}$ 称为单项式，p 称为该单项式的次数. 用单项式的链接来定义 $k\{X\}$ 的乘法，即

$$(x_{i1}\cdots x_{ip})(x_{ip+1}\cdots x_{in}) = x_{i1}\cdots x_{ip}x_{ip+1}\cdots x_{in} \tag{2.1}$$

事实上，如式(2.1)的乘法赋予了 $k\{X\}$ 一个代数结构，则称为集合 X 上的自由代数，单位为 0.

接下来，我们主要考虑在有限集上的自由代数，如果 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$，记 $k\{x_1,\cdots,x_n\}$ 为 $k\{X\}$.

自由代数有如下性质：

命题 1.2.1　设 X 是集合，A 是代数，f：$X\to A$ 是集合映射，则存在唯一的代数态射 $\bar{f}$：$k\{X\}\to A$ 使得 $\bar{f}(x)=f(x)$，$\forall x\in X$.

【证】　只需构造映射 $\bar{f}$：$k\{X\}\to A$，即

$$\bar{f}(x_{i1}\cdots x_{ip})=f(x_{i1})\cdots f(x_{ip}),\quad \bar{f}(0)=1$$

结论显然成立. □

命题 1.2.1 还可以等价为：存在一个双射，使得

$$Hom_{\mathrm{Alg}}(k\{X\},A) \cong Hom_{Set}(X,A) \tag{2.2}$$

这里 $Hom_{Set}(X,A)$ 是所有 f：$X\to A$ 的集合. 特别地，如果 X 是有限集 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$，则映射 $f\to(f(x_1),\cdots,f(x_n))$ 可以诱导一个双射

$$Hom_{\mathrm{Alg}}(k\{x_1,\cdots,x_n\},A) \cong A^n \tag{2.3}$$

任何代数 A 都可以看成是自由代数 $k\{X\}$ 的商. 事实上，只需令 $X=A$，依据命题 1.2.1，由集合映射 $X\to A$，可得代数态射 f：$k\{X\}\to A$，所以对任意代数 A'，可以得到如下同构

$$Hom_{\mathrm{Alg}}(k\{X\}/I, A') \simeq \{f \in Hom_{\mathrm{Set}}(X, A') \mid \bar{f}(I) = 0\} \tag{2.4}$$

其中 $I=Kerf$ 是 $k\{X\}$的理想. □

例 1 I 是 $k\{x_1,\cdots,x_n\}$的双侧理想,$I=(x_ix_j-x_jx_i)$,$i,j\in 1,2,\cdots,n$,则商代数 $k\{x_1,\cdots,x_n\}/I$ 同构于多项式代数 $k[x_1,\cdots,x_n]$.

作为式(2.4)的推论,对于任意的代数 A,有

$$Hom_{\mathrm{Alg}}(k[x_1,\cdots,x_n], A) \simeq \{(a_1,\cdots,a_n) \in A^n \mid a_ia_j = a_ja_i, \forall i,j\} \tag{2.5}$$

在下一节,将看到利用自由代数的商表示代数关系的大量例子.

1.3 仿射直线和平面

作为式(2.5)的结果,有如下命题.

命题 1.3.1 设 A 为交换代数,f: $\{x_1,\cdots,x_n\}\to A$ 是集合映射,则存在唯一的代数态射 $\bar{f}$: $k[x_1,\cdots,x_n]\to A$ 使得对于所有的 i,$\bar{f}(x_i)=f(x_i)$.

换句话说,给定从多项式代数 $k[x_1,\cdots,x_n]$到交换代数 A 的代数态射,等价于

$$Hom_{\mathrm{Alg}}(k[x_1,\cdots,x_n], A) \simeq A^n \tag{3.1}$$

其中 A^n 是 A 的 n 元组,即 $A^n=\{(a_1,\cdots,a_n)\mid a_i\in A\}$.

若 $n=1$ 时,对任意的交换代数 A,有

$$Hom_{\mathrm{Alg}}(k[x], A) \simeq A \tag{3.2}$$

这里代数 $k[x]$称为仿射直线,集合 $Hom_{\mathrm{Alg}}(k[x],A)$称为仿射直线的 A-点集合. 设 A 具有阿贝尔群(交换群)结构,下面用仿射直线 $k[x]$这种一般性的方法来描述这种群结构. A 的阿贝尔群结构由三个映射构成,分别是加法映射$+$: $A^2\to A$,单位映射 0: $\{0\}\to$

A 和逆映射 $-: A\to A$. 其中加法映射满足结合性和交换性,0 既是左单位又是右单位,而且

$$(-a)+a=a+(-a)=0,\quad \forall a\in A$$

这些定律并不依赖于一个特殊的交换代数 A,因此我们可以用这种映射的方法来表达.

设 A 是交换代数,由式(3.1),当 $n=2$ 时,有

$$Hom_{\mathrm{Alg}}(k[x',x''],A)\simeq A^2 \tag{3.3}$$

称代数 $k[x',x'']$ 为仿射平面. $Hom_{\mathrm{Alg}}(k[x',x''],A)$ 中的元素被称为仿射平面的一个 A-点. 由单点 η_A 生成的集合 $Hom_{\mathrm{Alg}}(k,A)$ 记为 $\{0\}$.

命题 1.3.2　若 $\Delta: k[x]\to k[x',x'']$, $\varepsilon: k[x]\to k$, $S: k[x]\to k[x]$ 都是代数态射,其中

$$\Delta(x)=x'+x'',\quad \varepsilon(x)=0,\quad S(x)=-x$$

在式(3.2)~式(3.3)的意义下,映射 Δ,ε,S 分别对应着加法映射 $+$,单位映射 0 和逆映射 $-$.

证明留给读者.

代数态射 Δ,ε,S 满足阿贝尔群的结合性、交换性、单位性和可逆性. 它们赋予了仿射直线 $k[x]$ 双交换的 Hopf 代数结构,这种结构在第 3 章详细讨论.

下面给出另外一个例子,任意的代数 A,用 $A^{\times}$ 表示 A 中的可逆元,用如上的代数来描述集合 $A^{\times}$. 考虑 $k[x,y]$ 的理想 I,其中 I 是由 $xy-1$ 生成的. 对任何交换代数 A,有

$$Hom_{\mathrm{Alg}}(k[x,y]/I,A)\simeq A^{\times} \tag{3.4}$$

集合 $\{x^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是向量空间 $k[x,y]/I$ 的基,把这个代数记为 $k[x,x^{-1}]$,它是单变量的洛朗多项式代数,类似地,可以定义两个变量的洛朗多项式代数,即

$$k[x',x'',x'^{-1},x''^{-1}]=k[x',y',x'',y'']/(x'y'-1,x''y''-1)$$

这样,得到一个同构

$$Hom_{\mathrm{Alg}}(k[x',x'',x'^{-1},x''^{-1}],A)\simeq A^{\times}\times A^{\times} \tag{3.5}$$

定义代数映射