李成章教练奥数笔记

第5卷

李成章 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

LI CHENG ZHANG JIAO LIAN AO SHU BI JI

李成章教练奥数笔记

第5卷

李成章　著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书为李成章教练奥数笔记第五卷，书中内容为李成章教授担任奥数教练时的手写原稿．书中的每一道例题后都有详细的解答过程，有的甚至有多种解答方法．

本书适合准备参加数学竞赛的学生及数学爱好者研读．

图书在版编目(CIP)数据

李成章教练奥数笔记．第5卷/李成章著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016．1

ISBN 978-7-5603-5622-8

Ⅰ．①李…　Ⅱ．①李…　Ⅲ．①数学-竞赛题-题解　Ⅳ．①O1—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第220771号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　杜莹雪
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451—86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张14.5　字数161千字
版　　次　2016年1月第1版　2016年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5622-8
定　　价　38.00元

◎ 目录

七　归纳构造法　//1

八　抽屉原理(二)　//36

九　字典排列法与轮换排列法(一)　//67

十　字典排列法和轮换排列法(二)　//106

十一　字典排列法与轮换排列法(三)　//125

十二　离散最值问题(三)　//144

十三　复杂计数问题(三)　//160

十四　笨法解题　//191

编辑手记　//209

七 归纳构造法

归纳构造法是构造法的一种,而且是技巧性相当强的一种.由于构造法和归纳法都是数学竞赛中的重要方法,因此二者结合起来而产生的归纳构造法就更加强有力,有时甚至能达到出奇制胜的效果.无论在组合、数论、代数中都起着重要作用.

1. 试证任一有限集合的全部子集可以排成一列,使得其中任何两个相邻的子集都恰好相差1个元素.

(1972年波兰数学奥林匹克)

证 设有限集S共有n个元素,于是它共有2^n个不同的子集.我们关于集S的元数n使用数学归纳法来证明.

当$n=1$时,S只有1个元素,它共有两个不同子集:$A_1=\varnothing$,$A_2=S$.显然,只要把二者排在一起就行了.

设$n=k$时命题成立,当$n=k+1$时.任取$a\in S$,并考虑$S'=S-\{a\}$.显然$|S'|=k$.于是由归纳假设知S'的所有不同子集可以排成一列

$$A_1, A_2, \cdots, A_{2^k},$$

使得其中任何两个相邻子集都恰相差1个元素.令S的所有不同子集排列如下:

$$A_1, A_2, \cdots, A_{2^k}, A_{2^k}\cup\{a\}, A_{2^k-1}\cup\{a\}, \cdots, A_1\cup\{a\},$$

则其中任何两个相邻子集都恰相差1元且这2^{k+1}个子集恰为S的全部不同子集.

2. 求证存在无穷多对相邻的自然数$\{n, n+1\}$，使得n和$n+1$中每个数的每个质因子的幂指数都不小于2.（1984年城市邀请赛）

证 显然$\{8, 9\}$是满足要求的一对. 由于

$$289=17^2=(8+9)^2,$$

$$288=(8+9)^2-1=(8+9-1)(8+9+1)=(2\times8)(2\times9)$$

$$=4\times8\times9=2^5\times3^2,$$

所以$\{288, 289\}$也是满足要求的一对.

设$\{k, k+1\}$是具有这样性质的一对，则容易验证，数对

$$\{(2k+1)^2-1,\ (2k+1)^2\}$$

也具有这样的性质. 实际上

$$(2k+1)^2-1=2k\cdot(2k+2)=2^2k(k+1).$$

因为k和$k+1$的每个质因子的幂指数都不小于2，所以$(2k+1)^2-1$的每个质因子的幂指数也都不小于2.

由数学归纳法知，有无穷多组这样的数对.

3. 设n为正偶数，求证可以在$n\times n$方格表的每个方格中都填入1，2，3之一，使得每行每列的n个数求和时，所得的$2n$个和数互不相同。（1988年IMO候选题）

证 当$n=2$时，可以填数如右图所示，这时，右上图的4个和数为2，3，4，5；右下图的4个和数为3，4，5，6，两个数表都满足题中要求，然而4个和数都不全相同。

1	2
1	3

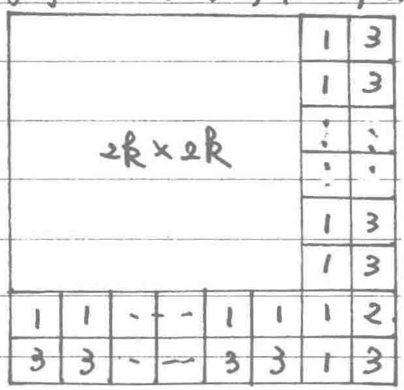
加强命题

1	3
2	3

下面用数学归纳法来证明如下的加强命题：对每个正偶数n，都可以在$n\times n$方格表的每个方格中填入1，2，3之一，使得表中n行和n列数分别求和所得的$2n$个和数分别为$n,n+1,\cdots,3n-1$.

设加强命题于$n=2k$时成立，往证当$n=2(k+1)$时命题成立。将$(2k+2)\times(2k+2)$的方格表划出下面两行和右面两列并分别填数如图所示。此外，对于右图中空白的$2k\times 2k$方格，按归纳假设，可以填好数，使得所得的$4k$个和数分别为

$$2k,2k+1,\cdots,6k-1.$$



这样一来，在$(2k+2)\times(2k+2)$方格表中所得的$4k+4$个和数恰好分别为

$$2k+2,2k+3,\cdots,6k+4,6k+5.$$

这表明$n=2(k+1)$时，加强命题成立。所以加强命题对所有正偶数n成立，故原命题也成立。

4. 试证存在无穷多个自然数n，满足如下条件：可以将集合$S_n=\{1,2,\cdots,3n\}$划分成3个集合：

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\},C=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$$

使得

$$a_i+b_i=c_i，\quad i=1,2,\cdots,n.\quad（《华技3二》29页例11）$$

证 显然，$n=1$时结论成立. 设$n=k$时结论成立，往证$n=4k$时结论也成立.

设$n=k$时将$S_k=\{1,2,\cdots,3k\}$分成的3个集合是

$$A_k=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\},B_k=\{b_1,b_2,\cdots,b_k\},C_k=\{c_1,c_2,\cdots,c_k\}.$$

当$n=4k$时，令

$$\begin{cases} a'_{j+1}=6k-1-2j, \\ b'_{j+1}=6k+1+j, \qquad j=0,1,2,\cdots,3k-1; \\ c'_{j+1}=12k-j, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'_{3k+i}=2a_i, \\ b'_{3k+i}=2b_i, \qquad i=1,2,\cdots,k. \\ c'_{3k+i}=2c_i, \end{cases}$$

于是不难直接验证

$$a'_j+b'_j=c'_j，\quad j=1,2,\cdots,4k$$

且有

$$A_{4k}=\{a'_1,a'_2,\cdots,a'_{4k}\}=\{6k-1,6k-3,\cdots,1,2a_1,2a_2,\cdots,2a_k\},$$
$$B_{4k}=\{b'_1,b'_2,\cdots,b'_{4k}\}=\{6k+1,6k+2,\cdots,9k,2b_1,2b_2,\cdots,2b_k\},$$
$$C_{4k}=\{c'_1,c'_2,\cdots,c'_{4k}\}=\{12k,12k-1,\cdots,9k+1,2c_1,2c_2,\cdots,2c_k\}.$$

由归纳假设知

$\{a_1,a_2,\cdots,a_k,b_1,b_2,\cdots,b_k,c_1,c_2,\cdots,c_k\}=\{1,2,\cdots,3k\}$,

所以

$\{2a_1,2a_2,\cdots,2a_k,2b_1,2b_2,\cdots,2b_k,2c_1,2c_2,\cdots,2c_k\}$

$=\{2,4,6,\cdots,6k\}$.

从而有

$A_{4k}\cup B_{4k}\cup C_{4k}=\{1,2,\cdots,12k\}=S_{4k}$.

这表明 $n=4k$ 时命题成立。可见，自然数 $n=4^m(m=0,1,2,\cdots)$ 都可以使命题成立，当然有无穷多个 n 使命题成立。

证2 显然，$n=1$ 时结论成立。设 $n=k$ 时结论成立，往证 $n=3k+1$ 时结论也成立。

对正整数 $3k+1$，将集合 $S_{3k+1}=\{1,2,\cdots,3(3k+1)\}$ 划分成3个互不相交的集合 $A'=\{a'_1,a'_2,\cdots,a'_{3k+1}\}$, $B'=\{b'_1,b'_2,\cdots,b'_{3k+1}\}$, $C'=\{c'_1,c'_2,\cdots,c'_{3k+1}\}$，其中

$a'_i=3a_i-1$, $b'_i=3b_i$, $c'_i=3c_i-1$, $i=1,2,\cdots,k$;

$a'_{k+i}=3a_i$, $b'_{k+i}=3b_i+1$, $c'_{k+i}=3c_i+1$, $i=1,2,\cdots,k$;

$a'_{2k+i}=3a_i+1$, $b'_{2k+i}=3b_i-1$, $c'_{2k+i}=3c_i$, $i=1,2,\cdots,k$;

$a'_{3k+1}=1$, $b'_{3k+1}=9k+2$, $c'_{3k+1}=9k+3$.

容易验证，这样定义的 $\{a'_i\}$, $\{b'_i\}$, $\{c'_i\}$ 满足

$$a'_i+b'_i=c'_i,\quad i=1,2,\cdots,3k+1.$$

故得到无穷多个正整数 $\{\frac{1}{2}(3^k-1)\mid k=1,2,\cdots\}$ 满足题中要求。

5. 试证存在一个自然数的集合X，使得对于任何$n\in N^*$，都存在唯一的一对元素$a,b\in X$，满足$a-b=n$。

（《华校3二》225页例6题）

证 显然，所求的集合X应为无穷集，设

$X_4=\{1,2,4,8\}$ $$X=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2n},a_{2n+1},\cdots\}.$$

取$a_1=1$，$a_2=2$。下面用归纳构造法证明：存在自然数的$2n$元集合

$$X_{2n}=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2n-1},a_{2n}\},\ n\geqslant 3$$

使得$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{2n}$，这$2n$个自然数两两之差（大数减小数）都不相同且对每个$m$，$1\leqslant m\leqslant n$，都存在唯一的一对$a,b\in X_{2n}$，满足$a-b=m$。

显然$n=1$时这一$\boxed{\text{加强命题}}$成立。设$n=k$时命题成立，则当$n=k+1$时，可取

$$a_{2k+1}=2a_{2k},\quad a_{2k+2}=a_{2k+1}+b_k,$$

其中b_k为不能用$X_{2k}\cup\{a_{2k+1}\}$中两数之差表示的最小自然数。显然有$b_k\geqslant k+1$。容易看出，两个新元素a_{2k+1}和a_{2k+2}与前$2k$个元素中任一元素之差都不小于a_{2k}，当然更大于X_{2k}中任何两个元素之差。所以$X_{2k}\cup\{a_{2k+1},a_{2k+2}\}=X_{2k+2}$满足下列条件：

(i) $a_1<a_2<\cdots<a_{2k}<a_{2k+1}<a_{2k+2}$；

(ii) 两两之差互不相等；

(iii) 对于每个m，$1\leqslant m\leqslant k+1$，都存在$a,b\in X_{2k+2}$，使得$a-b==m$。

再由数学归纳法知，上述的加强命题对所有$n\in N^*$都成立。容易看出$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_{2n}=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1},a_{2n+2},\cdots\}$满足题中要求。

注　集合$\{1,2,4,8,\cdots,2^n,\cdots\}$不满足题中要求，因其中元素中奇数值太少而偶数值多。

注2　这无穷多个X_{2n}后一个包含前一个，但其中没有最大的，所以要取并集。

注3　集合的前8个数应为

$$\{1,2,4,8,16,21,42,51,\cdots\}.$$

6. 试证2的每个正整数次幂都有一个倍数，使其各位数字均不为0（十进制）．（1990年集训队选拔考试《数论卷》1·73）

证1 用归纳构造法来证明如下的加强命题：对任意$k\in N^*$，都存在一个仅含数字1和2的一个k位数n_k，使得$2^k|n_k$．

当$k=1$时，取$n_1=2$即可．

设命题于$k=m$时成立，即存在m位数字都是1或2的m位数n_m，使得$2^m|n_m$．设

$$n_m=2^m q,$$

即q为n_m除以2^m的商，当然q是自然数．当$k=m+1$时，考察下列两个自然数：

$$\begin{cases} n_m+10^m=2^m(q+5^m), \\ n_m+2\times10^m=2^m(q+2\times5^m). \end{cases}$$

显然，当q为奇数时，$2^{m+1}|n_m+10^m$；当q为偶数时，$2^{m+1}|n_m+2\times10^m$．易见，取这两个数中能被2^{m+1}整除的一个为n_{m+1}即可．实际上，n_{m+1}相当于在n_m的各位数字左方适当地加1或2，它的各位数字当然也都是1和2，即命题于$k=m+1$时成立．从而加强命题对所有$k\in N^*$都成立．当然原命题也是如此．

注 仔细查证明过程可知，不必将n_k加强为由数字1和2组成的k位数，只须加强为各位数字均不为0的k位数就可以了．

证2 首先约定，某数的第l位数字是指从右向左数的第l

位数字.

对$k\in N^*$,记$n_1=2^k$.由于$5\nmid 2^k$,故n_1的个位数字即第1位数字不是0.若n_1的各位数字均不为0,则本题结论成立.否则,设n_1的前$m-1$位数字都不为0,而第m位数字为0$(m\geqslant 2)$.令

$$n_2=(1+10^{m-1})2^k=(1+10^{m-1})n_1,$$

则n_2的前m位数字均不为0.如果需要,可对n_2再作类似的处理.显然,每次至少增加一个非0数字.故经过有限次后,总能得到一个2^k的倍数n_s,它的前k位数字均不为0.设n_s有$q>k$位数字,我们写

$$n_s=m\cdot 10^k+n,$$

其中n为一个k位的自然数.这就是把n_s的前k位与后$q-k$位数字拆开写成两数之和.因为

$$2^k\mid n_s,\quad 2^k\mid m\cdot 10^k,$$

所以$2^k\mid n$且n的各位数字均不为0,当然满足题中要求.

7. 试证对任何正整数 $n\geqslant 2$，都存在 n 个不同的正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得

$$a_j-a_i \mid a_j+a_i, \quad 1\leqslant i<j\leqslant n. \qquad ①$$

（《华校这二》29页例12）

证 当 $n=2$ 时，取 $a_1=1, a_2=2$ 即可。

设 $n=k$ 时命题成立，即存在 k 个正整数 $a_1<a_2<\cdots<a_k$ 满足①。当 $n=k+1$ 时，可将 0 加入到 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ 中而得到的 $k+1$ 个数互不相同且满足①式。唯一的不足之处在于 0 不是正整数。为了弥补这一缺欠，我们注意到差是平移不变的，然而和却不是平移不变的。为使①式在平移之后仍然成立，应使平移的数 p_k 能被所有 a_j $(j=1,2,\cdots,k)$ 和 a_j-a_i $(1\leqslant i<j\leqslant k)$ 整除。显然，这只要取 $p_k=a_k!$ 即可。

令

$$b_1=a_k!, \quad b_j=a_k!+a_{j-1}, \quad j=2,3,\cdots,k+1, \qquad ②$$

于是这 $k+1$ 个数 $\{b_1, b_2, \cdots, b_{k+1}\}$ 互不相同且满足①式。

实际上，这时由②有

$$b_j-b_1=a_{j-1} \mid 2a_k!+a_{j-1}=a_k!+(a_k!+a_{j-1})=b_1+b_j,$$
$$j=2,3,\cdots,k+1;$$

$$b_j-b_i=a_{j-1}-a_{i-1} \mid a_{j-1}+a_{i-1}+2a_k!=b_j+b_i,$$
$$2\leqslant i<j\leqslant k+1.$$

即命题于 $n=k+1$ 时成立。由数学归纳法知命题对所有 $n\geqslant 2$ 都成立。

8. 求证存在无穷多个由1983个相继自然数组成的集合，使得其中每个数都可被形如 a^{1983} 的某个数所整除，其中 $a\in\mathbf{N}^*$，$a>1$.

证 我们来证明更一般的结果：存在无穷多个由 n 个相继自然数组成的集合，使得其中每个数都可被形如 a^m 的某个数所整除，其中 $n,m,a\in\mathbf{N}^*$，$a>1$.

当 $n=1$ 时，显然 $\{a^m\}$ $(a>1)$ 即满足要求．由 $a\in\mathbf{N}^*$，$a>1$ 的任意性知，当然有无穷多个.

设当 $n=k$ 时命题成立，即存在 k 个相继的自然数 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 和 k 个都大于1的自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，使得

$\boxed{\text{数学归纳法}}$

$$a_j^m \mid n_j,\quad j=1,2,\cdots,k.$$

令

$$l=(a_1a_2\cdots a_k)^m,\quad h=(n_k+1)\left[(l+1)^m-1\right],$$

则

$$a_j^m \mid (l+1)^m-1,\quad j=1,2,\cdots,k.$$

$$a_j^m \mid h,\quad j=1,2,\cdots,k.$$

$$a_j^m \mid h+n_j,\quad j=1,2,\cdots,k.$$

又因

$$h+n_k+1=(n_k+1)(l+1)^m,$$

当然能被 $(l+1)^m$ 整除．由于归纳开始时的 $\{a^m\}$ 有无穷多个，所以 $n=k$ 时也有无穷多个．故当 $n=k+1$ 时，$\{h+n_1,h+n_2,\cdots,h+n_k,h+n_k+1\}$ 这样的集合也有无穷多个.

证2 取1983个质数 $p_1, p_2, \cdots, p_{1983}$，并考察同余方程组

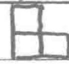
$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod{p_1^{1983}}, \\ x \equiv -2 \pmod{p_2^{1983}}, \\ x \equiv -3 \pmod{p_3^{1983}}, \\ \quad \vdots \\ x \equiv -1983 \pmod{p_{1983}^{1983}}. \end{cases}$$

由中国剩余定理知有解 $x \in N$，于是

$$x+1, x+2, \cdots, x+1983$$

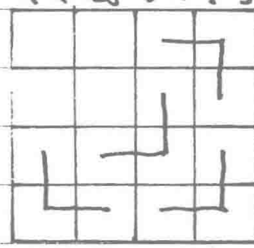
这1983个相继自然数便满足题中要求. 由于解 x 有无穷多个，所以满足要求的数组也有无穷多个.

注 这个证法是非构造性的.

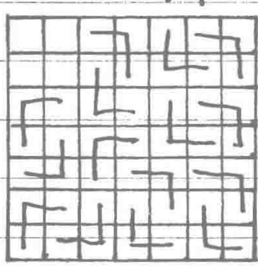
9. 给定$(3n+1)\times(3n+1)$的方格纸$(n\in N^*)$，试证任意剪去1个方格后，余下的纸片可以全部剪成形如的纸片.

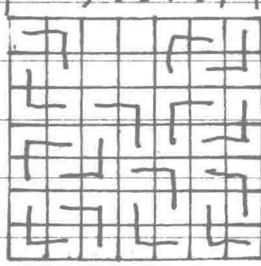
(1992年中国集训队选拔考试)

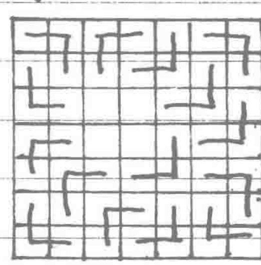
证 (1) 当$n=1$时，$3n+1=4$. 不妨设剪去的1个方格在左上角的2×2正方形中，于是可将4×4方格纸余下部分剪成如图所示. 可见，$n=1$时结论成立.



当$n=2$时，$3n+1=7$. 由对称性知可设去掉的1个方格位于左上角的4×4正方形的主对角线上及上方的10个方格之中. 于是只要分别考察下列3种情形：(i)去掉的方格位于左上角的2×2正方形中；(ii)去掉的方格位于第1、2行与第3、4列相交所成的2×2正方形中；(iii)去掉的方格位于第3、4行与第3、4列相交所成的2×2正方形中. 对于3种情形，可分别划分如下图所示：







可见，$n=2$时结论也成立.

当$n=3$时，$3n+1=10$. 不妨设去掉的1个方格位于左上角的7×7正方形中. 于是由上面证明知，左上角的$7\times7-1$个方格可以剪成满足要求的小块. 而其余部分可划分如下图.