普通高等教育电子通信类国家级特色专业系列规划教材

电磁场数值方法

陈涌频　孟　敏　方宙奇　编著

科学出版社

普通高等教育电子通信类国家级特色专业系列规划教材

电磁场数值方法

陈涌频　孟　敏　方宙奇　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书在论述电磁场数值方法的分类、共性和实现方法的基础上，分章节系统地论述了求解电磁场工程问题的三大基本数值方法——差分法、有限元法和矩量法。本书阐明了这几种计算方法的基本原理和解题步骤，并对各种方法的优势和局限性、相互联系与应用区域等作了介绍。在第5章，对目前常用的电磁场数值方法中的快速算法和混合算法作了介绍。附录提供了部分计算程序，以供参考。

本书体系完整，可读性强，可作为高等工科院校相关专业的本科生教材，立足于学生在完成“电磁场理论”和“高级语言设计”课程学习的基础上，培养学生利用计算机分析解决工程问题的方法和能力。同时，本书也可作为从事电磁场应用等相关研究的科研人员和技术人员等的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场数值方法/陈涌频，孟敏，方宙奇编著. —北京：科学出版社，2016.2
ISBN 978-7-03-047138-3

I. ①电… II.①陈… ②孟…③方…III. ①电磁场-数值方法 IV. ①0441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第012551号

责任编辑：匡 敏 李 清/责任校对：胡小洁
责任印制：徐晓晨/责任设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京东华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016年1月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2016年1月第一次印刷 印张：12
字数：284 000

定价：35.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

随着计算机技术的应用和发展，许多无法求解的电磁问题得以解决。例如，理论模型复杂或理论模型尚未建立，或者实验费用昂贵甚至不能进行实验，此时，借助计算机的数值方法就成为研究这些问题的唯一或主要手段，它已成为当今研究电磁场问题不可或缺的一条重要途径。在高科技竞争日益激励的今天，以电磁场理论为基础的数值计算在电磁场与微波学科中发挥着越来越重要的作用。本书的目的就在于帮助电磁专业的本科生学习一些常用的数值方法，为今后更加深入学习和应用数值方法打下基础。

全书分为 6 章。第 0 章为绪论，介绍电磁场数值方法的历史、现状与发展趋势，对其共性和实现要点进行说明。第 1～4 章分别介绍电磁场数值方法中的几种重要方法，有限差分法、时域有限差分法、有限元法和矩量法，从基本理论到应用实例都有深入浅出的讲解，力图使学生在学习了这些基本理论后能通过上机实践很快掌握这些方法。第 5 章介绍电磁场数值方法中的一些快速算法及混合方法，力图使学生对电磁场数值方法最新的发展应用状况有更详细的了解。本书附录中的程序选择简单易用的 MATLAB 语言，帮助学生理解本书数值方法的过程及应用。本书中，第 0、第 5 章由陈涌频修订，第 1、第 3 章由方宙奇编写，第 2、第 4 章和附录由孟敏编写。

本书立足本科生的基础与能力，力求达到以下目的：

(1) 传授技能：帮助学生将数值方法的数学表达转换成有用及有效的软件代码。

(2) 帮助设计与建模：只有在了解目前流行的几种工程数值方法之间的相对优势、有效范围、应用区域、理想精度、基本特性的基础上，才能更好地选择和使用仿真软件。

(3) 加深理论：通过应用数值方法解决电磁基本问题，帮助学生更好地理解电磁理论。

限于作者学识水平，书中难免有不足和疏漏之处，敬请广大读者批评指正。

作　者

2015 年 9 月

目　　录

第0章 绪　论

数值解是相对于解析解而言的，它是求解场域内若干点的离散值。数值方法就是求得这些点的数值解的方法。

0.1 数值方法产生的历史和发展现状

1. 数值方法产生的历史

宏观电磁现象的基本规律可以用麦克斯韦方程组(积分形式和微分形式)表示，再加上边界条件(三类边值问题和不同介质分界面上的边界条件、无限远处的边界条件、周期性边界条件等)和初始条件，就可以描述不同的实际电磁问题。经过数学抽象后归结为微分方程模型、积分方程模型和属于优化模型的变分方程模型三大类。例如，最初求解电磁问题，是用分离变量法或其他数学方法严格求解偏微分方程和积分方程，得到的是解析解(或称严格解)。其优点如下：

(1) 严格解是一个明确的表达式，各物理量之间的关系直观，便于优化设计；

(2) 精度高，计算量小；

(3) 可以作为近似解和数值解的检验标准，也可作为近似方法和数值方法的基础。

而其局限性如下：

(1) 解题范围有限，仅能解决很少量的问题，如标量亥姆霍兹方程只有在11种坐标系下才能用分离变量求解，并且要求边界面是该坐标系的一个坐标面或几个坐标面的组合，且边界条件是第一类或第二类；又如积分方程中的积分核只有在某些形式时才能用变换数学得到严格的积分解；

(2) 难掌握；

(3) 往往在理想条件下得到，而且有其不严格的一面。

工程电磁场问题的复杂性，致使各种解析方法已经无法适应广泛工程问题分析求解的需要。随着计算机的出现，属于近似计算方法范畴的电磁场数值计算方法得到了长足的发展，最初始于20世纪60年代。

最早的近似解包括一些高频方法，如物理光学法(PO)、几何光学法(GO)、一致绕射理论(UTD)、几何绕射理论(GTD)等，这些方法至今仍占有重要地位。

近似法的优点是：①计算简单、省时，参量间关系直观，便于优化；②借助于计算机，存储量小，计算速度快；适合电大尺寸目标。局限性是：①准确度低；②处理复杂目标比较困难。

近似解法首先要根据求解问题的解的范围作出在该范围内成立的近似假设，从而达到简化模型和求解过程的目的。根据不同的实际问题，近似假设也不同，于是派生出不同的近似方法。

近似解法中包括了部分解析法和部分数值结果。其解析部分比严格解中的解析部分要少些，但计算工作量较大，且随着期望精度的提高而增大，反之，工作量小，数值结果就不会太精确。

数值法是指直接将待求解的数学方程进行离散化处理，将无限维的连续问题化为有限维的离散问题，将解析方程的求解问题化为代数方程的计算问题的一类方法。在这类方法中，应尽量保持数学上的严谨性，少作物理上的近似，以保证当离散精度无限提高时所得数值解也可无限地趋于精确解。从这个意义上讲，数值法既是一种近似方法，又留有提高计算精度的无限空间。解析法所求得的往往只是方程的经典解，数值法则突破了这一限制，能够求得方程的广义解(仍然是近似的)。数值法从原理上讲没有局限性，是一种普遍适用的方法，只是计算机的存储空间和计算速度限制了其应用范围。

数值方法的优点是：①原则上可以求解任意复杂边界的电磁工程问题；②准确度高。其局限性主要受限于计算机的容量、速度和有效位数。

综上所述，3 种解法各有千秋，它们相互促进，相互补充。而对于大量的工程实际问题，只能求其数值解。

2. 数值方法的发展现状和前景

数值方法的发展大致分为两个阶段，已经从“能否解决”问题的阶段发展到了“如何更快更好地解决”问题的阶段。为了实现这一目标，近期的数值法均围绕工程实际问题研究各种改进方法、手段及相应的计算技术。近年来，越来越多的研究单位和人员参与到电磁场数值方法的研究中，各单位和人员间也日益加强了相互的交流与合作。

提高计算能力的手段包括两方面，一是计算机技术的进步，包括内存增大、计算速度提高及并行技术的发展；二是快速算法及混合算法的发展。

近年来出现了多种商用软件，如 FEKO(基于积分方程法)、HFSS(基于有限元法)、CST(基于时域有限积分方法)、XFDTD(基于时域有限差分法)等。这些方法及软件各有优势，但仍有其不能解决的问题，所以致力于电磁场数值方法的研究还是很有前景的。

0.2 数值方法的地位和作用

各种电磁场数值方法(现称计算电磁学)已广泛应用于军民两方面，如 RCS 分析与隐身技术、天线分析与设计、电磁干扰、遥感技术、通信、生物工程、电路设计等，如图 0-1 所示。对于这些复杂的电磁问题，不仅解析方法无能为力，实验手段也不可能给予全面的解决，更不用说经济上付出的代价，而且，计算电磁学所能提供的信息的丰富程度也是实验方法无法比拟的。可以说，计算电磁学的发展改变了现代电磁场工程的设计过程，越来越多地依赖计算机辅助设计。这也充分说明了电磁场数值方法是一种解决电磁工程问题强有力的现代化方法，是电磁场理论的重要组成部分。

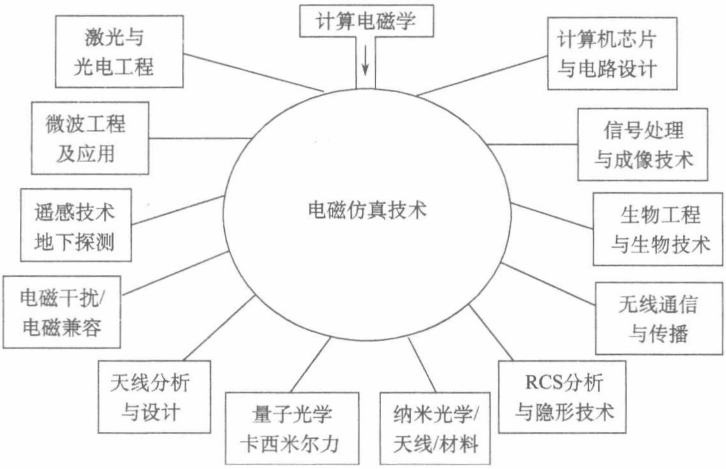

图 0-1　计算电磁学的应用图示

0.3　数值方法的特性和分类

数值方法按其数学模型的形式分为微分方程法和积分方程法；还可以按照求解域分为频域方法和时域方法，如图 0-2 所示。其共同特点是：将连续函数离散化，将描述的微分方程或积分方程化为代数方程组，再利用求解代数方程组的解法求得其数值解。

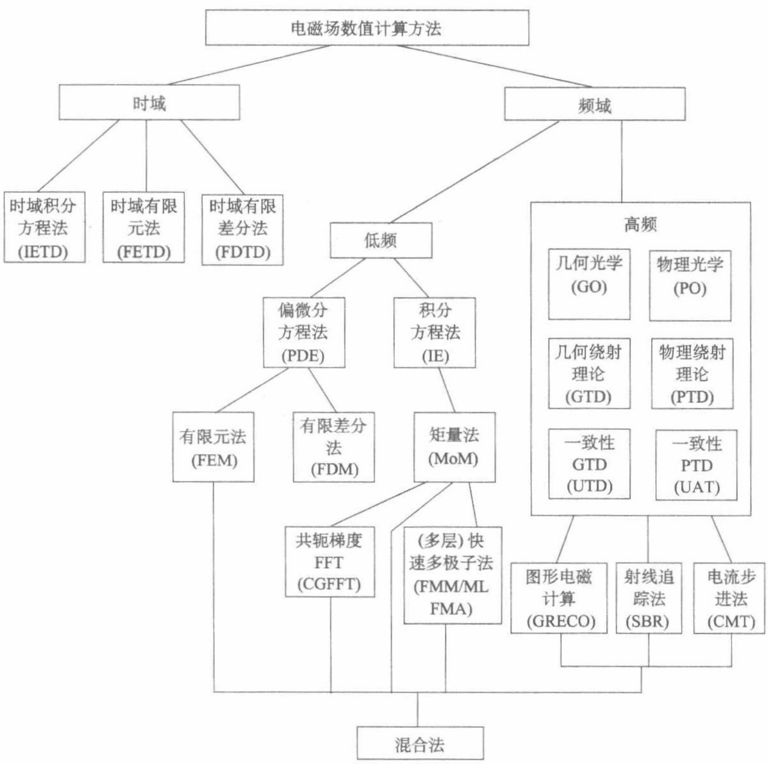

图 0-2　数值方法分类

在应用数值方法解题时，大致可按以下步骤进行。

(1) 分析问题，构造模型，即从实际问题出发，进行一定的简化，构成物理模型，然后用数学语言描述，建立其数学模型。例如，要计算一个金属波导，其导电率为有限值，其中填充的介质可能是非线性或不均匀的。我们在建立物理模型时，将其导电率视为无穷大，将介质视为线性的、均匀的，而且假设波导中无自由电荷和传导电流、波导工作在匹配状态、截面是均匀的。在这些假设前提下，我们采用亥姆霍兹方程来描述它，即 $\nabla_t^2\varphi + K_c^2\varphi^2 = 0$。

(2) 选择适当的数值方法将数学模型离散化，即化为一组代数方程或矩阵特征值问题；例如，选用差分法将亥姆霍兹方程化为矩阵特征值问题 $\boldsymbol{K\varphi=\lambda\varphi}$。

(3) 求解代数方程组(或矩阵特征值问题)，得到数值结果。

(4) 误差分析及检验。

0.4 数值方法的前后处理

电磁场数值方法是求解能代表整个问题的某些离散点(区域)的值，因此，在实现数值计算之前，我们首先要找到这些离散点(区域)。这一过程称为剖分或网格创建。

我们用规则或不规则的点、线、面、体的集合来模拟计算区域，并给这些剖分单元赋予能表达物理特性的参数值(通常称为基函数)。线可以是直线段、曲线段；面常用三角形与矩形块，可以是平面，也可以是曲面；体有四面体、三棱柱与六面体等，同样可以用曲面体或平面体。通常，在同一个问题中，我们使用同样的单元剖分。当然，这些剖分必须细到能表达出电流或场的振荡。

在电磁分析中，得到光滑、规则的网格是很重要和具有挑战的工作，对于复杂目标尤其如此。目前，很多商业软件能助我们完成剖分，如 ANSYS、Hypermesh 等。

完成数值计算后，我们得到的数值结果是否有效、是否可用呢？这是一个极为重要、必须解决的问题。只有通过检验证明所得数值结果是所求问题的数值解，该结果才是有用的。

事实上，任何数值方法在解题过程中都有近似，都会带来误差。所以对其数值结果进行检验、判断是必不可少的步骤。下面简单介绍误差的来源及数值结果的检验方法。

1. 主要误差来源

(1) 模型误差。将实际问题抽象为物理、数学模型时，可能将某些条件理想化，或者加上了某些限制，或忽略某些次要因素，建立的是一个理想化模型(如学习波导时，假定波导是匀直的、无限长的)，它只是客观实际的一种近似、粗糙描述，必然带来误差。

(2) 观测误差。数学模型中常常包含着一些通过实验测量得到的物理参数，如介电常数、导电率、电磁耦合系数等。这些实验测量参数不可避免地带有误差，这种误差称为观测误差。前两项误差其实对于包括严格法在内的任何解法都是存在的。

(3) 方法误差(截断误差)。例如，差分方程用差商代替微商，截断了泰勒级数的高阶项。如果碰到积分，也是取有限项之和，且迭代是迭代有限次数。

(4) 计算机舍入误差(累积误差)。这是由计算机的有限字长带来的，也称为计算误差。

在计算机上进行很多次运算以后，其舍入误差的累积也是相当惊人的。

2. 主要检验方法

既然有这么多误差，计算结果一定要进行检验（如和实验结果比），以判定结果是否可用。不符合检验的计算结果一定是错误的，符合检验的计算结果也不一定就是正确的。主要检验的方法如下。

(1) 利用先验知识检验。如解的互易性、对称性等，以及从经验和概念上去判断与参量之间的关系、变化趋势或极限情况等。例如，对于静态场，常用的检验方法有是否满足边界条件，电位变化是否具有连续趋势，等位线走向是否与边界条件呈相似变化，对称场是否对称等。

(2) 对比检验。利用已有成果的数据来检验，例如，解析结果、实验结果、文献结果。还可以同时利用几种方法对计算结果进行比较，如有限元法和矩量法的结果。

(3) 收敛试验。现在通常在计算结果与对比结果相近但不吻合时使用，以耗费大量机时为代价。具体做法是逐渐细化场（剖分加密）或提高收敛精度。

我们把数值方法的解题步骤概括为如图 0-3 所示的简图。由图 0-3 可见，除了各种

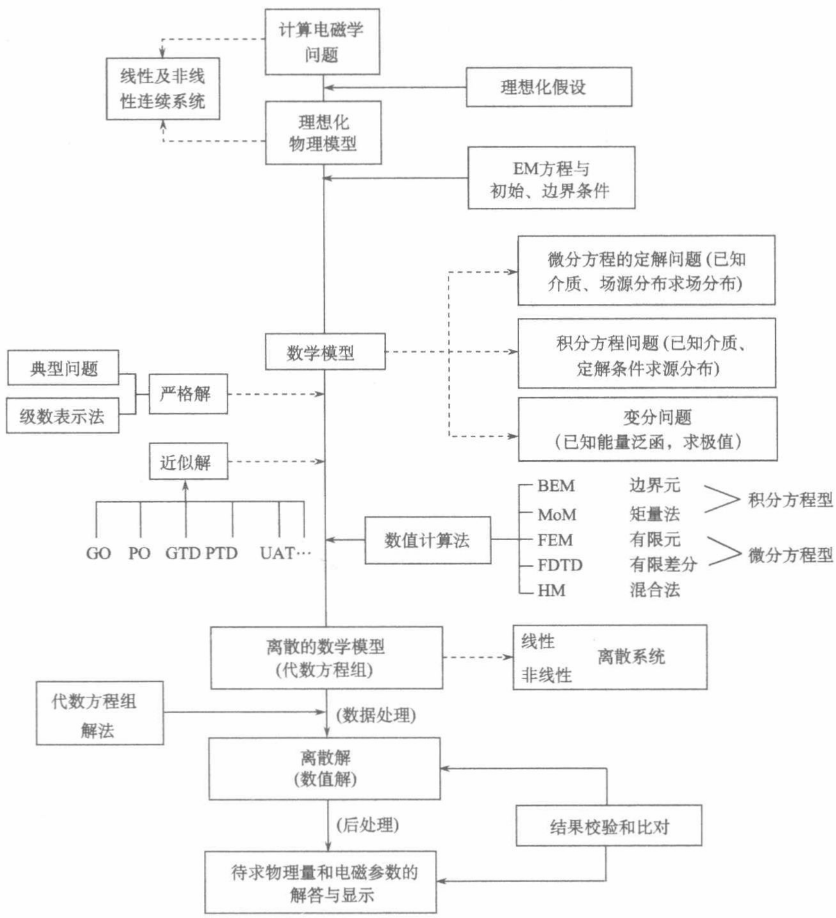

图 0-3　电磁场数值计算流程图

数值方法为核心内容外，执行电磁场数值计算必须具备一定的数学、物理基础和电磁场的专业知识，建模中还需要实践知识和经验的积累，合理地利用理想化或工程化假设，准确地给出问题的定解条件(初始条件、边界条件)；并在计算流程的前处理(如场域剖分、数据文件构成等)、数据处理和后处理等计算机编程和应用方面具备相应的基础。

0.5 数值方法的代码实现

数值方法是程序语言的典型应用。我们常用的程序语言包括 Fortan 以及后来的 Fortan 90、C、C++，或使用交互式数字编程环境，如 MATLAB。虽然 Fortan 不再流行，但其简单、运行速度快的特点，使其在科学计算中占有重要地位。其他语言更典型地被用于商业代码中。

本书中的算例和参考代码都使用 MATLAB 语言编写。相比于 C、Fortan 等语言，MATLAB 语言因指针和低级计算构造封装起来而更简单易学。这也使得 MATLAB 语言成为学习数值方法应用的合适工具。但它运行时会比 C 和 Fortan 慢且多占内存。虽然 MATLAB 的一些核心函数已经高度优化，能快速运行，但是，一个算法的性能强烈地依赖其实现的细节。对于本书，我们使用 MATLAB 语言就足够了，因为在程序语言的学习、编写和调试代码方面，MATLAB 语言都比其他语言容易。

对于本书描述的基础算法，读者必须通过大量的实践来掌握。好的编程习惯会节省大量时间。在实现算法的过程中，读者要注意如下几方面。

1. 编写代码

(1) 正式写代码前，首先在纸上画出算法流程，找出其中的关键部分，并将算法的主要公式写成尽可能接近真实代码的形式。这一步骤通常被忽略，但没充分理解算法就写出的代码通常很难调试。

(2) 将代码分成几个逻辑部分，如物理参数定义、求解参数、计算过程参数、剖分及数据处理、矩阵填充、线性求解、后处理。

(3) 不要将未知量和物理尺寸等作为常数，而将其作为变量参数定义在整个代码的开头部分。

(4) 尽量使用缩进循环和条件语句，不要写长句。

(5) 对代码进行注释。包括，简单描述一下变量的意思，函数的作用，函数中每行代码或几行代码的意思，甚至更详细地将公式注明；用明显的分隔符将代码的主要几个部分分开；记录易错的符号和常量。

2. 调试代码

代码写完不代表它能工作，不恰当的调试方法可能会耗费我们大量的时间。为尽快得到能工作的代码，有如下几个建议。

(1) 切忌盲目改变数字或命令，不断地运行代码来获得正确结果。这种做法在某些情况下偶尔有用，但通常是浪费时间。

(2)好的调试习惯是将代码分成几部分，每部分分别调试。很难同时调试一个以上的复杂代码段。

(3)用一个特殊算例来检查代码的正确性，也许我们会从其结果曲线中得到些提示。

(4)一直调试代码，可能会卡在某个地方不能通过。这时最好暂别代码，休息一会儿后再回头仔细读代码。

(5)作为最后的手段，从头开始重写代码。这可能比从一个长码中找到一个易被忽略的小错误更快。

有时，代码的前后处理比核心算法更难完成和调试。在证实前处理代码前不要去调试核心算法代码，在证实核心代码前不要去调试后处理代码。谨记，将复杂的长代码分成小段来调试，不要一起调试。

第 1 章　有限差分法

有限差分法(Finite Difference Method，FMD)于 19 世纪末被提出，自 20 世纪 50 年代以来得到了广泛的应用，是电磁场数值方法中应用得最早的一种，至今仍被广泛运用。因为该方法是一种直接将微分问题变为代数问题的近似数值解法，数学概念清晰，表达简单、直观。无论是常微分方程、偏微分方程、各种类型的二阶线性方程，甚至是高阶或非线性方程，均可利用差分法转化为代数方程组，而后利用计算机求其数值解。

有限差分法的基础是差分原理，它把电磁场连续域内的问题变为离散系统的问题，即用各离散点上的数值解来逼近连续场域内的真实解，因而它是一种近似的计算方法。根据目前计算机的容量和速度，对许多问题可以得到足够高的计算精度。

该方法将求解域划分为差分网格，用有限个网格节点代替连续的求解域。有限差分法以泰勒级数展开等方法，用网格节点上的函数值的差商代替控制方程中的导数进行离散，从而建立以网格节点上的值为未知数的代数方程组。

1.1　有限差分法基础

1.1.1　差分与差商

设函数 $f(x)$ 的自变量 x 有一个小增量 $\Delta x = h$，则 $f(x)$ 的增量为

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \tag{1-1}$$

$\Delta f(x)$ 称为函数 $f(x)$ 的一阶差分，它与微分不同，因为是有限量的差，故称为有限差分。

式(1-1)为一阶向前差分，与之对应的 $\Delta f(x) = f(x) - f(x-h)$ 为一阶向后差分，组合一下得 $\Delta f(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2}$，此一阶差分称为中心差分。

而一阶差分 Δf 除以增量 h 的商，就称为一阶差商：

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1-2}$$

当增量 h 足够小时，差分 Δf 与微分 $\mathrm{d}f$ 之间的差才足够小，$\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ 将接近于一阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$。

一阶差分 Δf 是自变量 x 的函数。按式(1-1)计算一阶差分 $\Delta f(x)$ 的差分，就得到二阶差分 $\Delta^2 f(x)$：

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \tag{1-3}$$

函数 $f(x)$ 的一阶导数 $f'(x)$ 为

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

它是无限小的微分 $\mathrm{d}f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x)$ 除以无限小微分 $\mathrm{d}x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x$ 的商。应用差分，$f'(x)$ 可近似表示如下：

一阶向前差商

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1-4}$$

故 $f'(x)$ 可表示为有限小的差分 $\Delta f(x)$ 除以有限小差分 Δx 的商，称为差商。同理，一阶导数 $f'(x)$ 还可表示如下：

一阶向后差商

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \tag{1-5}$$

中心差商

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \tag{1-6}$$

它们对于一阶导数的逼近度可以通过泰勒公式的展开式得知。

由泰勒公式，其近似表达式可以写成

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2!}h^2\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} + \cdots \tag{1-7}$$

和

$$f(x-h) = f(x) - h\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2!}h^2\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} - \cdots \tag{1-8}$$

可见式(1-4)和式(1-5)都截断于 $h\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ 项，而把 h^2 项以及更高幂次的项全部略去。式(1-6)相当于把相应的泰勒公式

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{3!}h^3\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x^3} + \cdots \tag{1-9}$$

截断于 $2h\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$，略去了 h^3 项以及更高幂次的项。很明显，以上 3 种差商表达式中，式(1-6)所示的差商截断误差最小。其误差大致和 h 的二次方成正比。显然，采用中心差商代替导数，其精度更高。这种抛弃了泰勒展开式高阶项所带来的误差就称为截断误差。$h \to 0$，截断误差 $\to 0$。

函数 $f(x)$ 的二阶导数(差商的差商) $f''(x)$ 为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{1}{\Delta x}\left(\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x+\Delta x/2} - \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x}\right) \\ &\approx \frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}\right] \\ &= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}\end{aligned} \tag{1-10}$$

式(1-10)相当于把泰勒公式 $f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+h^2\dfrac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{2}{4!}h^4\dfrac{\mathrm{d}^4f(x)}{\mathrm{d}x^4}+\cdots$ 截断于 $h^2\dfrac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}$ 项，略去了 h^4 项以及更高幂次的项。

对于偏导数，可仿照上述方法，将 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 表示为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\approx\frac{u(x+h,y,z)-u(x,y,z)}{h} \tag{1-11}$$

同样，二阶偏导数可表示为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\approx\frac{u(x+h,y,z)-2u(x,y,z)+u(x-h,y,z)}{h^2} \tag{1-12}$$

由此可见，有限差分法误差的关键之一为 Δx 的大小。

1.1.2　求解步骤与网格划分

有限差分法的应用范围很广，不但能求解均匀或不均匀线性媒质中的位函数和有关参量，而且能解决非线性媒质中的场；它不仅能求解恒定场或似稳场，还能求解时变场。从前面的数学分析可以看到，有限差分法是以差分原理为基础的一种数值方法，它实质上是将电磁场连续域问题变换为离散系统的问题来求解，也就是通过网格状离散化模型上各离散点的数值解来逼近连续场域的真实解。通常的步骤如下。

(1)采用一定的网格划分方式离散化场域。从原则上说，离散点可以采取任意方式分布，但为了简化问题，减少所用的差分格式数目，提高解题速度和精度，通常使得离散点按一定的规律分布，即用规则网格划分求解域。常见的规则差分网格有正方形、矩形、平行四边形、等角六边形和极坐标网格等，如图 1-1 所示。这些规则网格线的交点(节点)就是我们要计算其场值的离散点，网格间的距离称为步长，用 h 表示。其中最常用，也是最重要的是正方形网格。

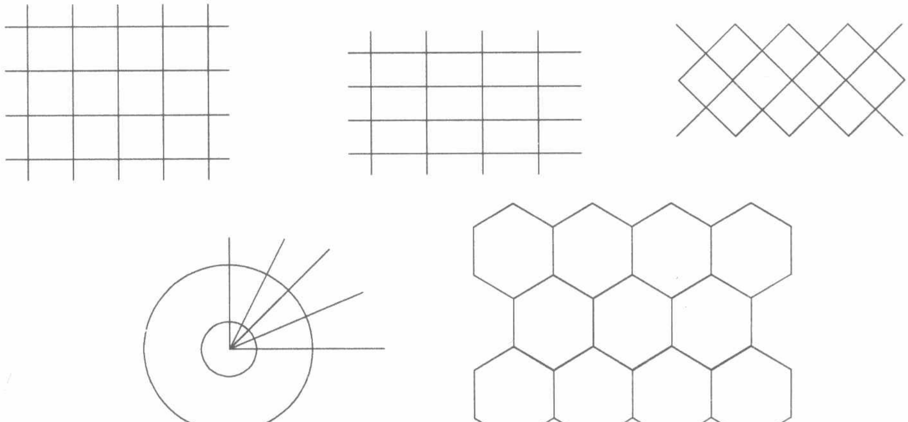

图 1-1　常见的规则差分网格

当然，规则划分网格也有其局限：①不适合场的变化十分剧烈的问题，变化剧烈要取密网格，于是增加了计算量和存储量；②不适用于曲线边界或分界面，因为它们与网格斜交而不在节点处。在第二类边界条件或含有法向导数的边界条件下将造成不少困难，它需要使用更高级的插值，由此也导致了差分法的两个局限：①因为必须使用规则网格，所以差分法不适用于场的变化剧烈且不均匀的问题；②不适用于曲线边界或分界面，因为会导致不对称的差分格式。

(2) 基于差分原理的应用，需要对场域内偏微分方程以及场域边界上的边界条件，也包括场域内不同媒质分界面上的边界条件，都进行差分离散化处理，给出相应的差分计算格式。

(3) 结合选定的代数方程组的解法，编制计算机程序，求解由上所得的对应于待求边值问题的差分方程组，所得解答即为该边值问题的数值解。

1.2　静态场问题的差分法

在实际计算中，对于不同问题，所采用的差分方程的具体形式是不同的；具体取决于所求问题所选用的坐标系、网格形状和问题的边界条件。例如，直线边界选用直角坐标系，圆形边界可以选用极坐标系等。下面我们以直角坐标系下的二维泊松方程为例介绍不同差分格式的形成。

1.2.1　差分格式的建立

泊松方程在物理中是用来描述稳定场的状态的，写为

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{1-13}$$

相应的边界条件有三类：

$$\phi|_G = g(p)\ \text{(第一类边界条件)} \tag{1-14}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}|_G = g(p)\ \text{(第二类边界条件)} \tag{1-15}$$

$$\phi|_G + g_1(p)\frac{\partial\phi}{\partial n}|_G = g_2(p)\ \text{(第三类边界条件)} \tag{1-16}$$

介质不连续处还要增加连接条件

$$\begin{cases} \phi_1|_G = \phi_2|_G \\ \varepsilon_1\dfrac{\partial\phi}{\partial n}|_G - \varepsilon_2\dfrac{\partial\phi}{\partial n}|_G = \sigma \end{cases} \tag{1-17}$$

式中，G 为区域边界；p 为边界上的点；$\boldsymbol{n}$ 为边界的法向单位向量。

按照前面所说的步骤进行数值求解。

首先离散化场域，通常采用完全有规律的分布方式，这样在每个离散点上可得出相同形式的差分方程，有效地提高解题速度。如用矩形网格，如图 1-2 所示。