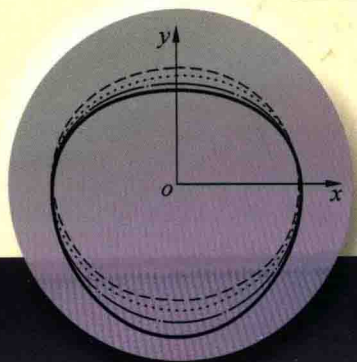


Niantanxing Lixue yu
Xintixi

黏弹性力学与 辛体系

张维祥 徐新生 王允平 | 著



华中科技大学出版社
<http://www.hustp.com>

Niantanxing Lixue yu
Xintixi

黏弹性力学与 辛体系

张维祥 徐新生 王尔平

著



华中科技大学出版社

http://www.hustp.com

中国·武汉

内 容 简 介

本书以黏弹性材料为背景,详细讨论辛体系方法在固体力学中的应用技术。主要研究内容包括:平面和空间黏弹性材料,复合材料及功能梯度材料等问题中哈密顿体系的建立,本征值、本征解的求解方法,非齐次方程特解以及边界条件问题的处理方法。

图书在版编目(CIP)数据

黏弹性力学与辛体系/张维祥,徐新生,王玆平著. —武汉:华中科技大学出版社,2016.5
ISBN 978-7-5680-1332-1

I. ①黏… II. ①张… ②徐… ③王… III. ①黏弹性介质力学 IV. ①O345

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 263385 号

黏弹性力学与辛体系

张维祥 徐新生 王玆平 著

Niantanxing Lixue yu Xintixi

策划编辑:万亚军

责任编辑:姚 幸

封面设计:刘 卉

责任校对:曾 婷

责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)81321913

录 排:武汉三月禾文化传播有限公司

印 刷:武汉鑫昶文化有限公司

开 本:710mm×1000mm 1/16

印 张:11.5 插页:2

字 数:257 千字

版 次:2016 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

定 价:38.00 元



华中出版

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

前 言

辛体系方法是近 20 年来发展起来的在力学领域备受关注的计算方法。与半逆法等传统的单变量求解方法相比较,辛体系方法以原变量及其对偶变量为基本变量,在状态空间中研究力学问题,使得基本控制方程得到了降阶,克服了拉格朗日体系下求解高阶微分方程的困难以及对解的形式的主观猜测。近年来,辛体系方法在弹性力学中得以成功应用,成为现代计算力学的一个重要课题,研究成果迅速拓展到流体力学、压电材料、磁弹性材料以及现代纳米力学等广阔的应用力学领域。

尽管辛体系方法能够得到一系列弹性力学的解析解,进一步的工程应用则受到解析性质的限制。本书以工程中常见的黏弹性材料为背景,借助于拉普拉斯变换和对应原理,将具有保守系统特点的辛体系方法引入非保守系统的黏弹性问题,形成一种求解黏弹性材料和结构相关力学问题的新的数值计算方法。

全书共 10 章:第 1 章为绪论;第 2 章重点介绍黏弹性材料本构理论;第 3 章简要介绍辛体系方法;第 4、5 章分别阐述平面直角坐标系和空间柱体黏弹性问题;第 6 章讨论空间问题中比较特殊的也是工程中较为常见的柱体轴对称问题;第 7 章利用变量代换方法,将热黏弹性问题归结为求解非齐次方程的特解问题;第 8 章采用坐标变换方法,将辛体系方法拓展到扇形域、扇环形域黏弹性力学;第 9、10 章分别研究了梯度功能材料和弹性-黏弹性纤维增强复合材料问题的求解方法。

本书由南通理工学院张维祥、大连理工大学徐新生、大连交通大学王朶平共同完成。其中,第 1、2、5、6、7、10 章由张维祥撰写,第 3、4 章由徐新生撰写,第 8、9 章由王朶平撰写。

本书的出版得到了国家自然科学基金项目(编号:11202043,11372070)的支持,特表示感谢。

在本书的写作过程中,参阅了大量的参考文献,在此向各位文献作者表示感谢。

由于作者水平有限,本书会存在不足和缺点,恳请读者批评指正。

张维祥 徐新生 王朶平

2015 年 9 月

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 黏弹性材料的研究意义	(1)
1.2 国内外研究概况	(2)
1.3 黏弹性力学与辛体系	(5)
本章参考文献	(5)
第 2 章 黏弹性材料本构理论	(10)
2.1 概述	(10)
2.2 微分型本构关系	(11)
2.3 积分型本构关系	(19)
2.4 三维本构关系	(23)
本章参考文献	(25)
第 3 章 辛体系方法	(27)
3.1 圣维南问题与辛体系	(27)
3.2 勒让德变换	(28)
3.3 正则变换	(29)
3.4 哈密顿正则方程	(31)
3.5 铁木辛柯梁理论	(32)
本章参考文献	(35)
第 4 章 平面直角坐标系黏弹性问题	(37)
4.1 基本问题与辛正交归一关系	(37)
4.2 圣维南问题	(41)
4.3 局部效应问题	(50)
本章参考文献	(65)
第 5 章 空间柱体黏弹性问题	(66)
5.1 基本问题与哈密顿体系	(66)
5.2 零本征值本征解	(69)
5.3 非零本征值本征解	(78)

第 6 章 柱体轴对称问题	(82)
6.1 黏弹性厚壁筒	(82)
6.2 圆柱体轴对称问题	(94)
第 7 章 热黏弹性材料计算	(101)
7.1 基本问题	(101)
7.2 圣维南问题	(102)
7.3 局部效应分析	(110)
7.4 二维稳态热传导	(117)
7.5 热黏弹性圆柱体的蠕变和松弛	(123)
本章参考文献	(128)
第 8 章 极坐标下的黏弹性问题	(130)
8.1 辛体系下的基本问题	(130)
8.2 基本本征解	(132)
8.3 边界条件	(136)
第 9 章 黏弹性梯度功能材料	(141)
9.1 基本控制方程	(142)
9.2 齐次方程的通解	(145)
9.3 边界条件	(155)
9.4 算例分析	(156)
本章参考文献	(167)
第 10 章 弹性-黏弹性纤维增强复合材料	(169)
10.1 国内外研究概述	(169)
10.2 平面力学问题	(170)
10.3 三维力学问题	(177)
本章参考文献	(178)

第 1 章 绪 论

1.1 黏弹性材料的研究意义

众所周知,弹性固体具有确定的构形,其在静力荷载作用下发生的变形与时间无关,去除外力后能够完全恢复原来的形状。从能量角度来说,外力在弹性体变形过程中所做的功全部以弹性势能的形式存储,且在卸除外力过程中能够释放出来。黏性流体则没有确定的形状,外力作用下变形随时间而变化,产生不可逆的流动。

随着科学技术的迅速发展,现代工业中应用了许多新型材料,例如各种类型的高分子聚合物、合成橡胶、油漆、玻璃、陶瓷等。这些材料具有强度高、易加工成形等优点,它们作为结构材料,越来越广泛地应用于化工、机械、航空航天、建筑及海洋开发等工业领域^[1]。据统计,目前世界上高分子聚合物材料的产量在体积上已经大大超过了金属材料。高分子聚合物及其复合材料与结构在各种承载与使用条件下的静力学、动力学分析已经成为力学领域的一个重要研究内容。从力学性能上看,这些材料不但具有弹性固体的特性,而且还具有黏性流体的特征,故称之为黏弹性材料。新材料的出现使得历来在经典材料力学、流体力学中所不考虑的物质性质,尤其是材料的黏弹性越来越受到重视。随着生产的发展,工程实践的广度和深度都不断增加,常常会遇到处理结构材料在高温、高压、高速等极端条件下工作的力学问题,例如某些结构和装置发生的严重脆断、倒塌事故的分析等。但是这些事故不是发生在加载瞬时,而是在经历了一段时间后突然发生的,这称为“延迟断裂”。这种“延迟性”和“突发性”的特点,犹如疲劳破坏一样,人们很难预防。因此研究材料的“时间效应”,尤其是高温蠕变特性,便成为一些实际工程中备受关注的问题。

现实中的一切固体都具有流变特性,即真实材料或多或少地存在“蠕变”“松弛”“迟滞”等现象,例如:大地在缓慢地“流动”,比萨斜塔斜度在逐渐增加,古老教堂的大窗玻璃变得上薄而下厚,等等。在相关的条件中,最重要的是时间与温度。在一定的条件下,沥青、饴糖、玻璃、冰川、岩石和地壳均发生流动与变形。在常温、小变形情况下,多数金属为线弹性体,但即使在这种情况下,乐器中的金属簧片的振动甚至在真空中也会很快衰减,这说明材料并非完全弹性体,材料内部存在黏滞阻力。任何固体都具有一定的流动性,反之,流体也都具有一定的黏滞性,如石油在管道中的流动,血液在血管内的流动等,都受到一定的黏滞阻力。虽然多数金属材料在常温和小应变时表现为弹性,但在振动问题中,或高温条件下的构件,往往需要考虑其黏弹性行为。

在研究受高速冲击的金属构件时,则需建立非纯弹性的力学模型,如黏塑性和黏弹性模型或高温高压下固体的流体动力模型。这说明受载与使用条件对于材料性能有重要的影响。因此材料流变特性或黏弹性特性的研究具有普遍的意义。

黏弹性力学是在应用力学和材料科学之间新近发展起来的边缘学科,也是流变学的重要组成部分。近年来,在聚合物-复合材料科学、岩土地质力学、生物力学和建筑材料科学中,黏弹性力学得到了越来越多的应用。聚合物材料已成为重要的工程材料,其广泛应用促进了有关力学性态和结构分析方法的研究。生物材料往往有明显的黏弹性。著名生物力学专家冯元桢指出:几乎所有的生物固体都是黏弹性的,只不过有的弹性较强,有的黏性较强,在程度上有所差别。^[2]因此,生物医学工程方面的许多文献都有关于生物体的黏弹性能论述。岩土力学、地质力学、地震预报、生物力学等的蓬勃发展也给予黏弹性理论以极大的刺激和推动。应用黏弹性理论,研究这类材料及其在结构中的力学行为,有着重要的理论意义和实用价值。

1.2 国内外研究概况

黏弹性力学是固体力学的基本内容之一,通常包括两方面的内容:一是材料性能的合理描述与本构关系的准确表达;二是各种与黏弹性相关问题的数学模型的建立、理论分析和求解。对于黏弹性力学问题的求解,长期以来人们进行了大量的探索,提出了各种方法。由于黏弹性材料具有强烈的时间、温度和频率效应,理论分析和定量计算都十分困难,跟不上应用的需要,因此引起了国内外学者的极大关注。下面结合本书的研究方向,将有关领域的研究情况作以综述。

1.2.1 黏弹性结构静动力学的计算方法

一般而言,一旦给定黏弹性材料的本构关系,建立黏弹性力学的数学模型并不困难,但由于系统是时变的,分析求解黏弹性力学问题比弹性问题要困难得多。近年来,国内外众多学者在有关黏弹性问题的求解方法上做了大量的研究工作。其中常用的数值方法包括有限元法,边界元法和伽辽金(Galerkin)方法等。

1. 有限元法

主要分为两类。一类是直接在时间域内求解,一般采用增量叠加的方法分析黏弹性结构的应力和变形,即在计算中将总时间分成若干间距,假定在每一个时间间距内应力保持不变,将在该段时间内产生的蠕变变形作为下一时刻初始位移增量,逐步叠加得到总位移量。在用这种方法的研究中,绝大多数采用积分型本构关系,并且松弛模量用普罗尼(Prony)级数表示,由此卷积可用递推公式表示,内存量可以极大地减少。Argyris^[12]和 Suarez^[13]等用这种方法研究线性黏弹性结构的小变形问题,Sim和 Lee^[14]用有限元法分析了黏弹性动力问题。

另一类是利用弹性-黏弹性对应原理,将黏弹性问题变换成拉普拉斯域内的弹性问题,用有限元法求解,然后采用数值逆变换得到原黏弹性问题的解^[15]。拉普拉斯变换

是一种比较有效的方法,经过变换时域中的问题可以在相空间讨论^[16-18]。然而逆变换却存在诸多困难,因此拉普拉斯逆变换也成为重要的研究课题。Folch等^[19]利用普罗尼法进行了逆变换;Wang等^[20]则根据小波理论求解了逆变换问题。事实上,多数问题难以得到解析解的反变换,只能采取数值方法^[21]。更多的研究将有限元法与拉普拉斯变换结合起来^[22-24]。Chen^[25]用杂交有限元法和弹性-黏弹性对应原理研究了铁木辛柯(Timoshenko)梁拟静态和动力学行为。Akoz和Kadioglu^[26]利用混合有限元法和数值拉普拉斯逆变换研究了阶跃载荷作用下铁木辛柯梁的静、动力学行为。Haneczok^[27]对黏弹性问题的松弛进行了分析。Adolfsson^[28]进一步讨论了大变形问题。Stephen^[29]研究了弹性厚壁筒的衰减系数问题。

有限元求解方法也常用于黏弹性动力学问题。陈前等^[30]针对弹性-黏弹性复合结构提出了对偶保守结构概念,给出了两种数值方法。Duan和Hansen^[31]提出了时域上的子结构合成法。Bagley^[32]利用有限元法研究一种用分数导数型本构关系描述的黏弹性复合材料简支梁在受阶梯轴压载荷作用下的瞬态响应问题。

2. 边界元法

用边界元法分析黏弹性结构变形的论文大多数的工作基于弹性-黏弹性对应原理,另一类直接在时间域内用增量叠加方法求解。周哲^[33]采用时间域内的边界元方法分析了悬臂梁分别受分布载荷和集中载荷作用,以及具有钢外壳黏弹性厚壁圆筒受内压作用的小变形问题。至于黏弹性有限变形的边界元方法,由于奇异积分的困难以及公式的复杂,迄今尚未见有关报道。对于动力学问题,杨挺青等^[34]将边界元法和拉普拉斯变换法结合,研究了黏弹性基支板轴对称问题的动力响应。丁睿等^[35]在拉普拉斯域中给出了构造基本解的两种近似方法,并利用改进的Bellman逆变换技术,求得较高精确的解,还证明了方法的收敛性和误差估计。Schanz和Gaul^[36]利用弹性-黏弹性对应原理,给出了一种具有分数导数型本构关系黏弹性阻尼结构的动力响应的边界元法。刘靖华等^[37]提出了黏弹性固体的精细积分有限元算法,边界有限元法解决黏弹性蠕变问题。

3. 伽辽金法

当研究黏弹性结构的稳定性、屈曲和长时间的力学行为,如混沌现象时,若直接利用有限元和边界元法离散线性或非线性积分-偏微分方程,将得到很高维的积分-常微分方程组,计算工作量巨大,费时费力。研究结构的动力学行为,特别是非线性动力学行为,往往采用伽辽金截断。伽辽金截断将积分-偏微分方程化为积分-常微分方程。Cederbaum^[38]、Suire^[39]等利用伽辽金法研究了一系列黏弹性结构的静、动力学问题。程昌钧和张能辉^[40]利用这种方法研究了大量非线性黏弹性结构的静、动力学问题,得到了一些有意义的新结果。对于两端简支黏弹性梁,伽辽金法得到的结果与有限元法和刚性有限元法的结果一致。Moon等^[41]的实验工作表明,对于一端固支的弹性梁,采用伽辽金截断得到的自由端位移的混沌运动与实验结果的定性一致。Abhyankar等^[42]的数值工作表明,由伽辽金方法得到非线性简支梁的动力学性

态,与直接求解非线性偏微分方程得到的结果定性一致。除直接与数值和实验结果进行比较外,还可对同一数学模型截取不同的项数而得到不同简化模型定性比较动力学行为的差异,Chen 和 Cheng^[43]研究了 Leaderman 非线性:本构关系描述的非线性黏弹性梁的动力学行为。用数值方法比较 1 阶截断和 2 阶截断系统的动力学行为,发现两者定性相同,说明伽辽金截断方法对于研究黏弹性结构动力学行为的适用性。

1.2.2 黏弹性结构的稳定性、屈曲和静、动力行为的研究

到目前为止,在弹性结构的稳定性领域,从准静态问题到动力学问题都已经存在深入的研究成果,特别是分支理论及其数值方法的发展,为结构稳定性的研究提供了新的观点和方法。Bolotin^[44]在稳定性研究领域做了一系列开拓性的工作;Drozдов^[45]在黏弹性力学中的稳定性分析方面做了较为系统的工作,取得了若干新的进展。然而其成果主要局限于较特殊的系统,如线性系统或者特殊边界条件。对于非线性系统仍有大量的问题尚待解决。

对于黏弹性结构准静态稳定性的研究工作比较多,一般采用理论分析和数值方法给出结构稳定的临界条件。Szyszkowski 等^[46]采用拉普拉斯变换法,考察了完善和不完善黏弹性杆的准静态稳定性问题。Touati 和 Cederbaum^[47]采用多重尺度法给出了黏弹性杆、板稳定的临界载荷与材料参数的关系。Drozдов 等^[48]对黏弹性结构稳定性提出了一系列的判定条件。Plaut^[49]和 Potapov^[50]采用李雅普诺夫(Lyapunov)方法得到了黏弹性杆、板的稳定性条件。Shirahatti^[51]等利用弗洛奎特(Floquet)理论给出了周期载荷作用下的线性黏弹性杆振动的稳定图。

在黏弹性结构的屈曲和分叉研究方面,Mignot^[52]研究了黏弹性杆的准静态屈曲问题。Drawshi^[53]和 Cederbaum^[54]采用变形影射法研究了线性黏弹性梁、圆板的准静态屈曲问题,表明结构具有多重平衡状态。Kurnik^[55]研究了旋转的黏弹性轴振动分析中的 Hopf 分叉。Cheng 等^[56]研究了非线性黏弹性矩形板的屈曲问题,提出了临界时间的概念,证明了临界时间后结构存在多重平衡态的可能性,从而使矩形板处于类似混沌的状态。陈立群等^[57]采用平均化方法,确定了非线性黏弹性柱出现 Hopf 分叉的临界载荷,并用数值方法进行了验证。Fan 等^[58]讨论了黏弹性圆板的准静态屈曲问题,给出了屈曲临界载荷和屈曲时间。杨挺青等^[59]通过对黏弹性薄板压屈的稳定性分析,讨论了蠕变屈曲载荷-时间特性,表明屈曲载荷与时间相关,并进行了相关的实验研究。

非线性黏弹性结构动力学行为的控制方程一般为非线性偏微分-积分方程,是复杂的无限维动力系统,所以对黏弹性结构的长时间的动力学行为的研究还很不成熟。一般利用伽辽金方法将控制方程约化为非线性微分-积分方程组或非线性微分方程组,在进一步限制材料的性质,例如取松弛函数为 $E(t) = A + Be^{-\omega t}$,上述的方程组可化为高阶的常微分方程组,然后利用研究动力系统的一些数值工具,例如时程曲线、相轨迹图、庞加莱(Poincare)映射、功率谱、最大李雅普诺夫指数等,来刻画黏弹性结

构复杂的动力学行为^[60]。Suire 和 Cederbaum^[61]研究了黏弹性杆在周期激励载荷作用下的混沌运动。程昌钧等^[62]和 Chen 等^[63]研究了非线性黏弹性矩形板的混沌和超混沌行为及黏弹性结构的混沌及混沌控制问题。丁睿等^[64]揭示了黏弹性板、壳在有限变形情况下丰富的动力学行为。

1.3 黏弹性力学与辛体系

本书将辛体系引入到黏弹性力学,在辛几何空间中研究黏弹性力学诸问题,分析辛本征解分别在时域和拉普拉斯空间的特征、物理含义和相互关系,建立一种基本求解方法和体系。作者自多年来从事辛体系与黏弹性的研究工作,积累了一定的工作经验。撰写本书的目的就是要对取得的研究成果作一个总结,与读者共勉^[65-70]。

本章参考文献

- [1] 周光泉,刘孝敏.粘弹性理论[M].合肥:中国科技大学出版社,1996.
- [2] 冯元桢.生物力学[M].北京:科学出版社,1983.
- [3] CHRISTENSEN R M. Theory of Viscoelasticity, An Introduction(Second edition)[M]. New York: Academic Press, 1982.
- [4] FINDLEY W N, LAI J S, ONARAN K. Creep and Relaxation of Nonlinear viscoelastic Materials[M]. North: Holland Pub. Co., 1976.
- [5] ROSSIKHIN Y A, SHITIKOVA M V. New method for solving dynamic problems of fractional derivative viscoelasticity[J]. International Journal of Engineering Science, 2001, 39: 149-176.
- [6] LEADERMAN H. Large longitudinal retarded elastic deformation of rubberlike network polymers[J]. Trans Soc Rheol 1962, 6: 361-382.
- [7] FINDLEY W N, LAI J S. A modified superposition principle applied to creep of nonlinear viscoelastic material under abrupt changes in state of combined stress[J]. Trans Soc Rheol, 1967, 11: 361-380.
- [8] PIPKIN A C, ROGERST G A. Nonlinear integral representation for viscoelastic theories[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1968, 16: 59-72.
- [9] BAGLEY R L, TORVIK P J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity[J]. Rheol, 1983, 27(3): 201-210.
- [10] BAGLEY R L, TORVIK P J. On the fractional calculus model of viscoelasticity behaviour[J]. Rheol, 1986, 30(1): 133-155.
- [11] DROCDOV A, KALAMKAROV A L. Constitutive model for nonlinear viscoelastic of polymer[J]. Polymer Engrg Sci, 1996, 36(14): 1907-1919.

- [12] ARGYRIS J H, PISTER K S, WILLAIM K J. Unified concepts of constitutive modelling and numerical solution methods for concrete creep problems[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1977, 10: 199-246.
- [13] SUAREZ L E, SHOKOOH A, ARROYO J. Finite element analysis of beams with constrained damping treatment modeled via fractional derivatives[J]. Appl Mech Rev, 1997, 50(11): 416-454.
- [14] SIM W J, LEE S H. Finite element analysis of transient dynamic viscoelastic problems in time domain[J]. Mech Sci Tech, 2005, 19: 61-71.
- [15] SCHMIDT A, GAUL L. Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 29: 37-55.
- [16] BARRETT K E, GOTTIS A C. FEM for one and two dimensional viscoelastic materials with spherical and rotating domains using FFT[J]. Computers & Structures, 2004, 82: 181-192.
- [17] LEE S S. Free edge stress singularity in a two dimensional unidirectional viscoelastic laminate model[J]. Appl Mech ASME, 1997, 64: 408-414.
- [18] TZENG J T. Viscoelastic analysis of composite cylinders subjected to rotation[J]. Composite Mater, 2002, 36: 229-239.
- [19] FOLCH A, FERNANDEZ J, RUNDLE J B, et al. Ground deformation in a viscoelastic medium composed of a layer overlying a half space: a comparison between point and extended sources[J]. Geophysical Journal International, 2000, 140: 37-50.
- [20] WANG J Z, Zhou Y H, HUAJIAN G. Computation of the Laplace inverse transform by application of the wavelet theory[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2003, 19: 959-975.
- [21] PAPARGYRI B S, BESKOS D E. Response of gradient viscoelastic bar to static and dynamic axial load[J]. Acta Mech, 2004, 170: 199-212.
- [22] SYNGELLAKIS S. Boundary element methods for polymer analysis[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2003, 27: 125-135.
- [23] DING R, ZHU Z Y, CHENG C J. Boundary element method for solving dynamical response of viscoelastic thin plate(I)[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1997, 18: 229-235.
- [24] GAUL L, SCHANZ M. Boundary element calculation of transient response of viscoelastic solids based on inverse transformation[J]. Meccanica, 1997, 32: 171-178.
- [25] CHEN T M. The hybrid Laplace transform/finite element method applied to the quasi-static dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams[J]. Numer Mech Eng, 1995, 38(3): 509-522.

- [26] AKOZ Y, KADIOGLU F. The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams[J]. Numer Meth, 1999, 44: 1909-1932.
- [27] HANECZOK G, WELLER M A. Fractional model of viscoelastic relaxation[J]. Materials Science and Engineering A, 2004, 370(1-2): 209-212.
- [28] ADOLFSSON K, ENELUND M. Fractional derivative viscoelasticity at large deformations[J]. Nonlinear Dynamics, 2003, 33(3): 301-321.
- [29] STEPHEN N G, WANG M Z. Decay rates for the Hollow circular cylinder[J]. Journal of Applied Mechanics, 1992, 59: 747-753.
- [30] 陈前, 朱德懋. 复合结构振动分析的数值方法[J]. 计算结构力学及其应用, 1990, 7(3): 27-35.
- [31] DUAN Q, HANSEN J S. Time domain substructure synthesis method for viscoelastic structures[J]. Journal of Applied Mechanics, 1995, 62(2): 407-413.
- [32] BAGLEY R L, TORVIK P J. Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures[J]. AIAA, 1985, 23(6): 918-925.
- [33] 周哲. 粘弹性边界元的一种新的增量叠加算法的研究[D]. 西安: 西安交通大学, 1987.
- [34] 杨挺青, 杨正. 粘弹性基支粘弹性板轴对称问题的动力响应[J]. 力学学报, 1990, 22(2): 217-222.
- [35] 丁睿, 朱正佑, 程昌钧. 粘弹性薄板动力响应的边界元方法理论分析[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(2): 95-103.
- [36] GAUL L, SCHANZ M. Viscoelastic BE Formulation in time domain[J]. Archive of Mechanics, 1994, 46(4): 483-496.
- [37] 刘靖华, 范益群, 钟万勰. 粘弹性固体的精细积分有限元算法[J]. 计算力学学报, 2004, 21(1): 109-114.
- [38] CEDERBAUM G, ABOUDI J. Dynamic instability of shear-deformable viscoelastic laminated plates by Lyapunov exponents[J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, 28(3): 317-327.
- [39] SUIRE G, CEDERBAUM G. Periodic and chaotic behavior of viscoelastic nonlinear(elastic) bars under harmonic excitations[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1995, 37(3): 753-772.
- [40] 程昌钧, 张能辉. 粘弹性矩形板的混沌与超混沌行为[J]. 力学学报, 1998, 30(6): 690-699.
- [41] MOON F C, HOLMES P J. A magnetoelastic strange attractor[J]. Journal of Sound and Vibration, 1979, 65: 285-296.

- [42] ABHYANKAR N S, HALL E K, HANAGUD S V. Chaotic vibrations of beams; numerical solution of partial differential equation[J]. Journal of Applied Mechanics, 1993, 60: 167-174.
- [43] CHEN L Q, CHENG C J. Dynamical behavior of nonlinear viscoelastic columns based on 2-order Galerkin truncation[J]. Mechanics Research Communications, 2000, 27(4): 413-419.
- [44] BOLOTIN V V. Dynamic instabilities in mechanics structures[J]. Appl Mech Rev, 1999, 52(1): 1-9.
- [45] DROZDOV A, KOLMANOVSKII V. Stability in viscoelasticity[D]. Amsterdam: Elsevier Science B V, 1994.
- [46] SZYSZKOWSKI W, GLOCKNER P G. The stability of viscoelasticity column: a dynamic approach[J]. International Journal of Solids and Structures, 1985, 21(6): 545-559.
- [47] TOUATI D, CEDERBAUM G. Influence of large deflection on the dynamic stability of nonlinear viscoelastic plates[J]. Acta Mech, 1995, 113(2): 215-231.
- [48] DROZDOV A. Almost sure stability of viscoelasticity structural members driven by random loads[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 197(3): 293-307.
- [49] PLAUT R, LYAPUNOV H. Stability of columns pipes and rotating shafts under time dependent excitations[J]. Dynamic Stability System, 1994, 9(1): 89-94.
- [50] POTAPOV V D. Stability of viscoelastic rod subjected to a random stationary longitudinal force[J]. Appl Math Mech, 1992, 56(1): 90-95.
- [51] SHIRAHATTI U S, SINHA S C. On the stability of perfect viscoelastic columns[J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 174(1): 57-68.
- [52] MIGNOT F, PUER J P. Buckling of a viscoelastic rod[J]. Arch Rat Mech Ana, 1984, 85(3): 251-277.
- [53] DRAWSHI M, CEDERBAUM G. Stability of multiloading viscoelastic nonlinear beams[J]. Computers & Structures, 1993, 46(2): 215-218.
- [54] CEDERBAUM G, DRAWSHI M. Multiple equilibrium states in the analysis of viscoelastic nonlinear circular plates[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1994, 36(20): 149-155.
- [55] KURNIK. Hopf bifurcation in vibrations of a rotating viscoelastic shaft[J]. Arch Budowy Maszyn, 1989, 36(4): 239-254.
- [56] CHENG CHANG JUN, ZHANG NENG HUI. Buckling and multiple equilibrium states of viscoelastic rectangular plates[J]. Shunglail Univ (English edition), 1999, 3(3): 192-198.
- [57] 陈立群, 程昌钧. 非线性粘弹性柱的稳定性和混沌运动[J]. 应用数学和力学,

- 2000,21(9):890-896.
- [58] FAN XIAO JUN, CHENG CHAN JUN. Suckled states of viscoelastic non-linear circular plates, Proceedings of ICNM [M]. III. Shanghai: Shanghai Univ Press, 1998, 196-200.
- [59] 杨挺青, 张晓春, 刚芹果. 粘弹性薄板蠕变屈曲的载荷-时间特性研究[J]. 力学学报, 2000, 32(3): 319-325.
- [60] 刘延柱, 陈立群. 非线性动力学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2000.
- [61] SUIRE G, CEDERBAUM G. Periodic and chaotic behavior of viscoelastic nonlinear(elastic) bars under harmonic excitations[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1995, 37(3): 753-772.
- [62] 程昌钧, 张能辉. 粘弹性矩形板的混沌与超混沌行为[J]. 力学学报, 1998, 30(6): 690-699.
- [63] CHEN LIQUN, CHENG CHAN JUN. Controlling chaotic oscillations of viscoelastic plates by linearization via output feedback[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1999, 20(12): 1324-1330.
- [64] 丁睿, 朱正佑, 程昌钧. 粘弹性柱壳的若干动力学性质[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(3): 221-228.
- [65] WEI XIANG ZHANG, XIN SHENG XU, FANG YUAN. The symplectic system method in the stress analysis of 2D elasto-viscoelastic fiber reinforced composites[J]. Archive of Applied Mechanics, 80: 829-841, 2010.
- [66] WEI XIANG ZHANG, WEI HUA CUI, ZHAORAN XIAO, et al. The quasi-static analysis for the viscoelastic hollow circular cylinder using the symplectic system method[J]. International Journal of Engineering Science, 48: 727-741, 2010.
- [67] WEI XIANG ZHANG, XIN SHENG XU. The symplectic approach for two-dimensional thermo-viscoelastic analysis[J]. International Journal of Engineering Science, 50: 56-69, 2012.
- [68] WEI XIANG ZHANG, YANG BAI, FANG YUAN. The Hamiltonian system method for the stress analysis in axisymmetric problems of viscoelastic solids[J]. Journal of Applied Mathematics, 2012: 1-14, 2012.
- [69] WEI XIANG ZHANG, HUI WANG, FANG YUAN. A time-domain symplectic method for finite viscoelastic cylinders[J]. Mechanics of Time-Dependent Materials, 50: 56-69, 2013.
- [70] WEI XIANG ZHANG, YANG BAI, JIAN WEI WANG, et al. Symplectic system analysis for finite sector plates of viscoelastic media[J]. International Journal of Engineering Science, 79: 30-43, 2014.

第2章 黏弹性材料本构理论

2.1 概 述

由于黏弹性材料种类繁多,材料性能的差别很大,影响材料性能的因素也很多,导致黏弹性本构关系的多样化。到目前为止,还没有一种公认的简便而完善的本构理论既能对材料的黏弹性行为做出适当的描述,又能很好地揭示其物理本质,并且便于相关力学问题的求解。一般而言,只能是对某类材料在一定范围内给出一个能较好反映黏弹性状态,同时也能满足对本构关系的某些基本限制条件的本构关系^[1-3]。由此可见,研究黏弹性材料和结构的力学行为,一个关键问题是要有能够反映材料实际性能的合理的应力应变关系。国内外学者对黏弹性材料本构理论的工作主要是通过理论、经验、分子统计学和化学理论、实验和数值模拟等方法,并已有许多研究成果^[4-8]。通过各种手段建立的黏弹性材料的本构关系可分为微分型、积分型和幂律型等。

微分型本构关系包括开尔文-伏杰脱(Kelvin-Voigt)固体、麦克斯韦(Maxwell)流体、标准线性固体、广义开尔文-伏杰脱固体、广义麦克斯韦流体等。它们在一定程度上反映了黏弹性材料的性能,在求解某些问题时比较方便,而且物理概念明确,应力应变关系的数学表达直接与力学模型相联系,在黏弹性理论的早期发展中有广泛的应用。但微分型本构关系在应用中需要的材料参数多,且参数较难从实验所得的松弛、蠕变曲线中获得^[9]。

以玻尔兹曼(Boltzmann)叠加原理为理论基础的积分型本构关系则较好地反映了材料的记忆效应,能描述大量黏弹性材料的本构关系,此外,需要的材料参数较少且较容易从实验中获得。积分型本构关系又分为单积分型和多积分型。从分析和应用的角度而言,大多采用单积分型本构关系。由于模型简单,计算方便,同时又能较好地描述黏弹性材料的非线性行为,单积分型本构关系已受到越来越多学者的关注。Leaderman^[10]在广泛研究纺织纤维的蠕变和回复中,发现非线性行为可以在小应变时发生,于是推广了线性黏弹性理论中的玻尔兹曼叠加原理,建立了Ixaderman理论。此后,Findely等^[11]进一步完善了该理论称之为修正叠加原理。Pipkin和Rogers^[12]则进一步将此理论推广到三维的情形。

Bagley^[13,14]从20世纪70年代末开始,用大量的实验说明有很多类聚合物、合成橡胶、纤维、玻璃陶瓷等材料的应力松弛和蠕变现象可以用分数导数型本构关系来进行较理想的描述。Drozdov^[15]使用开尔文-伏杰脱固体分数微分本构关系研究了一

类合成橡胶(苯乙烯橡胶)的力学性能,与实验数据拟合得很好。近年来利用分数导数型本构关系描述材料性能的研究工作在不断增加。

2.2 微分型本构关系

2.2.1 黏弹性材料主要特点

黏弹性力学研究黏弹性物体在外界因素(如应力、温度、湿度变化等)的影响下,其变形与外力、负荷时间、加载速率等因素的关系,以及物体中的应力场、应变场和有关规律。黏弹性材料同时具有弹性和黏性两种不同机理的变形,综合地体现了弹性固体和黏性流体两者的特征。黏弹性材料的变形具有强烈的时间和温度的依赖性,材料的黏弹性会随温度而发生改变,常温下没有明显蠕变的材料,在较高温度下将会产生显著的变形与流动,甚至材料破坏时的现象都有所不同。如果温度变化太大,还会改变材料的力学性能。黏弹性材料的力学性质又随时间而发生变化,体现出以下四个主要特点。

1. 蠕变

在持续不变的加载下,变形会逐渐增加的现象称为蠕变。不同材料或同一材料在不同条件下会有不同程度的蠕变,聚合物尤为明显。如图 2.1 所示,黏弹性材料受到固定不变的应力 σ_0 作用(见图 2.1(a)),其应变 ϵ 会发生随时间 t 不断增加的现象(见图 2.1(b))。可见,为了保持构件和机械零件的形状尺寸,不能选择容易变形的材料。

2. 应力松弛

与蠕变现象相对应,在恒定不变的应变条件下,应力会逐渐减弱的现象称为应力松弛。如图 2.2 所示,黏弹性材料在固定不变的应变 ϵ_0 条件下(见图 2.2(a)),其应力 σ 会产生随时间 t 衰减的现象(见图 2.2(b))。开始时应力衰减很快,而后逐渐降低并趋于某一恒定值。从流变机理方面来看,黏性流动将使应力经过足够长时间后衰减至零。因此可以说,在一定应变条件下,应力较快趋于零的材料是流体,而经过相当长时间后应力衰减至某一定值的材料则为固体。工程中有的零件不允许应力松弛过快,如高温管接头的连接螺钉就是其中的一个例子。

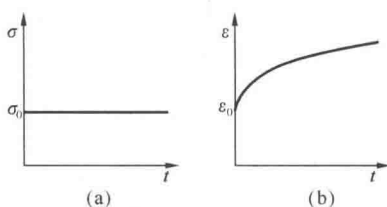


图 2.1 黏弹性材料的蠕变

(a) 外力荷载; (b) 应变随时间的变化

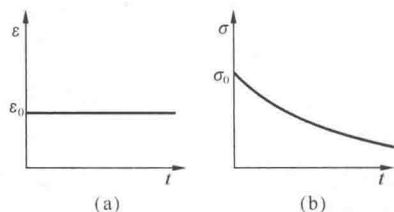


图 2.2 黏弹性材料的应力松弛

(a) 应变条件; (b) 应力随时间的变化