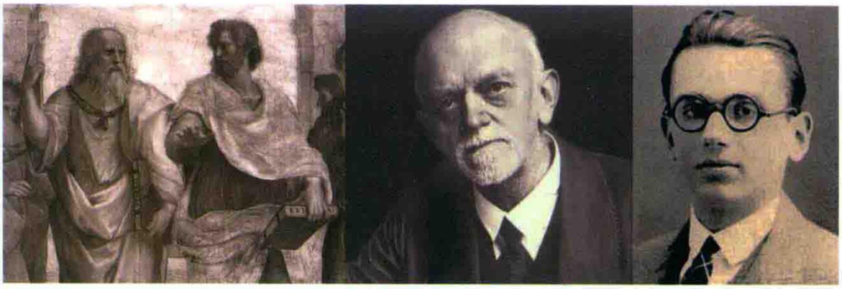
逻辑

——从三段论到不完全性定理



熊　明/著

科学出版社

逻辑

——从三段论到不完全性定理

熊　明/著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以公理化思想为主导，从亚里士多德的三段论到哥德尔的不完全性定理，阐述传统逻辑与现代逻辑的基本理论。全书以有效推理的形式化作为轴线，分别展开三段论的自然演绎系统、命题逻辑和一阶逻辑的解析树以及自然演绎系统等公理化的系统，并介绍了哥德尔完全性定理与不完全性定理及相关的重要成果。本书力求在不失严谨的条件下尽可能直观地呈现理论的内容，在阐述抽象深奥的理论时，注重强调思想性，并力争通俗易懂，深入浅出。

本书适合哲学、数学等学科的学生及对逻辑学感兴趣的读者阅读学习，可作为高校素质教育方面的逻辑学入门教材。

图书在版编目(CIP)数据

逻辑：从三段论到不完全性定理/熊明著. —北京：科学出版社，2016.3

ISBN 978-7-03-047702-6

I. ①逻… II. ①熊… III. ①哲理逻辑 IV. ①B815

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 049441 号

责任编辑：郭勇斌 曾小利／责任校对：杜子昂
责任印制：张 伟／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 3 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2016 年 3 月第一次印刷 印张：11 1/4
字数：226 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

传说，柏拉图在他的学园门口立了个牌子，上书："不懂几何者不得入此门。"柏拉图是个哲学家，几何学知识在他的哲学体系中有一定的作用，但绝不至于成为入哲学门的必要条件。柏拉图这话其实是强调几何学中的逻辑证明方法对理性探求的必要性。

柏拉图的学生亚里士多德看得更远，对逻辑证明进行了系统研究，创建了第一个逻辑理论，成为逻辑学的奠基人。亚里士多德所创立的逻辑理论有很多第一，其中最值得称道的一点是，他的理论包含了第一个演绎系统。这个系统内容单薄了点，系统虽小，但体现出来的思想却堪称伟大。这个系统第一次把从自明原理出发进行证明的思想给世人展示出来的。现在人们常把这个思想称作公理化思想。这个思想的光辉仍然照亮整个世界，是人类探求知识的法宝之一。

亚里士多德的逻辑理论是受早期几何学证明的启发提出的。反过来，亚里士多德的公理化思想对当时几何学理论的重新整理产生了深刻的影响。《几何原本》的作者欧几里得生活的年代比亚里士多德晚近 60 年，据说欧几里得本人也在柏拉图学园学习过。欧几里得的生平历史记载很少，我们无从了解他思想的源泉。但从《几何原本》的文本上看，其中的公理化思想无疑继承自亚里士多德。没有亚里士多德的逻辑理论作为先导，很难想象几何学会发展成什么样子。也正是通过欧氏几何这一无比丰富的数学理论，亚里士多德的公理化思想被发扬光大，被广泛应用到自然科学和人文科学的各个学科之中，成就了今日科学的博大精深。

亚里士多德的逻辑理论主导西方逻辑史长达 2000 多年，直到 20 世纪初期，数学基础的研究才促使人们突破了亚里士多德逻辑的框架，发展出了以一阶逻辑作为主体的逻辑体系。亚里士多德逻辑的框架被突破了，但公理化的思想犹在，甚至被发挥到极致。公理化借助于新逻辑强大的表达能力被延伸到数学的各个分支，相当一部分的数学都在逻辑上被重构。这似乎表明，数学真是可以通过公理化方法无矛盾地并且是完全地获得：就某个数学理论而言，一定可以选取有穷多条公理或公理模式，使得这个理论中的所有真命题都能够由这些公理或模式推导出来。然而事与愿违，人们并没有做到数学的完全公理化，而是发现数学完全公理化的不可

能性：即使是如初等算术这样小的一个理论，都不可能对它进行完备的（有穷）公理化，除非那些公理是有矛盾的。这一发现就是哥德尔的不完全性定理，是亚里士多德的三段论理论之后最伟大的逻辑成果：如果说三段论理论成就了公理化思想，那么可以说不完全性定理揭示了公理化的局限性。这一对成果，一正一反，相映成趣，一个好比法洛斯灯塔，为人类理性指引方向，另一个就像巴别塔，昭示着人类 logos 之未竟性！

本书正是以公理化思想作为引导，讲述从亚里士多德的三段论理论到哥德尔的不完全性定理间最基本的逻辑理论。本书主要有三个模块：三段论理论（第 3~4 章）、命题逻辑理论（第 5~9 章）和一阶逻辑理论（第 10~18 章）。但本书不是把这些模块内容孤立地讲述，而是按照统一的线索向前推进。首先，在三段论理论中，我们埋下公理化思想（第 4 章）。然后，分别在命题逻辑理论和一阶逻辑理论中注入推理有效性判定归结为计算的想法（第 7 章）和普通语言的构想（第 10 章）。其次，仍然是在一阶逻辑理论中，通过半可判定性指出推理归结为计算有某种缺失（第 12 章），并通过证明和计算的规定进一步阐述公理化思想中的逻辑和算法要素（第 14、16 章）。最后，所有这些线索汇聚到最后一章，我们通过哥德尔两个不完全性定理及周边结果的阐述，说明公理化做法在获取数学真理方面的局限性和推理有效性判定完全化归为计算的不可能性。

在阐述逻辑理论时，本书一章只展开一个思想，尽可能在保持每一章每一节独立性的前提下逐步呈现每个逻辑思想的来龙去脉，既挖掘出思想背后的直观因素，又详述思想在技术层面的形式。每一章中基本都是问题导向式地推进内容，在提出理论之前，通过具体例子引导读者进入“前理论式”的思考 —— 即从具体到抽象，从个别到一般，主动地介入到理论的学习与研究之中的思考方式。在阅读中，读者应大胆地思考书中所提问题，通过自己的努力去发现解决问题的途径，久而久之必能训练出投身于未知领域所需的思维习惯，培养出在面对真正无人涉猎的地带时所应有的勇气和决断。

本书编入了难度不等的习题供读者演练之用。习题按难度区分为四级，分别以字母 E、I、A、O 表明。E（elementary）表示的是初级水平，一招一式的操练；I（Intermediate）是中级水平，多努点力多比划几下还是可以完成的；A（Advanced）是高水平的问题，需要一定的悟性；最后，还有一小部分习题标了 O（Open），这表示习题的答案或者是待解决的或者是开放式的。

本书自 2006 年即成书，一直用作华南师范大学逻辑学公选课的讲义。原书书

名“逻辑十八讲”，后内容不断增删，书名进行了修改，但其中教了改，改了教，反复八九载，唯笔者知其中苦乐。

若没有学生、家人、朋友和同事的帮助，这本书可能还是以二进制数据的形式存在于计算机硬盘某个未知的点上。感谢历年来在华南师范大学选修逻辑学课程的学生，他们是本书的首批读者，在不同的时期帮助并见证了本书的“进化”。感谢我的妻子赵艺对本书反复修改的支持与理解。在本书最后完成阶段，也是她鼓励并促成女儿熊奂雨和侄女熊一秀各自完成了几幅插图（当然也要感谢两位小画家很有童趣也很有创意的工作）。感谢科学出版社华南分社社长郭勇斌先生对本书表现出的兴趣和判断力，感谢出版社曾小利女士为本书所做的编辑工作。最后，感谢学院领导胡泽洪教授和陈金龙教授对本书出版工作的支持与帮助。

熊　明

2015 年 10 月

目　　录

第 1 章　推陈出新：逻辑的力量 …… 1
1.1　经验与理智 …… 1
1.2　推理有效性 …… 4
1.3　逻辑大事记 …… 7
第 2 章　难产归纳：确证的悖论 …… 10
2.1　亨佩尔悖论 …… 10
2.2　古德曼悖论 …… 12
2.3　归纳的穷途 …… 14
第 3 章　演绎初成：词项的推理 …… 16
3.1　主项与谓项 …… 16
3.2　量项与联项 …… 18
3.3　直接的推理 …… 19
第 4 章　逻辑典范：三段论理论 …… 22
4.1　三段论系统 …… 22
4.2　证明三段论 …… 25
4.3　公理化思想 …… 27
第 5 章　形式无情：命题与公式 …… 30
5.1　命题的联结 …… 30
5.2　公式的构成 …… 33
5.3　命题的形式 …… 35
第 6 章　组合有意：公式的真假 …… 38
6.1　构造真值表 …… 38
6.2　公式的赋值 …… 40
6.3　等价的变形 …… 42
第 7 章　大法无机：能行的方法 …… 45
7.1　判定有效性 …… 45
7.2　解析树方法 …… 47
7.3　能行可判定 …… 50

第 8 章　一言九鼎：反解真值表 ······ 54
8.1　骑士与无赖 ······ 54
8.2　三思而后言 ······ 55
8.3　反解真值表 ······ 56
第 9 章　机关之算：逻辑代数化 ······ 60
9.1　有逻辑的门 ······ 60
9.2　线路图设计 ······ 62
9.3　思维的代数 ······ 64
第 10 章　解牛之术：一阶语言说 ······ 69
10.1　简单本有形 ······ 69
10.2　造化一阶语 ······ 72
10.3　自由与约束 ······ 76
第 11 章　触事而真：模型与满足 ······ 78
11.1　初试真与假 ······ 78
11.2　模型与指派 ······ 79
11.3　满足与真假 ······ 82
第 12 章　迷途知返：半可判定性 ······ 86
12.1　再论有效性 ······ 86
12.2　又用解析树 ······ 88
12.3　半能行判定 ······ 91
第 13 章　逻辑链条：证明的初感 ······ 97
13.1　证明的规则 ······ 97
13.2　联结词规则 ······ 98
13.3　量词的规则 ······ 101
第 14 章　应有尽有：完全性定理 ······ 106
14.1　间接的证明 ······ 106
14.2　证明的策略 ······ 108
14.3　健全与完全 ······ 112
第 15 章　求全责备：模型与理论 ······ 115
15.1　相等之符号 ······ 115
15.2　模型的理论 ······ 118
15.3　完备公理化 ······ 123
第 16 章　神机妙算：图灵可计算 ······ 127
16.1　图灵机模型 ······ 127

16.2 可计算函数 …… 130
16.3 不可计算性 …… 132
第 17 章 数不胜数：公理化算术 …… 137
17.1 算术的语言 …… 137
17.2 皮亚诺公理 …… 139
17.3 完全的片段 …… 142
第 18 章 天外有天：哥德尔定理 …… 145
18.1 不可完全性 …… 145
18.2 一致性问题 …… 150
18.3 大是者大非 …… 154
参考文献 …… 158
索引 …… 161

第 1 章　推陈出新：逻辑的力量

Logic is invincible because in order to combat logic it is necessary to use logic.
(逻辑是不可战胜的，因为反对逻辑还得使用逻辑。)

布特鲁 (P. Boutroux)

很多人一提到逻辑，首先就想到侦探小说，或者某些智力问题。查查词典，你能发现逻辑与"思维的规律""客观的原理"等相关。这样一些说法虽然粗浅，但是确实在某种程度上点明了逻辑学研究的主题，这就是我们思维中极其重要的一种过程：**推理**。如果给逻辑学的研究划定一个范围，那么可以说，逻辑学就是研究推理的学问。然而，研究推理的学问多了，研究推理的心理机制探索推理是如何产生的，研究推理的数字模拟考虑推理能否在计算机上实现，如此等等。逻辑学家究竟是如何思考推理的呢？

1.1　经验与理智

面对未知的世界，人类起初主要依赖感官和记忆积累经验。经验积累到一定的阶段，经过分门别类就出现了特定经验知识的能工巧匠。比如，木匠是在制作木质材料方面的技艺大师，石匠则是加工石料的技艺大师，如此等等。我们的神农就是一个很厉害的技艺大师，他通过遍尝百草，积累了丰富的草药经验，直到被断肠草毒死。

在世界各地遍布各种技艺大师的时候，古希腊却产生了一种新的大师。传说，毕达哥拉斯（Pythagoras）为某位当世政要所赏识，在被问道他的技艺是什么时，毕达哥拉斯答道，他不是什么技艺大师，只是一个爱智慧的人，用现在的话来说，就是哲学家。当时，毕达哥拉斯有门徒三百，已成学派。这个学派第一次开启并实践了爱智这一理念，其核心思想是："人的最重要的能力是他的理智，只有通过理智才能学到的真理，比起那些通过观察学到的真理在某方面更高贵和更基本。"（涅尔等，1985：5-6）

什么是通过理智才能学到的真理？什么是通过观察学到的真理？如果你会做测量，你就会测出"勾三股四弦五"，因此，"勾三股四弦五"就是一个可以通过观察学到的真理。然而，如果你去测量一个腰为单位长的等腰直角三角形的斜边时，你能测出什么来？此时，仅凭经验无法回答现在的问题。我们只能凭借理智去证明这

个三角形的弦长是不可公度的，即 $\sqrt{2}$ 不是有理数。这样的知识就是任何直尺都测量不出的，唯有通过理智才能把握它。

古希腊人对理智的推崇甚至到了直接使用理性来挑战常识。埃利亚的芝诺（Zeno of Elea）就是这样一位爱智者。大抵是毕达哥拉斯死的时候，芝诺才刚出生。芝诺凭借四个著名的悖论名垂青史，其中一个说的是阿基里斯追不上乌龟。阿基里斯是古希腊神话中的一个英雄人物，打过特洛伊战争，被称为“希腊第一勇士”。但根据芝诺的论证，他竟然追不上一只乌龟。这怎么可能呢？这里引用亚里士多德在其《物理学》（亚里士多德，1991，VI：9，239b15）中的记载为证：“一个跑得最慢的决不可能被一个跑得最快的追上。因为追赶者必须首先到达被追赶者起跑的出发点，因此，跑得慢的必定有某种程度的领先。”

为了方便说明问题，让我们假设阿基里斯和乌龟的速度分别为 10 米/秒、1 米/秒，两者最初相距 10 米。芝诺的意思是：阿基里斯追到乌龟的出发点时，乌龟已向前爬行了 1 米；当他追到先前到达点时，乌龟又向前爬行了 $\frac{1}{10}$ 米；如此直至无穷，虽然阿基里斯落后于乌龟的距离越来越小，但他始终都是落后的。所以，阿基里斯追不上乌龟。

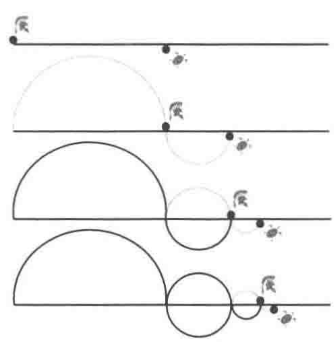


图 1.1　阿基里斯追乌龟

芝诺论证的特点可归纳如下。论证的出发点是一些明显的事实或假设（这里事实是阿基里斯比乌龟跑得快，以上具体速度是假设），论证的过程没有明显的逻辑错误但论证的结果是荒谬的：或得到与常识相冲突的结果，或得到自相矛盾的结果（这里是得到与常识相冲突的结果）。这样的一种论证在科学的发展中一再出现，人们把这种论证称为**悖论**。在人类探索知识的过程中，悖论常常出现在新旧知识体系更替之时，它似乎意味着新知识与旧知识在某个方面的冲突，而悖论的解决也常常伴随着知识在某一方面的脱胎换骨。

回到芝诺悖论上。诚如芝诺所言，阿基里斯的确落后于乌龟无穷多段距离：10 米、1 米、$\frac{1}{10}$ 米、$\frac{1}{100}$ 米、$\cdots$。然而，这无穷多段距离的总和是有穷的：

$$10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots=\frac{100}{9},$$

这意味着阿基里斯在乌龟后面追了无穷多段距离之后，追到距他起步 $\frac{100}{9}$ 米处，刚好追上了乌龟。进一步深究芝诺论证，不难发现，芝诺的意图是：在上面提到的无穷多段距离中的任意有穷多段之内阿基里斯都落后于乌龟，由此推断，在上面提到的无穷多段距离中阿基里斯必然也落后于乌龟。但这种把在有穷上的发现类推至无穷并没有任何根据。芝诺悖论恰恰证明了这种类推注定会导致问题。

从内容上看，芝诺悖论实际上是人类有史以来第一次对无穷本身进行探索出现的问题。熟悉微积分的读者会看出，芝诺论证中对距离进行无穷切分似曾相识。事实上，芝诺对距离的无穷切分，并且在这种切分上进行论证，这一点正与微积分同出一辙，只不过芝诺止步于无穷多段距离之和，而微积分中这种求和实则是无穷级数的求和，后者一般通过极限概念的引入最终得到解答。但考虑到 18 世纪的数学家在无穷级数上犯的各种错误，我们又怎能去苛责两千多年前的芝诺先生呢？毕竟，他是向无穷问题迈出步子的第一人。对于芝诺悖论，英国哲学家怀特海曾经评论道:“你的书被之后所有的时代批驳，乃是最大的成功……接触过芝诺哲学的人，没有一个人不反驳他，然而每个时代的人又认为他是值得反驳的。”

从思想观念层面上讲，芝诺悖论的意义更加重大。芝诺论证的结论与经验常识截然相反，但这个论证代表了唯理论的世界观，这是古希腊人与其他同时代民族很不相同的地方。他们对理智的超验性（即超越感官经验）的一再推崇和践行。他们主张通过理性手段来建构可靠知识，甚至使用理性手段来挑战经验常识。他们对论证过程的重视，甚至不惜牺牲论证结果的可接受性。这构成了古希腊文明的特质，也成就了古希腊文明的伟大和不朽。当其他文明只会进行测量的时候，希腊人已经发展出了几何学；当其他文明还在做观察纪录的时候，古希腊人已经发展出了物理学（虽然其中的原理大多被推翻）；当其他文明还在进行道德说教的时候，古希腊人已经提出了一整套严密的伦理学理论。

不说别的文明，就拿我们自己的文明来与古希腊文明比比。你会发现，当我们的古人还在丈量田地尺寸的时候，古希腊人已经计算出地球的直径、地球与月球的距离；当我们的古人还在计算笼子里有几只鸡几只兔的时候，古希腊人已经证明了素数有无穷多个。这是何等的差距！我们现在还在争论究竟有没有普适价值的时候，古希腊人从一开始对伦理的思考就以追求普适性为目的，一如他们在几何学中的追求一样。“西方科学的发展是以两个伟大的成就为基础的：希腊哲学家发明形式逻辑体系（在欧几里得几何学中），以及（在文艺复兴时期）发现通过系统的实验可能找出因果关系。”说了这段话之后，爱因斯坦紧接着还说了这样的话:“在我看来，中国的贤哲没有走上这两步，那是用不着惊奇的。要是这些发现果然都做出了，那倒是令人惊奇的事。”

爱因斯坦到过中国，对中国存有同情之心。他上面的那些话，肯定刺伤了某些

人的自尊。但是，我想他大概不是想贬低中华文明，而只是陈述一个事实：一个只知道积累经验的民族是发展不出超验的学问的。就像蚂蚁，它也收集花粉，但它永远酿造不出花蜜来。我这里进行比较也只是陈述事实，只是让诸位看到，文明里面缺少某种思想会导致怎样的残缺。

习题 1.1.1 (O)　一个调皮的精灵触动开关把一个灯打开，过了一分钟精灵触动开关把灯关上，又过了半分钟精灵又触动开关把灯打开，再过了 $\frac{1}{4}$ 分钟精灵再次触动开关把灯关上，如此反复，精灵每次总是经过上次间隔一半的时间触动开关。问题：两分钟过后那一瞬，灯究竟是开着的还是关着的？说明你的理由。

1.2　推理有效性

古希腊人崇尚理智，因为他们想要超验经验。那么，他们是如何通过理智超验经验的呢？回答是逻辑推理。这一点，在前面的芝诺悖论上已经有所见识。下面再通过另一个著名的悖论来进行说明。

米利都的欧布里德（Eubulides of Miletus）是与亚里士多德同时代的一位哲学家，与芝诺一样，他也是因为一些奇诡论证而出名的。他的一个论证是有关秃子的。一个头上没有头发的人是秃子。一个头上只有一根头发的人当然也是秃子。欧布里德想说的是，任何人不论他头上有多少头发也都是秃子。首先任何人都会同意仅仅增加一根头发并不会改变人的秃子性。这意味着，如果有 n 根头发的人是秃子，那么有 $n+1$ 根头发的人也是秃子。现在，有 0 根头发的人显然是秃子，所以，根据前面的“如果 ……，那么 ……”，可得出：有 1 根头发的人也是秃子。继而，又得出：有 2 根头发的人也是秃子。如此反复，对任意的 n，有 n 根头发的人都是秃子。所以，每个人都是秃子！（图 1.2）

图 1.2　到底有几根头发才不是秃子？

欧布里德的论证值得仔细思考。首先，他这个论证是从经验出发的。“有 0 根头发的人是秃子”，“如果有 n 根头发的人是秃子，那么有 $n+1$ 根头发的人也是

秃子”。这些都是感觉经验。当这个论证更重要的方面按我们现在的话来讲是其中有推理。有什么推理呢？在这个论证中，有“有 1 根头发的人是秃子”说法，但这不是从经验得到的，而是从“有 0 根头发的人是秃子”和“如果有 0 根头发的人是秃子，那么有 1 根头发的人也是秃子”推出的。这是推理，不是经验。同样的道理，从“有 1 根头发的人是秃子”和“如果有 1 根头发的人是秃子，那么有 2 根头发的人也是秃子”出发，可推出“有 2 根头发的人是秃子”。由此，论证中才会不断得到一系列的说法。

这个论证起初得到的一个结果是与经验符合的，比如“有 99 根头发的人是秃子”，但是当得到“有 99999 根头发的人是秃子”时，这个结果就是违反经验的了。如何能做得超经验的？回答必然是，我们使用了如下一种产生新说法的模式：从“A”和“如果 A，那么 B”得到“B”。这种模式在现在看来就是**推理模式**，可以按下面的方式写出：

$$\frac{A \qquad \text{如果 } A\text{，那么 } B}{B} \tag{1.1}$$

推理模式 (1.1) 的重要性体现在其中出现的字母 A、B 可为任何被称为是“**命题**”的东西替换，而成为一个**推理**。例如，当把 A 替换为命题“有 0 根头发的人是秃子”，把 B 替换为命题“有 1 根头发的人是秃子”，我们就得到了下面的推理：

$$\frac{\begin{array}{c}\text{有 0 根头发的人是秃子}\\ \text{如果有 0 根头发的人是秃子，那么有 1 根头发的人是秃子}\end{array}}{\text{有 1 根头发的人是秃子}} \tag{1.2}$$

同样模式的推理比如还有

$$\frac{\begin{array}{c}\text{太阳从西边升起}\\ \text{如果太阳从西边升起，那么母猪也会爬上树}\end{array}}{\text{母猪会爬上树}} \tag{1.3}$$

欧布里德论证的核心是对推理模式 (1.1) 的反复应用，直至推出违反常识的论点“每个人都是秃子”。虽然结论不好接受，但是整个论证是有很强的说服力的。这个说服力不是因为欧布里德是这方面的权威，他说了我们就要去听，而是因为——用我们现在的话来说——这个论证本身是完全符合逻辑的。而所谓符合逻辑无非是说推理模式 (1.1) 具有如下特性：只要命题“A”和“如果 A，那么 B”都为真，那么命题“B”也一定为真。这个特性被称为**保真性**。推理模式 (1.1) 的保真性是欧布里德论证具有说服力的根本原因，因为它确保了从明显为真的命题“有 0 根头发的人是秃子”和“如果有 n 根头发的人是秃子，那么有 $n+1$ 根头发的人也是秃子”出发，按这个模式得到的任何命题都是为真的。

对于一个推理，我们常常把被推出的那个命题称为推理的**结论**，而那些被用来推出结论的命题就是推理的**前提**。我们都知道，在日常语言中，为了表明确实是在做推理，我们会用“所以”“因此”这样的词来进行指示。以后，对于推理的模式，我们也使用前提和结论这样的字眼。例如，模式 (1.1) 有两个前提，它们是“A”和“如果 A，那么 B”。模式 (1.1) 的结论是“B”。

保真性对于推理模式如此的重要，以致它成为了衡量推理模式是否有效的标准。一般而言，我们说一个推理模式是**有效的**，意思就是这个模式中前提都为真一定能确保结论也为真；反之，这个模式就称为**无效的**。一个推理如果它的模式是有效的，那么它就是有效的；反之，称这个推理是无效的。有效的推理就是我们常说的**演绎推理**，又简称为**演绎**。例如，模式 (1.1) 就是有效的，与此对应，推理 (1.2) 和 (1.3) 也都是有效的。注意，我们一般会认为推理 (1.3) 是有问题的，但问题不是出在它的推导模式上（所以，它是有效的），而是出在它的前提上，它的前提至少有一个为假。由此，这个推理的模式虽然有保真性，但因前提不都为真故结论不必为真。

需要注意的是，看一个推理是否正确，除了要考虑这个推理的模式是否保真，还应考虑这个推理的前提本身是否为真命题。一个推理即使其模式符合保真性，但只要有一个前提为假，整个推理也是不能被认为是正确的。例如，推理“如果一个三角形是等腰的，那么它必然是等边的，这个三角形是等腰的，所以这个三角形是等边的”与前面的例子 (1.2) 一样具有保真性，但它的第一个前提是一个假命题，所以，这个推理是错误的。因此，如果说有效的推理在逻辑上是正确的，那么可以说正确的推理除了要保证它在逻辑上正确外，还应满足每个前提都是真命题这个条件。

回到欧布里德的论证上。这个论证中是按逻辑有效的模式 (1.1) 进行的一系列推理，所以，这个论证从逻辑上看没有任何问题。当然，大多数人都会认为这个论证并不正确，因为它得到的结论有问题。因此，这个论证的问题必定出现在某个前提上，主要前提是“如果有 n 根头发的人是秃子，那么有 $n+1$ 根头发的人也是秃子”。这个前提又恰恰是建立在经验基础之上的，所以，要么我们就认定这个前提没有问题，然后按照模式 (1.1) 的推理方式得到违反经验的结论；要么依据欧布里德的论证及其结论的荒谬性最终否定那个前提。无论如何，我们都通过推理模式 (1.1)，达到了超越经验的目的。

推理模式之所以能超越经验，很大程度上是因为它仅仅是一个抽象的对象。如同几何学中的线被定义为只有长度没有宽度之物那样，推理模式是只有形式没有内容之物，是对推理这种现实对象的一种抽象。推理模式的存在本身就具有某种超验性。它的出现来自这样一种信念：上帝说，既然经验不总是可靠的，那么就要有逻辑。于是，就有了推理模式！

古希腊人之所以能够通过理智去超验经验，很重要的一点就是使用了如 (1.1) 那样的推理模式。这样的模式很多，这里再列举几条：

（1）如果 A，那么 B；并非 B，所以，并非 A。

（2）或者 A，或者 B；并非 A，所以，B。

（3）如果 A 并且 B，那么 C；并非 C 但 A，所以，并非 B。

古希腊有一个叫斯多葛的学派对诸如此类的推理模式进行了研究，特别研究了这些模式中哪些是有效的，哪些是无效的，由此开创了一种新的学说，这就是今天被称为**命题逻辑**的理论。

亚里士多德在斯多葛学派之前就比较系统地研究了一类推理模式，不过，他研究的推理模式与斯多葛学派研究的不同。亚里士多德研究的模式举一例如下：

$$\begin{array}{l} \text{所有 } M \text{ 都是 } P \\ \text{所有 } S \text{ 都是 } M \\ \hline \text{所有 } S \text{ 都是 } P \end{array} \tag{1.4}$$

这种推理叫做**三段论**。亚里士多德对这种推理进行了系统的研究，建立了对后世影响巨大的三段论理论，这构成了**词项逻辑**的主要内容。

在本书后面的章节会逐步展开命题逻辑和词项逻辑这两个理论，但本书的主要内容不是这两个古老的理论，产生于 19 世纪末的一种叫做一阶逻辑的理论才是本书的主体。

习题 1.2.1 (E)　判断下列说法是否正确，若正确，说明理由，若错误，给出反例。

（1）有效的推理在其结论为假时，前提至少有一个是假的。

（2）有效的推理在其结论为真时，前提至少有一个是真的。

（3）无效的推理在其前提都为假时，结论必然也为假。

1.3　逻辑大事记

最后，让我来勾画逻辑学的发展历程。一般认为，逻辑学有三大策源地：古中国、古印度和古希腊。说到我们中国，能拿得出手的逻辑学研究大约只有战国时期鲁国人墨翟（约公元前 478~前 392 年）所撰《墨子》一书。《墨子》原书分为七十一篇，现存五十三篇，其中《经上》《经下》《经说上》《经说下》《大取》《小取》六篇合称为《墨经》。这便是《墨子》讨论逻辑的部分了。在古印度，推理的某一前提被称为“因”，而学问一律称为“明”，故而关于推理的学说被称为“因明”。因明代表性著作以高僧陈那（约公元 400~520 年）所著《因明正理门论》最有名，原本已遗失，现只有汉译本流传于世，最早的中文翻译者就是玄奘大师。需要指出的

是，无论那些喜欢挖故纸堆的人怎样发掘，虽然古中国和古印度的逻辑理论渊远，但毕竟未能流长，没有对逻辑学的主流产生任何影响。

还是来说古希腊的逻辑吧。我们已经提到了两个大放光彩的名字，一个是亚里士多德，另一个是斯多葛。那是在公元前 335 年，亚里士多德（Aristotle，公元前 384~前 322 年）在雅典创立一所学园。学园地处祭祀吕克昂的阿波罗和缪斯的一片小树林，人称“吕克昂学园”。在这里，亚里士多德每天早上与其门生在一条名为“peripatos”的林中小径上探讨最高深的逻辑形而上学问题 —— 由此后人称这一学派为逍遥学派（peripatetic），在下午和晚上则面向大众讲授修辞论辩等实用知识。亚里士多德的课堂讲义后来由其学生编辑成书。亚里士多德的著作蔚为大观，内容涵盖逻辑学、形而上学、自然哲学、伦理学、美学等，在各个论域都是独树一帜。他的逻辑学著作主要有六篇论文，分别是:《范畴篇》《解释篇》《前分析篇》《后分析篇》《论辩篇》《辩谬篇》。这六篇论文被后人编辑成《工具论》。在这本书里，亚里士多德探讨了词项、命题、推理，并建立三段论逻辑体系，这是有史以来第一个演绎理论，这个理论奠定了公理化的思想，比大家熟知的欧氏几何理论大约还早一个世纪。本书将在第 3、4 章介绍它。本书主要讨论演绎推理，还有一种被称为归纳的推理也很基本。对于这类推理，本书仅在第 2 章指出逻辑分析归纳推理时出现的一些基本困难。

大约一个世纪之后，古希腊的另一个学派开辟出又一块逻辑天地 —— 命题逻辑理论。这一学派的创始人是季蒂昂的芝诺（Zeno of Citium，公元前 333~前 262 年），因他常在一个画廊（stoa）讲学，所以他的学派被称为**“斯多葛学派”**（Stoic）。顺便说一句，此芝诺非提出芝诺悖论的那个，此芝诺比后者晚了一百多年。斯多葛学派在逻辑学上的主要贡献，就是建立了命题逻辑理论。这个理论后来得到了更充分的发展，已并入当代逻辑的正轨。本书将在第 5~9 章介绍命题逻辑。

古希腊逻辑理论的影响是深远的，以至于长达 2000 多年的西方逻辑史都由希腊的逻辑理论主导。直到 18 世纪初，德国哲学家兼数学家莱布尼茨（G. W. Leibniz，1646~1716 年）才提出普遍语言和思维演算的构想，试图突破古希腊人的逻辑框架，把逻辑算术化。第一个在局部实现这一构想的是英国数学家布尔（G. Boole，1815~1864 年）。1847 年，布尔出版了专著《逻辑的数学分析》，他用代数的方式对斯多葛学派的逻辑理论进行了发展，把代数的方法引入逻辑，使一部分逻辑具备算术化的特征。这标志着逻辑已经迈入了一个新的历史时期。

但是，真正全局性的突破一定具有那种摧枯拉朽重建新世界的气势。等到 1879 年，德国逻辑学家弗雷格（G. Frege，1848~1925 年）出版他那本堪称划时代的杰作——《概念文字 —— 一种按算术的公式语言构成的纯思维公式语言》。这本小册子奠定了一种崭新的逻辑理论——一阶逻辑的基础，在最大程度上让莱布尼茨普遍语言之梦变成了现实。逻辑也因此改朝换代，1879 年之前的逻辑一律被称为**传**