现代数学基础丛书 160

偏微分方程现代理论引论

崔尚斌 著

科学出版社

现代数学基础丛书 160

偏微分方程现代理论引论

崔尚斌 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书讲述偏微分方程现代理论的最基础部分, 内容共五章. 其中前两章系统介绍函数空间、广义函数和 Fourier 分析理论的最基础部分, 是学习偏微分方程现代理论必须具备的最基本的分析学知识, 第 3 和第 4 两章系统讲述了二阶线性椭圆型方程和二阶线性抛物型、双曲型和 Schrödinger 型三类发展型方程的最基础理论, 这两章内容的学习能够基本满足希望专门研究椭圆型方程、抛物型方程或非线性发展方程以及相关学科领域读者的需要. 最后一章简要介绍线性偏微分方程一般理论和拟微分算子理论. 本书最突出的特点是把椭圆型方程和抛物型方程的 C^μ 理论与 L^p 理论都用 Fourier 分析理论做了统一的处理, 并把这些理论都构建在 L^2 理论之上, 从而使得这些以前需要与偏微分方程的 Fourier 分析方法独立地学习的不同理论体系很自然地融合在一起.

本书适合作数学类各专业研究生同名课程的教材或学习参考书, 也可作为从事偏微分方程及相关学科领域研究工作的读者的工具书.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程现代理论引论/崔尚斌著. —北京: 科学出版社, 2015. 11
(现代数学基础丛书; 160)
ISBN 978-7-03-046291-6

I. ①偏… II. ①崔… III. ①偏微分方程—研究 IV. ①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 267929 号

责任编辑: 王丽平 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 张 倩 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2016 年 1 月第一次印刷 印张: 36 1/4
字数: 700 000

定价: 198.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》编委会

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述. 据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷. 它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

前 言

偏微分方程的现代理论, 顾名思义, 是和偏微分方程的经典理论相对应的偏微分方程理论. 偏微分方程的经典理论是指 19 世纪及其以前所发展的偏微分方程理论, 内容主要包括求解各类偏微分方程定解问题的分离变量法、D'Alembert 公式、Poisson 公式、位势积分、Green 函数、一阶偏微分方程的 Monge 理论、Cauchy–Kowalevskaya 定理、Holmgren 定理、Frobenius 定理等. 这些理论在通常的数学物理方程教材如 [17, 45, 66, 81] 和一些经典的偏微分方程名著如 I. G. Petrovsky 的偏微分方程讲义[94]、F. John 的 Partial Differential Equations (4th edition)[67]、R. Courant 和 D. Hilbert 的数学物理方法 I, II[27] 以及 E. Kamke 的一阶偏微分方程手册[69] 等书籍中都有很好的阐述. 经典理论的特点是把偏微分方程的每个具体的解作为独立的研究对象进行处理. 与此不同, 偏微分方程的现代理论则把偏微分方程看作函数空间之间的映照进而应用泛函分析的理论和方法来研究. 用泛函分析的观点研究偏微分方程问题, 最早可追溯到 1900 年 D. Hilbert[56] 和 1907 年 H. Lebesgue[77] 关于椭圆边值问题的 Dirichlet 原理的研究工作. 但偏微分方程从经典的研究方法真正地开始逐步转换为现代的方法, 则是以 J. Schauder 于 1934 年和 1935 年间所做关于椭圆边值问题的 C^μ 理论的工作[102,103] 和 S. L. Sobolev 关于函数的弱导数和 Sobolev 空间理论的奠基性工作[106,107] 为标志的. 自从进入 20 世纪 50 年代之后, 偏微分方程的研究已基本上全面地被泛函分析的方法所支配了.

与其他数学分支的一个很大的不同是, 偏微分方程是一个相当庞大的数学分支. 且不说复变函数理论从偏微分方程的角度来看是研究 Cauchy–Riemann 方程组解的性质的学科, 单从它的应用背景 —— 物理学 —— 的来源来看就已经很能说明为什么它会这么庞大了: 物理学的一些重要分支, 如弹性力学、流体力学、电动力学、量子力学、广义相对论等, 每一门都是专门研究一个偏微分方程或方程组的学科, 如弹性力学研究的是弹性力学方程组, 流体力学研究的是流体力学方程组, 电动力学研究的是 Maxwell 方程组, 量子力学研究的是 Schrödinger 方程, 广义相对论研究的是 Einstein 方程等. 偏微分方程的这一特点决定了它很难像常微分方程那样建立起一个对所有偏微分方程都适用的一般理论. 人们为此不得不对偏微分方程进行分门别类的研究, 甚至于不得不针对每个很具体的方程进行研究. 这种情况给偏微分方程的研究生教学工作造成了一定的不便, 因为经常发生这样的情况: 同是做偏微分方程研究的两个研究生, 由于他们所研究的偏微分方程属于不同的类型而不得不学习不同的课程, 虽然他们所学课程可能有相同的名称. 因此, 编写一本

能够既适用于从事各种不同类型偏微分方程研究的研究生共同学习, 又能把他们尽快地带入这一领域开展研究工作的偏微分方程现代理论的教材, 是很有必要的. 另外, 从事与偏微分方程相近或有紧密联系的其他数学分支如泛函分析、调和分析、数学物理、微分几何、常微分方程、偏微分方程数值解、随机分析等领域研究的研究生, 也需要学习一些偏微分方程的现代理论. 他们对这门课程的学习无疑需要的是能够对偏微分方程的现代理论有较好的全局性的了解, 而不是只学习某个局部性的专题.

基于以上考虑, 我们在总结二十多年偏微分方程研究生培养工作和偏微分方程现代理论研究生公共基础课程教学工作经验的基础上, 认真地研究了国内外尽可能多的偏微分方程现代理论的教材和专著, 汲取每一本教材和专著的精华, 学习它们的优点, 并根据我们的研究工作经验, 对这门课程的教学内容作了精心的选择, 编著成这本研究生教材. 下面对本书的一些写作思想给予说明:

一、与国内外大部分已有的偏微分方程现代理论的专著和教材一般都选择偏微分方程的某个专题 (如 L^2 理论或 C^μ 理论等) 或某类专门的偏微分方程 (如椭圆型方程或抛物型方程等) 不同, 本书对偏微分方程的各个不同方面作了综合性的处理, 以便使研究生通过学习, 对偏微分方程现代理论的最基础部分即有关线性偏微分方程的部分有全面性的概观的了解.

二、本书所选择讲述的各章节内容, 我们认为是从事现代偏微分方程研究的研究生都应掌握的最基本理论. 近三十年来偏微分方程研究领域的发展已与三十年前有很大的不同. 不仅 Hölder 空间和 Sobolev 空间理论是开展偏微分方程研究必不可少的工具, 而且 Fourier 分析理论和频谱分析方法也已成为对各类偏微分方程进行深入研究的非常有效的工具和方法. 本书的选材很好地适应了这样的发展现状和趋势. 有些内容, 比如本书的第五章, 看似只是从事线性偏微分方程一般理论和微局部分析研究的学者才需要掌握的, 其实不然. 例如应用偏微分方程研究领域著名的 Hele Shaw 问题和肿瘤生长模型的研究中就用到了拟微分算子: 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中具有光滑边界的有界区域, 令 u 为 Ω 上 Dirichlet 边值问题 $\Delta u = 0$ (在 Ω 中) 和 $u = \varphi$ (在 $\partial\Omega$ 上) 的解, n 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, 则 Dirichlet–Neumann 算子 $\varphi \mapsto \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}$ 是流形 $\partial\Omega$ 上的一阶椭圆型拟微分算子, 而这个算子在 Hele Shaw 问题和肿瘤生长模型的研究中都有重要的作用. 类似的例子还能举出许多. 这仅仅是从实用的角度考虑. 如果以素质教育的观点来看, 对偏微分方程一般理论和拟微分算子理论有所了解, 知道有无解的偏微分方程存在, 知道对高阶的偏微分方程该怎样处理, 理应成为对从事偏微分方程研究的研究生的基本要求.

三、本书不仅在内容选取上与国内外其他同类著作有一定的区别, 而且在对这些内容的编排和处理方法上也有很大的不同. 例如, 对二阶椭圆型方程的边值问题,

国内外涉及这一课题的著作一般都把 C^μ 理论和 L^p 理论作为不同的理论体系对待, 建立 C^μ 估计和 L^p 估计的方法一般都有很大的不同, 推导过程因此都比较冗长, 本书则对这两种理论统一运用奇异积分算子作为工具进行处理. 类似地, 对抛物型方程的初边值问题, 本书也以各向异齐次的奇异积分算子为工具对 C^μ 理论和 L^p 理论作了统一的处理. 这样的处理方式在国内外其他著作中尚未见到, 但无疑有很大的优点, 即较大幅度地缩短了学习这些理论所需要的时间. 把椭圆型和抛物型方程的 C^μ 理论和 L^p 理论都用 Fourier 分析理论做统一的处理, 从而使得这一以前需要与偏微分方程的 Fourier 分析方法独立地学习的两种不同的理论体系很自然地融合在一起, 是本书最突出的特点.

本书的写作和出版得到了国家自然科学基金 (项目编号: 11171357) 的资助, 特此说明.

限于作者的水平, 本书中的不足在所难免, 恳望读者给予谅解, 并真诚地希望随时得到批评指正. 作者谨在这里致以诚挚的感谢.

最后，作者谨对本书编写和出版过程中给予过帮助的人们表示衷心的感谢.

崔尚斌

2015 年 1 月于中山大学

目　　录

前言
第 1 章　Hölder 空间和 Sobolev 空间 …… 1
1.1　一些记号和初等公式 …… 1
习题 1.1 …… 6
1.2　光滑紧支函数及其应用 …… 6
习题 1.2 …… 14
1.3　Hölder 空间 $C^{\mu}(\bar{\Omega})$ …… 15
习题 1.3 …… 22
1.4　Hölder 空间 $C^{m,\mu}(\overline{\Omega})$ …… 23
习题 1.4 …… 27
1.5　Lebesgue 空间 $L^p(\Omega)$ …… 28
1.5.1　空间 $L^p(\Omega)$ 的定义 …… 28
1.5.2　常用的积分不等式 …… 28
1.5.3　空间 $L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ 的性质 …… 32
1.5.4　空间 $L^p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ 中的相对紧集和弱相对紧集 …… 35
习题 1.5 …… 39
1.6　弱导数和弱可微函数 …… 40
习题 1.6 …… 47
1.7　Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$ …… 47
习题 1.7 …… 52
1.8　Sobolev 嵌入定理 …… 53
习题 1.8 …… 59
1.9　Morrey 嵌入定理 …… 61
习题 1.9 …… 64
1.10　Kondrachov–Rellich 嵌入定理 …… 65
习题 1.10 …… 69
1.11　高阶 Gagliardo–Nirenberg 不等式 …… 70
习题 1.11 …… 74
1.12　迹定理 …… 76
1.12.1　函数在超平面上的迹 …… 76

1.12.2 超曲面上的 Hölder 空间和 Sobolev 空间 ······ 79
1.12.3 函数在区域边界上的迹 ······ 81
1.12.4 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的等价刻画 ······ 83
1.12.5 迹定理简介 ······ 84
习题 1.12 ······ 86
第 2 章 广义函数和 Fourier 变换 ······ 87
2.1 广义函数 ······ 87
习题 2.1 ······ 94
2.2 紧支广函 ······ 96
习题 2.2 ······ 102
2.3 缓增广函 ······ 103
习题 2.3 ······ 107
2.4 Fourier 变换 ······ 108
习题 2.4 ······ 115
2.5 Riesz–Thorin 插值定理和 Hausdorff–Young 不等式的证明 ······ 116
习题 2.5 ······ 119
2.6 Paley–Wiener–Schwartz 定理 ······ 119
习题 2.6 ······ 123
2.7 卷积 ······ 124
习题 2.7 ······ 129
2.8 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}^n)$ ······ 130
习题 2.8 ······ 138
2.9 Littlewood–Paley 分解 ······ 139
习题 2.9 ······ 151
2.10 奇异积分算子 ······ 152
2.10.1 Marcinkiewicz 插值定理 ······ 154
2.10.2 定理 2.10.5 的证明 ······ 157
2.10.3 定理 2.10.6 的证明 ······ 162
2.10.4 Riesz 变换和绝对导数 ······ 163
2.10.5 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式的证明 ······ 165
习题 2.10 ······ 167
第 3 章 二阶线性椭圆型方程 ······ 169
3.1 基本概念 ······ 169
3.1.1 椭圆型的定义 ······ 169
3.1.2 经典解、强解和弱解 ······ 171

3.1.3 边值问题 ························ 173
习题 3.1 ························ 176
3.2 弱解的存在性 ························ 176
习题 3.2 ························ 183
3.3 解的正则性 ························ 184
3.3.1 弱导数与差商的关系 ························ 185
3.3.2 解的内正则性 ························ 187
3.3.3 解的边界正则性 ························ 191
习题 3.3 ························ 197
3.4 特征值问题 ························ 197
习题 3.4 ························ 206
3.5 极值原理 ························ 207
3.5.1 经典解的极值原理 ························ 208
3.5.2 弱解的极值原理 ························ 212
3.5.3 主特征值和相应特征函数的性质 ························ 217
习题 3.5 ························ 220
3.6 L^p 估计 ························ 221
3.6.1 L^p 内估计 ························ 221
3.6.2 L^p 全局估计 ························ 224
3.6.3 两个应用 ························ 227
习题 3.6 ························ 229
3.7 L^p 可解性 ························ 229
3.7.1 解的正则性 ························ 229
3.7.2 解的存在性 ························ 233
习题 3.7 ························ 235
3.8 调和函数 ························ 236
习题 3.8 ························ 241
3.9 C^μ 理论 ························ 242
习题 3.9 ························ 249
第 4 章 二阶线性发展型方程 ························ 250
4.1 基本概念 ························ 250
习题 4.1 ························ 254
4.2 向量值函数 ························ 254
4.2.1 向量值函数的连续性、导数和 Riemann 积分 ························ 254
4.2.2 向量值函数空间 $C^\mu(I,X)$ 和 $C^{m,\mu}(I,X)$ ························ 256

4.2.3　向量值函数的弱可测和强可测 ······ 257
4.2.4　Pettis 积分和 Bochner 积分 ······ 258
4.2.5　函数空间 $L^p(I,X)$ 和 $W^{m,p}(I,X)$ ······ 259
习题 4.2 ······ 266
4.3　Fourier 方法 ······ 267
4.3.1　抛物型方程 ······ 267
4.3.2　双曲型方程 ······ 271
4.3.3　Schrödinger 型方程 ······ 273
习题 4.3 ······ 274
4.4　Galerkin 方法 ······ 274
4.4.1　抛物型方程 ······ 275
4.4.2　双曲型方程 ······ 280
4.4.3　Schrödinger 型方程 ······ 286
习题 4.4 ······ 290
4.5　解的正则性 ······ 291
4.5.1　抛物型方程 ······ 291
4.5.2　双曲型方程 ······ 298
4.5.3　Schrödinger 型方程 ······ 302
习题 4.5 ······ 303
4.6　强连续半群 ······ 304
4.6.1　强连续半群的定义和基本性质 ······ 305
4.6.2　Hille-Yosida 定理 ······ 309
4.6.3　摄动定理 ······ 316
4.6.4　对初值问题的应用 ······ 317
习题 4.6 ······ 323
4.7　解析半群 ······ 324
4.7.1　扇形算子和解析半群 ······ 324
4.7.2　对初值问题的应用 ······ 333
4.7.3　解的渐近性态 ······ 341
习题 4.7 ······ 344
4.8　发展型方程的半群方法 ······ 345
4.8.1　抛物型方程 ······ 345
4.8.2　双曲型方程 ······ 347
4.8.3　Schrödinger 型方程 ······ 350
习题 4.8 ······ 353

4.9 抛物型方程的 C^μ 理论和 L^p 理论 …… 353
4.9.1 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 上各向异性的伸缩和相关问题 …… 354
4.9.2 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ 上各向异齐次的奇异积分算子和各向异性的 Mihlin 乘子 …… 357
4.9.3 热传导方程的先验估计 …… 363
4.9.4 抛物型方程的 C^μ 理论和 L^p 理论 …… 374
4.9.5 抛物型方程的极值原理 …… 379
习题 4.9 …… 381
4.10 热传导方程的初值问题 …… 382
习题 4.10 …… 394
4.11 波动方程的初值问题 …… 396
习题 4.11 …… 414
4.12 Schrödinger 方程的初值问题 …… 414
习题 4.12 …… 421
第 5 章 线性偏微分方程的一般理论 …… 422
5.1 无解的线性偏微分方程 …… 422
习题 5.1 …… 432
5.2 可解的线性偏微分算子 …… 433
5.2.1 常系数偏微分算子的基本解 …… 433
5.2.2 常系数偏微分算子的强弱比较 …… 438
5.2.3 定强偏微分算子的局部可解性 …… 445
5.2.4 H 主型算子的局部可解性 …… 448
5.2.5 NTEBF 定理简介 …… 453
习题 5.2 …… 456
5.3 亚椭圆型偏微分算子 …… 457
习题 5.3 …… 466
5.4 拟微分算子的基本概念 …… 467
5.4.1 拟微分算子的定义 …… 467
5.4.2 核函数 …… 471
5.4.3 恰当支拟微分算子 …… 477
5.4.4 符征的渐近展开 …… 479
习题 5.4 …… 485
5.5 拟微分算子的运算和性质 …… 485
5.5.1 转置、共轭和复合 …… 486
5.5.2 亚椭圆型算子的拟逆 …… 488
5.5.3 拟微分算子的 H^s 有界性 …… 491

5.5.4 Gårding 不等式 …… 494
习题 5.5 …… 496
5.6 微局部分析和奇性传播定理 …… 497
5.6.1 问题的提出 …… 497
5.6.2 波前集的定义与性质 …… 501
5.6.3 奇性传播定理 …… 508
习题 5.6 …… 516
5.7 高阶双曲型方程的初值问题 …… 517
习题 5.7 …… 527
5.8 高阶椭圆型方程的边值问题 …… 528
5.8.1 半空间上的 Dirichlet 边值问题 …… 528
5.8.2 有界区域上的 Dirichlet 边值问题 …… 539
习题 5.8 …… 546
参考文献 …… 547
索引 …… 552
《现代数学基础丛书》已出版书目

第 1 章　Hölder 空间和 Sobolev 空间

我们在前言部分已经指出, 现代偏微分方程理论与经典偏微分方程理论的区别主要体现在: 经典的偏微分方程理论基本是把偏微分方程的每个具体的解作为独立的研究对象进行处理, 而现代偏微分方程理论则把偏微分方程看作函数空间之间的映射进而应用泛函分析的理论和方法来研究. 不同类型偏微分方程的研究往往需要选择不同类型的函数空间. 因此, 在现代偏微分方程理论的研究中, 函数空间理论起着基石的作用. Hölder 空间和 Sobolev 空间是两类最基本的函数空间, 在现代偏微分方程理论的各个方面都有广泛并且重要的应用. 本章对这两类函数空间的基本理论作比较系统的讨论.

必须说明, 本章对 Hölder 空间和 Sobolev 空间理论的选材是最基本的, 远远不够深入. 需要对这两类函数空间以及其他相关函数空间理论作更深入学习的读者, 推荐阅读本书末所列参考文献中的 [1], [6], [47], [82], [83], [110], [119], [137] 等.

1.1　一些记号和初等公式

如通常, 用 $\mathbf{R}^n$表示由 n 元有序实数组的全体构成的 n 维欧几里得空间. $\mathbf{R}^n$中的元素 (称为点或向量) 用 x, y, x', y' 等符号表示. 对 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$, 记

$$x\pm y=(x_1\pm y_1,x_2\pm y_2,\cdots,x_n\pm y_n),$$

$$ax=(ax_1,ax_2,\cdots,ax_n),\quad a\ \text{为任意实数},$$

$$|x|=\text{向量}\ x\ \text{的模或长度}=\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$xy=x\cdot y=\langle x,y\rangle=\text{向量}\ x\ \text{与}\ y\ \text{的内积}=\sum_{j=1}^n x_jy_j,$$

$$d(x,y)=\text{点}\ x\ \text{与}\ y\ \text{的距离}=|x-y|=\left(\sum_{j=1}^n |x_j-y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

对 $\mathbf{R}^n$ 中的非空点集 A 和 B, 记

$$A \pm B = \{x \pm y : x \in A,\ y \in B\},$$

$$A \backslash B = \{x : x \in A,\ x \notin B\},$$

$$aA = \{ax : x \in A\}, \quad a \text{ 为任意实数},$$

$$x + A = \{x + y : y \in A\}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

$$d(x, A) = \text{点 } x \text{ 到 } A \text{ 的距离} = \inf\{d(x, y) : y \in A\}, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

$$d(A, B) = A \text{ 与 } B \text{ 的距离} = \inf\{d(x, y) : x \in A,\ y \in B\},$$

$$\bar{A} = A \text{ 的闭包},$$

$$\partial A = A \text{ 的边界},$$

$$A^{\mathrm{c}} = A \text{ 的余集} = \mathbf{R}^n \backslash A,$$

$$\mathrm{diam} A = A \text{ 的直径} = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\},$$

$$\mathrm{meas} A = |A| = A \text{ 的 Lebesgue 测度}, \quad \text{如果 } A \text{ 可测},$$

$$A_\varepsilon = A \text{ 的 } \varepsilon \text{ 邻域} = \{x : x \in \mathbf{R}^n,\ d(x, A) < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$A^\varepsilon = A \text{ 的 } \varepsilon \text{ 内域} = \{x : x \in A,\ d(x, \partial A) > \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,$$

$$A \subset\subset B \ \text{ 意指 } \bar{A} \text{ 为紧集即有界闭集}, \bar{A} \subset B \text{ 且 } d(\bar{A}, \partial B) > 0.$$

下面这些记号也是常用的:

$$\mathbf{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n :\ x_n > 0\} \ (\text{称为 } n \text{ 维上半空间}),$$

$$\mathbf{S}^{n-1} = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n :\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\},$$

$$B(x_0, r) = B_r(x_0) = \mathbf{R}^n \text{ 中以 } x_0 \in \mathbf{R}^n \text{ 为心、以 } r > 0 \text{ 为半径的开球},$$

$$\bar{B}(x_0, r) = \bar{B}_r(x_0) = \mathbf{R}^n \text{ 中以 } x_0 \in \mathbf{R}^n \text{ 为心、以 } r > 0 \text{ 为半径的闭球},$$

$$B^+(0, r) = B_r^+(0) = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n :\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < r^2,\ x_n > 0\right\},$$

$$\mathbf{Z} = \{\text{全体整数}\}, \quad \mathbf{Z}_+ = \{\text{全体非负整数}\}, \quad \mathbf{N} = \{\text{全体正整数}\},$$

$$\mathbf{Z}_+^n = \underbrace{\mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+ \times \cdots \times \mathbf{Z}_+}_{n} \ (\mathbf{Z}_+ \text{ 的 } n \text{ 次笛卡儿积}).$$

$\mathbf{S}^{n-1}$ 叫做 $n-1$ **维单位球面**, 它所包围的区域就是 n 维单位球 $B(0,1)$, 亦即 $\mathbf{S}^{n-1}=\partial B(0,1)$. 下面两个符号也是通用的:

$$\omega_n = n \text{ 维单位球的体积} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)},$$

$$\sigma_n = n\omega_n = n-1 \text{ 维单位球面的表面积} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

这里如通常 Γ 表示 Euler 伽马函数.

$\mathbf{Z}_+^n$ 中的元素叫做 n **重指标**, 其中的元素用小写希腊字母 α, β 以及加撇的希腊字母 α', β' 等表示. 对 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{Z}_+^n$ 和 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\in\mathbf{Z}_+^n$, 记

$$\alpha\pm\beta=(\alpha_1\pm\beta_1,\alpha_2\pm\beta_2,\cdots,\alpha_n\pm\beta_n),$$

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,$$

$$\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!,$$

$$\binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!},$$

$$\alpha\leqslant\beta \text{ 意指 } \alpha_i\leqslant\beta_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

$|\alpha|$ 称为 α 的**长度**. 对 $x\in\mathbf{R}^n$ 和 $\alpha\in\mathbf{Z}_+^n$, 记

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

按照这些记号, n 变元 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的次数不超过 m 的多项式可写成

$$P(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha x^\alpha \quad (a_\alpha \text{均为常数}).$$

这里符号 $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}$ 表示关于所有满足条件 $|\alpha|\leqslant m$ 的 n 重指标 α 求和.

对每个 $i=1,2,\cdots,n$, 把偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 简记为 ∂_i, 即

$$\partial_i u(x)=\frac{\partial u(x)}{\partial x_i},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

再记 $\partial=(\partial_1,\partial_2,\cdots,\partial_n)$. 对 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbf{Z}_+^n$, 用 ∂^α, $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$, $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$ 等符号表示偏导数 $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$, 即

$$\partial^\alpha u(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x)=\frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x^\alpha}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$