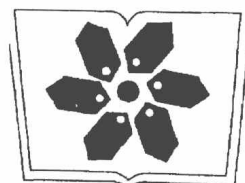


气体物理力学

赵伊君 姜宗福 华卫红 许中杰 编著



科学出版社



中国科学院科学出版基金资助出版

气体物理力学

赵伊君 姜宗福 华卫红 许中杰 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书对求解气体动力学(包括辐射流体力学、化学流体力学) Navier-Stokes 方程组时所需的状态方程、输运系数和不透明度的计算法,在以统计物理为主的基础上进行系统介绍.第1、2章分别从宏观连续介质力学和微观气体动力论角度讨论 Navier-Stokes 方程组,第3~5章对有化学反应气体的平衡性质、输运性质和辐射性质进行论述.

本书可供从事物理力学、高温气体动力学、核爆炸、飞行器再入、气流激光等工作的科技工作者和研究生参考,也可供将理论物理应用于近代力学和对国防高技术感兴趣的读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

气体物理力学/赵伊君等编著. —北京: 科学出版社, 2016.2

ISBN 978-7-03-047217-5

I. ①气… II. ①赵… III. ①气体动力学—物理力学 IV. ①O354

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 018075 号

责任编辑: 刘凤娟 / 责任校对: 邹慧卿

责任印制: 张 倩 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 12 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2015 年 12 月第一次印刷 印张: 13

字数: 249 000

定价: 78.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

解决工程技术问题时,经常需要用到介质或材料在不同条件下的宏观性质,这些数据,如气体的热力学性质等,通常是用实验测出的.但近代技术往往面临着高温、高压等极端条件下的物质性质问题.例如,弹道导弹和卫星等高速飞行器在进入大气时,遇到的温度可达数千摄氏度,核反应时温度可高达近亿摄氏度;核武器爆炸时,压力高达数百万甚至上千万大气压.在实验室内模拟这类高温、高压条件很困难,当前还无法实现,因而需要设法通过理论计算或灵活地结合某些易于进行的实验,间接得出这些数据.

不论什么物质,都是由大量的原子、分子组成的.组成物质的各种原子、分子的结构及它们之间的相互作用,是物质在高温、高压等外因条件下性质发生变化的内因,因而可以根据物质在原子、分子层次的微观结构及其运动规律,利用近代物理学和近代化学的成就,通过分析研究和数值计算得出物质的宏观性质,并对其宏观现象和运动规律作出微观解释.这种从物质微观规律确定其宏观力学性质的学科称为物理力学.

物理力学作为力学的一个分支,出现于 20 世纪 50 年代末,首先提出这一名称并对此学科做了开创性工作的是钱学森先生.

物理力学是针对近代工程技术的迫切需要,特别是导弹、核爆炸、激光武器等国防技术的迫切需要,沿着近代力学的发展方向而开拓的新边缘学科.当前物理力学虽然还处于萌芽阶段,还相当不成熟,但在钱学森、苟清泉等著名学者的带领、推动和组织下,已取得不少成就,为进一步继续发展奠定了基础.

物理力学的研究工作,目前主要侧重于高温气体、稠密流体、固体材料等几个方面,由于对气体的理论处理远比对凝聚态物质简单得多,所以相对而言,气体物理力学是物理力学中最为成熟的部分.

作者所在的国防科技大学光子对抗研究中心及其前身,从 20 世纪 70 年代初起,在从事核爆炸效应、强激光破坏机理和高能激光器模拟计算等方面研究中,根据需要开展了物理力学领域中的多方面研究工作.为了教师进修和研究生教学的需要,赵伊君教授在 1973 年和 1983 ~ 1985 年,曾编写出有关物理力学的内部教材多部,并根据新的科研成果和对十余届研究生的教学实践,逐年加以补充修订,现抽取其中较为成熟的气体物理力学部分,由姜宗福教授、华卫红教授和许中杰讲师整理补充,编成本书,可供对此领域感兴趣的同行参考,也可供有关专业的研究生

参考.

我们深知此书尚不完善,可能有疏漏和不妥之处,但考虑到读者的需要,还是大胆地将它出版,请读者不吝指正.

作 者

2014 年 11 月

目 录

第 1 章	连续介质力学基础	1
1.1	作用在连续介质上的力	1
1.2	Descartes 张量	10
1.3	速度场	29
1.4	流体力学守恒方程	33
1.5	本构方程	37
1.6	流体力学方程组	40
第 2 章	气体动力论	43
2.1	动力论方程	43
2.2	统计平均值	62
2.3	平衡分布	67
2.4	矩方程	70
2.5	辐射流体力学	75
2.6	化学流体力学	83
第 3 章	气体的平衡性质	87
3.1	气体的平衡组分	87
3.2	独立粒子近似下的状态方程	97
3.3	真实气体状态方程	99
3.4	导电气体状态方程	120
第 4 章	气体的输运性质	126
4.1	非均匀气体	126
4.2	碰撞积分	135
4.3	黏性	142
4.4	热传导	147
4.5	扩散	150
第 5 章	气体的辐射性质	172
5.1	辐射度学	172
5.2	辐射场	177
5.3	散射	181

5.4 吸收与发射	182
5.5 辐射输运方程的解	185
5.6 不透明度	187
5.7 折射率的影响因素	191
主要参考书目	198
索引	199

第 1 章 连续介质力学基础

1.1 作用在连续介质上的力

1. 连续介质

在空间连续分布的物质称为连续介质. 为说明此概念, 现讨论物质的质量密度 (常简称为密度) ρ . 假定物质充满空间 τ_0 , 考虑其中一点 P 以及收敛于 P 的子空间序列 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, 如图 1.1 所示.

$$\tau_n \subset \tau_{n-1}, \quad P \in \tau_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

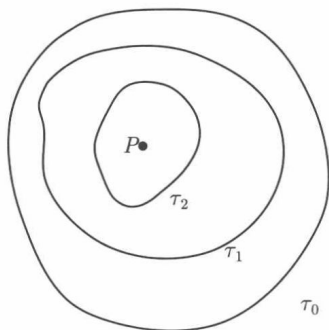


图 1.1 收敛于 P 的子空间序列

设 τ_n 的体积为 V_n , τ_n 中所含物质的质量为 m_n , 如果 $n \rightarrow \infty$, $V_n \rightarrow 0$ 时, m_n/V_n 的极限存在, 则将此极限称为 P 处物质的密度 $\rho(P)$, 即

$$\rho(P) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ V_n \rightarrow 0}} \frac{m_n}{V_n} \quad (1.1)$$

如果 τ_0 内处处均可如此定义 ρ , 就称此物质的质量是连续分布的.

可用类似方法定义动量密度、能量密度. 如果物质的质量、动量、能量都是连续分布的, 就称此物质为连续介质.

研究连续介质运动以及引起运动的力的学科, 称为连续介质力学. 连续介质力学又可区分成流体力学与固体力学. 我们主要关心的是流体力学.

真实物质由原子、分子构成, 原子、分子又由原子核与电子构成, 它们在空间并不是连续分布的, 因而连续介质仅是一种数学的抽象概念. 但当考虑真实物质的

宏观运动时, 通常可以不深究其微观结构, 也不深究其中原子、分子的运动. 这时考察 m_n/V_n , 令 τ_n 越来越小, 然而总保持 τ_n 中包含有大量的原子、分子, 即 τ_n 是微观大、宏观小的空间范围. 在此限制条件下, 如 m_n/V_n 趋于某一确定值 $\rho(P)$, 即称 $\rho(P)$ 是物质在 P 点处的密度, 并常将此微观大、宏观小的 τ_n 中物质称为质点, P 的空间坐标就是该质点的位置. 这样, 可对真实物质构成一个连续介质的数学模型. 为了简单, 以后常用 τ_n 表示 V_n , 即 τ_n 与 V_n 不再加以区别.

2. 体力与面力

先考虑一个质点系, 其中含 N 个相互作用的质点, 作用在第 i 个质点上的力为

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^e + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}$$

其中, $\mathbf{F}_i^e$ 为外力, 如重力、电磁力等; $\mathbf{F}_{ij}$ 为相互作用力; $j \neq i$ 表示质点自己不对自己作用.

作用在质点系上的力为

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^e + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{ij}$$

式中, 双重求和中 $\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}$, 由牛顿 (Newton) 第三定律, $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, 所以双重求和结果为零. 于是

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^e$$

以上方法可应用于连续介质.

为了便于进行讨论, 可在连续介质中分离出一部分 τ , 研究周围部分通过分界面 S 对该部分的作用力, 如图 1.2 所示. 通常取以 S 面为边界的区域为凸区域, S 由有限个部分组成, 每一部分的外法线方向上单位矢量 $\mathbf{n}$ 形成一连续矢量场, 这种区域称为正则 (canonical) 区域.

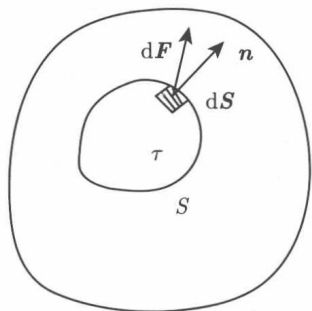


图 1.2 连续介质正则区域

取微元面积 dS , 其外法线方向上单位矢量为 $\mathbf{n}$, S 以外介质对 S 以内介质的相互作用力可分为两类:

(1) 体力 (相当于质点系中的外力)——重力、电磁力等非接触力, 隔一段距离的力, 可表示为

$$\mathbf{F} = \iiint_{\tau} \mathbf{X} d\tau \quad (1.2)$$

式中, $\mathbf{X}$ 为单位体积介质所受的力; $d\tau$ 为微元体积.

(2) 面力 (相当于质点系中的相互作用力)——经过 S 而作用的力, 可表示为

$$\mathbf{F} = \oint\oint_S \mathbf{T}^{(n)} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.3)$$

式中, $\mathbf{T}^{(n)}$ 为单位面积所受的力, 也称为应力张量, 上标 n 表示 dS 的方向.

欧拉-柯西 (Euler-Cauchy) 应力原理: 在连续介质内部任一想象的闭合曲面 S 上, 有一个确定的应力矢量场, 它对 S 内部介质的作用与 S 外部介质通过 S 对内部介质的作用等价.

此原理认为: dS 两边物质的作用是无力矩的, 这并不符合更普遍的简化想法, 即 dS 外部对内部物质的作用应等价于一个力和一个力偶. 但实际表明, Euler-Cauchy 应力原理在绝大多数情况下是正确的. 它满足一般连续介质力学的所有要求. 由此可见, S 内部空间域 τ 中物质所受外力 $\mathbf{F}$ 与绕坐标原点的力矩 $\mathbf{L}$ 为

$$\mathbf{F} = \iiint_{\tau} \mathbf{X} d\tau + \oint\oint_S \mathbf{T}^{(n)} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.4)$$

$$\mathbf{L} = \iiint_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{X} d\tau + \oint\oint_S \mathbf{r} \times \mathbf{T}^{(n)} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.5)$$

式中, $\mathbf{r}$ 是空间域 τ 的位矢.

3. 应力分量

取一微元六面体. 令 dS_k ($k = 1, 2, 3$) 的外法线沿 x_k 轴的正方向, 用 $\mathbf{T}^{(k)}$ 表示作用在 dS_k 上的应力张量, 如图 1.3 所示, 它沿 x_1, x_2, x_3 轴方向有三个分量: $T_1^{(k)}$, $T_2^{(k)}$, $T_3^{(k)}$, 并分别记作: $\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, \sigma_{k3}$ ($k = 1, 2, 3$). 于是, 应力张量的 9 个分量为

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{array}$$

这 9 个量确定了面元外侧 (外法线正方向一侧) 部分对内侧部分的作用力.

另外, 3 个面的外法线方向与 x_1, x_2, x_3 轴的方向相反, 作用在它们上面的应力分量正方向也反向, 如图 1.4 所示.

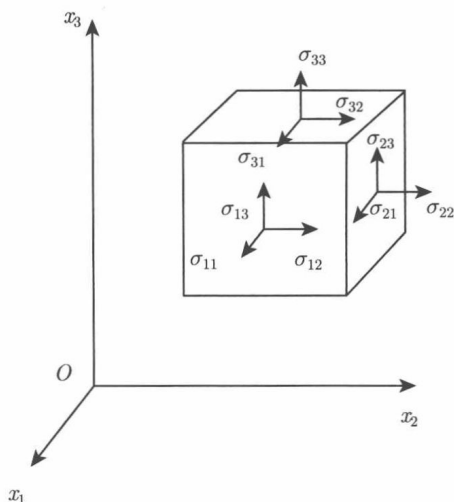


图 1.3 微元六面体应力张量的 9 个分量

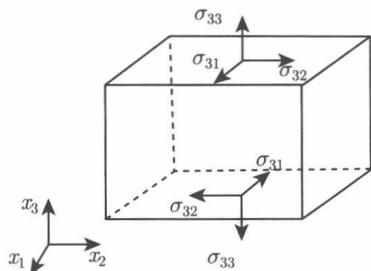


图 1.4 外法线方向与坐标轴方向相反的应力张量

由图 1.4 可见, σ_{33} 是 x_3 轴方向上的拉伸, σ_{31} 是绕 x_2 轴的剪切, σ_{32} 是绕 x_1 轴的剪切. 因此 $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ 称为正应力, $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$ 称为剪应力, 它们的量纲均为 M/LT^2 , 以 N/m^2 为单位.

有时把应力分量改用 p_{ij} 表示

$$p_{ij} = -\sigma_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.6)$$

当用 p_{ij} 表示时, p_{11}, p_{22}, p_{33} 分别表示 x_1, x_2, x_3 轴方向上的压缩.

4. 柯西 (Cauchy) 公式

假定 P 点处 9 个应力分量 $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ 为已知, 现在计算紧靠 P 点的微元面积 dS 上所受的应力张量 $T^{(n)}$, 如图 1.5 所示, 其中 n 是 dS 外法线方向上的单位矢量, 它的 3 个分量为 n_1, n_2, n_3 .

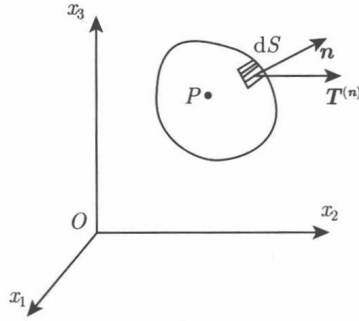


图 1.5 紧靠 P 点的微元面积 dS 上的应力张量

作四面体, 如图 1.6 所示, P 点为三个相互垂直的平面 S_1, S_2, S_3 的交点, S 为紧靠 P 点且与三个相互垂直平面均相交的任意平面.

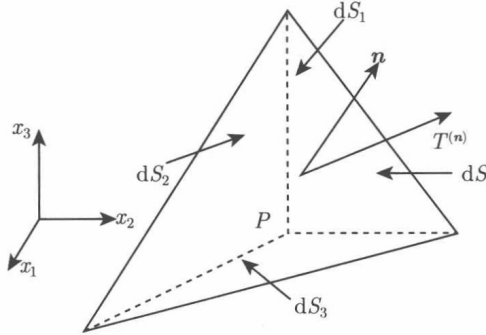


图 1.6 包含 P 点的四面体

由图 1.6 有

$$dS_i = n_i dS \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.7)$$

四面体的体积为

$$d\tau = \frac{1}{3} h dS \quad (1.8)$$

其中, h 是 P 点到 dS 的距离, 即四面体的高度.

如图 1.7 所示, 作用在 dS_1, dS_2, dS_3 上的沿 x_1 方向的面力为

$$\begin{aligned} (-\sigma_{11} + \varepsilon_1) dS_1 &= (-\sigma_{11} + \varepsilon_1) n_1 dS \\ (-\sigma_{21} + \varepsilon_2) dS_2 &= (-\sigma_{21} + \varepsilon_2) n_2 dS \\ (-\sigma_{31} + \varepsilon_3) dS_3 &= (-\sigma_{31} + \varepsilon_3) n_3 dS \end{aligned} \quad (1.9)$$

式中, ε_i ($i = 1, 2, 3$) 表示面力作用点与 P 的位置稍有差别而引起的应力偏差. 作用在 $\mathbf{n}$ 方向 dS 上的面力, 沿 x_1 方向的分量为 $(T_1^{(n)} + \varepsilon) dS$; 作用在 $d\tau$ 上的体力, 沿 x_1 方向的分量为 $(X_1 + \varepsilon') d\tau$. ε 和 ε' 分别为面力和体力的作用点与 P 点的位置

置不同而引起的偏差. 在 x_1 方向, 由牛顿第二定律得

$$(-\sigma_{11} + \varepsilon_1)n_1 dS + (-\sigma_{21} + \varepsilon_2)n_2 dS + (-\sigma_{31} + \varepsilon_3)n_3 dS + (T_1^{(n)} + \varepsilon) dS + (X_1 + \varepsilon') \frac{1}{3} h dS = \frac{1}{3} \rho \dot{u}_1 h dS \quad (1.10)$$

即

$$(-\sigma_{11} + \varepsilon_1)n_1 + (-\sigma_{21} + \varepsilon_2)n_2 + (-\sigma_{31} + \varepsilon_3)n_3 + (T_1^{(n)} + \varepsilon) + (X_1 + \varepsilon') \frac{h}{3} = \rho \dot{u}_1 \frac{h}{3} \quad (1.11)$$

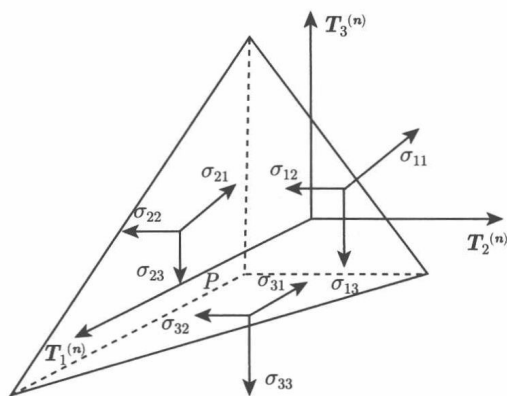


图 1.7 P 点的应力分量

当 $h \rightarrow 0$ 时, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0$, 得: $T_1^{(n)} = n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31}$. x_2, x_3 方向可以此类推. 于是可得 Cauchy 公式

$$\begin{aligned} T_1^{(n)} &= n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} + n_3 \sigma_{31} \\ T_2^{(n)} &= n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} + n_3 \sigma_{32} \\ T_3^{(n)} &= n_1 \sigma_{13} + n_2 \sigma_{23} + n_3 \sigma_{33} \end{aligned} \quad (1.12)$$

由上式可知, 当 P 点处应力 σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 已知后, 任意作该点处一个面, 面上的应力矢量 $T^{(n)}$ 也为已知.

5. 连续介质的运动

考察被封闭曲面 S 包围的空间 τ , 内含许多质点, 如图 1.8 所示, P 是其中的一个质点, 它在 t 时刻的空间坐标为 (x_1, x_2, x_3) , 速度为 $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$, 可用 $P(t, x_1, x_2, x_3)$ 描述它的运动情况. 如果 τ 中所有质点的运动均已知, 则 τ 中介质的运动即为已知.

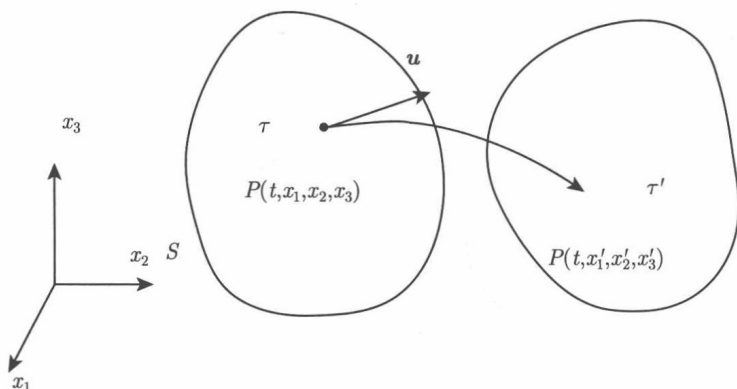


图 1.8 连续介质的运动

当 $t' = t + \Delta t$ 时, τ 变为 τ' , 其中质点 $P(t, x_1, x_2, x_3)$ 变为 $P(t + \Delta t, x_1 + u_1 \Delta t, x_2 + u_2 \Delta t, x_3 + u_3 \Delta t)$.

与质点 P 有关的物理量用 $\Phi(t, x_1, x_2, x_3)$ 表示. Φ 可以是温度 T , 速度 $\mathbf{u}$ 等. Φ 的变化率 $\dot{\Phi}$ 可表示为

$$\dot{\Phi}(t, x_1, x_2, x_3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [\Phi(t + \Delta t, x_1 + u_1 \Delta t, x_2 + u_2 \Delta t, x_3 + u_3 \Delta t) - \Phi(t, x_1, x_2, x_3)] \quad (1.13)$$

将 Φ 在 (t, x_1, x_2, x_3) 处作 Taylor 展开

$$\begin{aligned} & \Phi(t + \Delta t, x_1 + u_1 \Delta t, x_2 + u_2 \Delta t, x_3 + u_3 \Delta t) \\ &= \Phi(t, x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} u_1 \Delta t + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} u_2 \Delta t + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} u_3 \Delta t + o(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (1.14)$$

将式 (1.14) 代入式 (1.13) 得

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi \quad (1.15)$$

上式右边第一项是 $\dot{\Phi}$ 的局部部分, 是由 Φ 的时间相关性引起的, 表示空间固定点上物理量随时间的变化; 第二项是 $\dot{\Phi}$ 的迁移部分, 是由速度 $\mathbf{u}$ 引起的, 表示质点位置移动对物理量随时间变化的贡献. ∇ 算符在直角坐标系中的定义为: $\nabla =$

$\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$, $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, 3)$ 是直角坐标系的三个单位矢量.

定义物质导数

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (1.16)$$

用于表示一组给定物质质点的物理量随时间的变化率, 则式 (1.15) 可写为

$$\frac{D}{Dt} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Phi \quad (1.17)$$

空间 $\tau(t)$ 中物质的动量和绕原点 O 的角动量分别为

$$\mathbf{P} = \iiint_{\tau(t)} \mathbf{u} \rho d\tau \quad (1.18)$$

$$\mathbf{K} = \iiint_{\tau(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{u} \rho d\tau \quad (1.19)$$

用 $\dot{\mathbf{P}}$ 和 $\dot{\mathbf{K}}$ 表示 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{K}$ 的变化率, 则由牛顿第二定律有

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F} \quad (1.20)$$

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{L} \quad (1.21)$$

以上两式分别为动量守恒方程和角动量守恒方程. 其中, $\mathbf{F}$ 是作用在此空间域 τ 中物质上的力; $\mathbf{L}$ 是作用在此空间域 τ 中物质上绕原点 O 的力矩, 其具体表达式分别见式 (1.4) 和式 (1.5).

将式 (1.4) 和式 (1.18)、式 (1.5) 和式 (1.19) 分别代入式 (1.20) 和式 (1.21), 可得

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\tau} \mathbf{u} \rho d\tau = \iiint_{\tau} \mathbf{X} d\tau + \oint_S \mathbf{T}^{(n)} dS \quad (1.22)$$

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{u} \rho d\tau = \iiint_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{X} d\tau + \oint_S \mathbf{r} \times \mathbf{T}^{(n)} dS \quad (1.23)$$

下面讨论 $\frac{D}{Dt} \iiint_{\tau}$ 的计算, 注意 $\frac{D}{Dt} \iiint_{\tau} \neq \iiint_{\tau} \frac{D}{Dt}$.

假定一组给定的质点占据的空间域为 $\tau(t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 是在该域上定义的连续可微函数, 令

$$I(t) = \iiint_{\tau(t)} \Phi(\mathbf{r}, t) d\tau \quad (1.24)$$

现在计算 $I(t)$ 的变化率 $\frac{D}{Dt} I$.

如图 1.9 所示, 设 t 时刻, τ 的边界为 S , $t + \Delta t$ 时刻 τ 成为 τ' , 其边界为 S' , 则

$$\frac{D}{Dt} I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\iiint_{\tau'} \Phi(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\tau - \iiint_{\tau} \Phi(\mathbf{r}, t) d\tau \right] \quad (1.25)$$

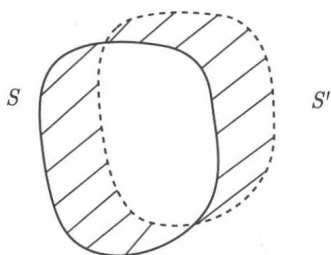


图 1.9 空间域的边界随时间的变化

令 $\Delta\tau = \tau' - \tau$, 则

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} I &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\iiint_{\tau} \Phi(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\tau + \iiint_{\Delta\tau} \Phi(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\tau - \iiint_{\tau} \Phi(\mathbf{r}, t) d\tau \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \iiint_{\tau} [\Phi(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \Phi(\mathbf{r}, t)] d\tau + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \iiint_{\Delta\tau} \Phi(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\tau \quad (1.26) \end{aligned}$$

由于 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 在 τ 上连续可微, 则有

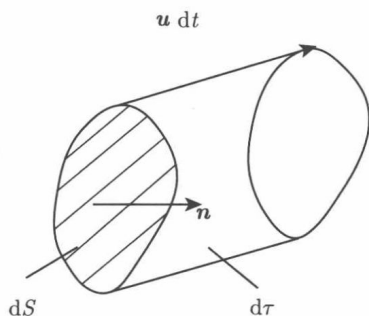
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \iiint_{\tau} [\Phi(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \Phi(\mathbf{r}, t)] d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} d\tau \quad (1.27)$$

而 $\Delta\tau$ 是由边界 S 在 Δt 期间移动扫出的空间域, 如图 1.10 所示, dS 对其体积的贡献为

$$d\tau = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS dt \quad (1.28)$$

所以有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \iiint_{\Delta\tau} \Phi(\mathbf{r}, t + \Delta t) d\tau = \oint_S \Phi(\mathbf{r}, t) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.29)$$

图 1.10 面元 dS 在 Δt 期间移动扫出的空间域

将式 (1.27) 和式 (1.29) 代入式 (1.26), 得

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\tau} \Phi d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\tau + \oint_S \Phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.30)$$

利用上式, 连续介质的运动方程 (1.22) 和 (1.23) 为

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} d\tau + \oint_S \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_{\tau} \mathbf{X} d\tau + \oint_S \mathbf{T}^{(n)} dS \quad (1.31)$$

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u}}{\partial t} d\tau + \oint_S \rho \mathbf{r} \times \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{X} d\tau + \oint_S \mathbf{r} \times \mathbf{T}^{(n)} dS \quad (1.32)$$

1.2 Descartes 张量

1. 矢量

位移 $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ 可以用 x_i ($i = 1, 2, 3$) 表示, x_i 就称为矢量. 根据求和约定, 对公式中的重复下标求和, 即

$$f_i g_i = \sum_{i=1}^3 f_i g_i \quad (1.33)$$

于是矢量的点乘可以直接记为

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = f_i g_i \quad (1.34)$$

引入 Kronecker 符号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (1.35)$$

矢量的点乘又可记为

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \delta_{ij} f_i g_j \quad (1.36)$$

引入置换符号

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{当 } i, j, k \text{ 为 } 1, 2, 3 \text{ 的偶置换时} \\ 0, & \text{当 } i, j, k \text{ 中有 2 个或以上相等时} \\ -1, & \text{当 } i, j, k \text{ 为 } 1, 2, 3 \text{ 的奇置换时} \end{cases} \quad (1.37)$$

矢量的叉乘可以直接记为

$$\mathbf{f} \times \mathbf{g} = e_{ijk} f_j g_k \quad (1.38)$$

利用式 (1.35) 和式 (1.37) 的定义, 可以验证有以下恒等式成立

$$e_{ijk} e_{ist} = \delta_{js} \delta_{kt} - \delta_{jt} \delta_{ks} \quad (1.39)$$