高等学校教材

线性代数与空间解析几何

第二版

主编　于朝霞　张苏梅　苗丽安

高等教育出版社

高等学校教材

线性代数与空间解析几何

第二版

主　编　于朝霞　张苏梅　苗丽安
副主编　王纪辉　陈兆英　姜洪冰

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是在第一版的基础上修订而成的，在修订过程中，根据一线教师及读者对教材的意见和建议，重新编写了该书的某些章节，调整了一些章节内容的顺序，补充了部分例题与习题。修订后力求使全书层次清晰，叙述深入浅出，通俗易懂，便于教学与自学。

本书第一章至第七章系统介绍了线性代数与空间解析几何的基本理论和方法，内容包括行列式、矩阵、向量代数、欧氏空间、线性方程组、特征值与特征向量、二次型等，并配有适量习题供读者练习，章末附有基于数学软件 Mathematica 的数学实验案例。第八章、第九章分别介绍了线性变换及数学软件 Mathematica 使用的基本知识。

本书可作为高等学校理工类、经管类专业的教材与教学参考用书，也适合供有兴趣的读者自学或考研使用，同时也可作为工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何/于朝霞，张苏梅，苗丽安主编.--2版.--北京:高等教育出版社，2016.1

ISBN 978-7-04-044191-8

Ⅰ.①线… Ⅱ.①于…②张…③苗… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②立体几何-解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第272399号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 李 茜　封面设计 李小璐　版式设计 马云
插图绘制 郝 林　责任校对 杨凤玲　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	三河市骏杰印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	787mm×960mm 1/16		
印　张	18	版　次	2009年11月第1版
字　数	320千字		2016年1月第2版
购书热线	010-58581118	印　次	2016年1月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	26.50元

物 料 号 44191-00

第二版前言

本书自2009年11月出版以来,已经连续印刷了7次。为了使教材更好地适应教学需求,我们参考了同行的相关教材和网络案例资料,征集一线教师及广大读者对本书的改进意见,对本书适当增删,优化了部分概念、结论、计算等。本次修订始终本着"实用、管用、够用"的原则,在尽量保持上一版特色、组织结构和内容体系不变的前提下,使内容的叙述深入浅出、通俗易懂,便于教学与自学。修订的主要内容有

1. 对第一版中有关排版、编辑、内容等方面存在的纰漏和差错进行了修正,纠正了个别编写中的错误,力求做到概念准确、表述正确、数字精确。

2. 对有关章节的导入案例和综合案例进行了更新,丰富了部分定理、性质的内容,优化了部分结论的证明过程。

3. 对第三章中的"线性相关性"、第四章中的"二次曲面"、第五章的编排顺序及内容做了较大的调整。

4. 删除了部分例题及某些繁琐的证明。

5. 精选了部分练习题,增加在第一章至第七章的节后习题与总习题中,同时重新编排了"部分习题参考答案"内容。

本书第二版主要对第一章至第七章的内容进行了修订,其中于朝霞主要负责第二、五章内容的修订;张苏梅负责第一、三、四章内容的修订;苗丽安负责第六、七章内容的修订;王纪辉、陈兆英、姜洪冰协助完成所有的修订工作,其中王纪辉、陈兆英共同完成第一、三、四、六、七章课后补充题的遴选与解答工作;姜洪冰负责第二、五章课后补充题的遴选与解答工作。于朝霞负责制定修订计划并统编修订全稿。

由衷地感谢高等教育出版社为我们修订完善书稿提供了有力的帮助,感谢济南大学数学科学学院领导对本书修订工作的大力支持,感谢广大一线教师为本书修订提出的意见与建议。由于编者水平有限,教材中缺点和疏漏在所难免,恳请读者批评指正。

编　者

2015年3月

第一版前言

线性代数与空间解析几何是高等学校理工类专业重要的数学基础课。随着现代数学的发展,代数与几何这两门数学课程相互渗透、紧密结合已成为一种趋势。我们编写这本《线性代数与空间解析几何》,旨在传授数学知识的同时,着力提高学生的数学素养,培养学生应用数学知识解决实际问题的能力,为学生在今后工作中更新数学知识、学习现代数学方法奠定良好的基础。与现行的同类教材相比,本书有以下几个特点:

1. 结构上将线性代数与空间解析几何有机地融合在一起。代数与几何之间有联系也有区别,线性代数是讨论有限维空间的线性理论的课程,有较强的抽象性和逻辑性。几何问题更是广泛存在于自然科学与技术科学乃至日常生活中。代数为几何提供研究方法,几何为代数提供直观背景,通过这两部分内容相互渗透、交叉学习,必将大大提高学生的逻辑推理能力、计算能力与空间想象能力。这样安排既可减少课时,又可提高教学效果。

2. 为学习现代数学开设内容展示的窗口和延伸发展的接口。本书尽量使用现代数学语言、术语与符号,注意与当代文献的习惯用法相衔接;介绍了数学软件 Mathematica 的使用,使学生通过上机练习,解决线性代数与空间解析几何中的基本计算问题。这些内容的安排,将为拓展学生的知识面、灵活应用现代数学工具解决实际问题打下基础。

3. 加强概念的背景教学,提高学生利用数学方法解决实际问题的能力。对一些抽象数学概念进行还原,尽量从实际背景出发,通过提出问题、解决问题的方式展开教材内容,力求突出解决实际问题的数学思想与方法,使学生获得对数学问题的洞察力。代数与几何是经典的数学内容,在科技与生产各个方面有着广泛的应用,在教材中也适当编入了这方面的内容。如:利用矩阵理论解决了单循环比赛的名次确定问题,利用方程组解决了经济数学中的投入产出问题等。这样安排不仅解决了学生理解抽象概念的困难,而且也使他们更有兴趣在现实生活中发现问题、解决问题,从而增强建立数学模型的能力。

4. 教材内容的多层次。本书努力适应不同的学习要求,特别是课程基本要求与工学、经济学硕士研究生的入学考试要求,在内容的编排、例题与习题的配备方面注意了多样化。书中打 * 号的内容可酌情取舍或作为自学内容。例题的选取注意了“典型性”与“全面性”,可适合不同层次教学的需求。习题按小节配备,章后有综合练习,注意兼容各种题型,难易结合,书末附有习题答案。

本书前七章的内容涵盖了该课程的基本要求规定的全部内容，能满足机械、自动化、计算机等工学类各专业的教学要求；经济学类各专业选择学习第一、二、三、五、六章及第四章选学部分内容即可；另外，对本门课程教学要求不是很高的其他专业可选学本书的前三章及第五章；第八章内容适合教学要求高的专业选学；第九章内容适合所有专业学习，可根据各专业学时的多少进行选学或在教师引导下自学。前七章后的数学实验设计由于实验内容为本章的例题，故不需占用学时而由教师引导学生课下上机实习即可。

本书的第二、五、八、九章由于朝霞编写，第一、三、四章由张苏梅编写，第六、七章由苗丽安编写，于朝霞负责全书统稿。另外，在本书试用过程中，开发了配套的 CAI 课件，对教学效果的提高起到重要作用。

周智教授审阅了全书。教材在试用过程中，刘桂真教授对本书的内容与结构及使用效果给予了充分的肯定，感谢以上两位专家给予的支持与鼓励。

在本书的编写过程中，济南大学教务处、理学院等各级领导给予了极大的关心与支持，同时也得到了兄弟院校许多同行的支持与鼓励；在教材的试用过程中，任课教师提出了许多可行的意见与建议，对以上所有这些真诚的帮助深表谢意。

由衷地感谢高等教育出版社及相关专家对本书提出修改的意见与建议，为我们完善书稿内容提供了有力的帮助。

由于编者水平有限，教材中缺点和疏漏在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2009 年 3 月于济南

目　录

第一章 行 列 式

行列式是重要的数学工具,不但在数学中有广泛的应用,而且还广泛应用于工程技术和科学研究的许多领域.学习行列式,一是要理解行列式的概念,二是要掌握行列式的性质,并运用这些性质进行行列式的计算.本章主要讨论以下几个问题:

1. 行列式的定义;
2. 行列式的性质;
3. 行列式的计算;
4. 求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1 二阶与三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

为消去未知数 x_2,以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘方程组(1.1)的两个方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

类似地,消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,可得方程组(1.1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \tag{1.2}$$

(1.2)式就是方程组(1.1)的求解公式.为了便于记忆此求解公式,我们引进新的符号表示(1.2)式.

记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

称为二阶行列式，其中横排称为行，竖排称为列，它等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式(1.3)的元素.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

上述行列式的定义可用对角线法则来记忆.参看图1-1，a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为次对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去次对角线上的两元素之积所得的差.

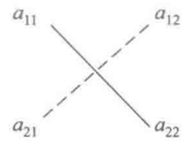

图 1-1

利用二阶行列式，对线性方程组(1.1)，记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

则(1.2)式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.4}$$

注 这里的分母 D 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式(称为该方程组的系数行列式)，x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 分别替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 分别替换 D 中 x_2 的系数 a_{12},a_{22} 所得的二阶行列式.

【例 1.1】 解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+2x_2=5, \\ 5x_1-7x_2=29. \end{cases}$

【解】 由于系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}=3\times(-7)-2\times5=-31\neq0,$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 29 & -7 \end{vmatrix}=-93,\quad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 29 \end{vmatrix}=62,$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-93}{-31}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{62}{-31}=-2.$$

1.1.2　三阶行列式

为了得出关于三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.5}$$

的类似于二元线性方程组的求解公式(1.4),我们引入三阶行列式.

【定义 1.1】　记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\tag{1.6}$$

称为三阶行列式,它等于

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},\tag{1.7}$$

即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

(1.7)式称为三阶行列式(1.6)的展开式,与二阶行列式一样,数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为三阶行列式(1.6)的第 i 行第 j 列的元素.

上述定义表明三阶行列式含六项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积,其求和规律遵循图 1-2 所示的**对角线法则**:实线联结的三个元素乘积之和减去虚线联结的三个元素乘积之和.

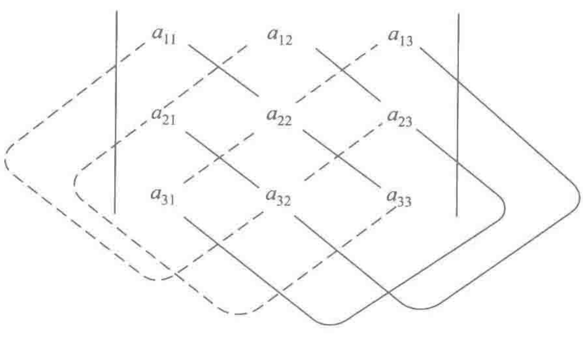

图 1-2

通过类似于对方程组(1.1)所作的讨论,可以得到方程组(1.5)的下述解法.若线性方程组(1.5)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0, \tag{1.8}$$

则方程组(1.5)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

它们是将系数行列式(1.8)中的第 1, 2, 3 列分别换成方程组(1.5)的常数项所得的行列式.

【例 1.2】 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

【解】 由于方程组的系数行列式

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1 \\ &\quad -1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1 \\ &=-5\neq 0, \end{aligned}$$

类似地用对角线法则计算可得

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-5.$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

习题 1-1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 9a & 18b \\ 26b & 13a \end{vmatrix}$；　　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$.

2. 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$.

3. 解线性方程组 $\begin{cases} x_1-3x_2+7x_3=2, \\ 2x_1+4x_2-3x_3=-1, \\ -3x_1+7x_2+2x_3=3. \end{cases}$

1.2 *n* 阶行列式的定义

由 1.1 节的讨论，我们看到在引入二阶、三阶行列式后，二元、三元线性方程组的解可以利用行列式表达成简洁形式.为了把这个思想推广到由 n 个方程构成的 n 元线性方程组，我们需要引入 n 阶行列式的概念.而 n 阶行列式的定义，需要用到一些有关排列的基本知识.

1.2.1 排列与逆序数

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的一个 n **级全排列**（简称**排列**）.n 个不同的元素的排列共有 $n!$ 种.例如，自然数 1,2,3 的排列共有六种：

$$1\ 2\ 3,1\ 3\ 2,2\ 1\ 3,2\ 3\ 1,3\ 1\ 2,3\ 2\ 1.$$

为了方便，今后把自然数 $1,2,\cdots,n$ 视为 n 个不同元素的代表.用 p_i 表示这 n 个数中的一个($i=1,2,\cdots,n$)，且当 $i\neq j$ 时，$p_i\neq p_j$，于是 $p_1p_2\cdots p_n$ 便是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

n 级排列

$$12\cdots n$$

具有自然顺序，称为**自然排列或标准排列**.

对于 n 个正整数的一个排列，如果一个大的数排在一个小的数之前，就称这两个数构成一个**逆序**.一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序总个数称为该排列的**逆序数**，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

如果一个排列的逆序数是偶数,则称这个排列为**偶排列**,否则称为**奇排列**.

【例 1.3】 求下列排列的逆序数,并指出它们的奇偶性.

(1) 25134; (2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

【解】 (1) 在五级排列 25134 中,共有逆序 21,51,53,54,即$\tau(25134)=4$,所以 25134 是偶排列.

(2) 该排列中前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$ 不构成逆序,后 n 个数 $246\cdots(2n)$ 也不构成逆序,只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序,所以

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

易知,当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}$为偶数,故此时排列为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}$为奇数,故此时排列为奇排列.

在一个排列中,把某两个数的位置互换,而保持其余的数不动,这种对一个排列作出的变动叫做**对换**.

【例 1.4】 五级偶排列 25134 经过 2,3 对换变成排列 35124,容易计算 $\tau(35124)=5$,所以 35124 是奇排列.

关于对换对排列奇偶性的影响,有下述一般性结论.有兴趣的读者可以自行证明.

【定理 1.1】 对换改变排列的奇偶性,即经过一次对换,奇排列变成偶排列,偶排列变成奇排列.

【定理 1.2】 在全部 n 级排列中($n\geqslant 2$),奇排列和偶排列各占一半.

1.2.2 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义,先来研究三阶行列式的结构.由三阶行列式的定义容易看到有以下两个特点:

(1) 三阶行列式展开式的每一项恰是取自不同行、不同列的三个元素的乘积

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

这里行标按自然顺序排成 123,列标排成 $p_1p_2p_3$,它是 1,2,3 的某个排列.这样的排列共有 3! 种,对应于行列式的展开式共含 3! 项.因此行列式恰好是所有位于不同行、不同列的三个元素之积的代数和.

(2) 行列式的展开式中各项的正负号由列标排列的奇偶性决定(此时行标按自然顺序排列).对应的列标的排列分别是 123,312,231 时,它们都是偶排列,取正号;对应的列标的排列分别是 132,213,321 时,它们都是奇排列,取负号,因

此各项所带的正负号可以表示为$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}$.

于是,三阶行列式的展开式可以写成 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

这里 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对所有三级排列求和.

至此,可将行列式的概念推广到 n 阶.

【定义 1.2】　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,其中横排称为**行**,竖排称为**列**,它等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$的代数和

$$\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \tag{1.9}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$为这个排列的逆序数, $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有 n 级排列求和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}. \tag{1.10}$$

n 阶行列式通常简记作 $\det(a_{ij})$.数 a_{ij}称为行列式 $\det(a_{ij})$的第 i 行第 j 列元素.(1.9)式称为 n 阶行列式的展开式.

【例 1.5】　证明上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

这种主对角线(从左上角到右下角的对角线)以下(上)的元素都是零的行列式,称为**上(下)三角形行列式**.

【证】 由(1.10)式知道,n 阶行列式的展开式中每一项的一般形式是

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中只要有一个元素等于零,乘积就是零,所以只需计算乘积中因子不出现零的项.对于上三角形行列式,第 n 行中当 $p_n\neq n$ 时,$a_{np_n}=0$,故只需考虑 $p_n=n$ 的项即可.又因为在第 $n-1$ 行中,当 $p_{n-1}\neq n-1,n$ 时,$a_{n-1,p_{n-1}}=0$,故只需考虑 $p_{n-1}=n-1$ 或 $p_{n-1}=n$ 这两种情形.但是已取 $p_n=n$,并且 $p_{n-1}\neq p_n$,因此只有 $p_{n-1}=n-1$.以此类推,可知在 n 阶行列式的展开式中只有唯一的一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 可能不为零,而 $\tau(12\cdots n)=0$.于是结论得证. **证毕**

用类似于例 1.5 的讨论,可以证明下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

及

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

作为三角形行列式的特例,可得对角行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix}=d_1d_2\cdots d_n,\quad \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & \cdots & d_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}d_1d_2\cdots d_n.$$

作为本节的结束,我们对 n 阶行列式的展开式(1.9)中各项前所带符号作两点补充说明:

(1) 由定理 1.2 知,n 阶行列式的展开式(1.9)中,前面带负号的项数与前面带正号的项数相等,均为$\dfrac{n!}{2}$.

(2) 在行列式的定义中,为方便,我们将 n 个元素的行标按自然顺序排列.事实上,数的乘法是可交换的,因而这 n 个元素的次序是可以任意排列的.一般地,n 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的两个排列.利用定理 1.1 可以证明,n 阶行