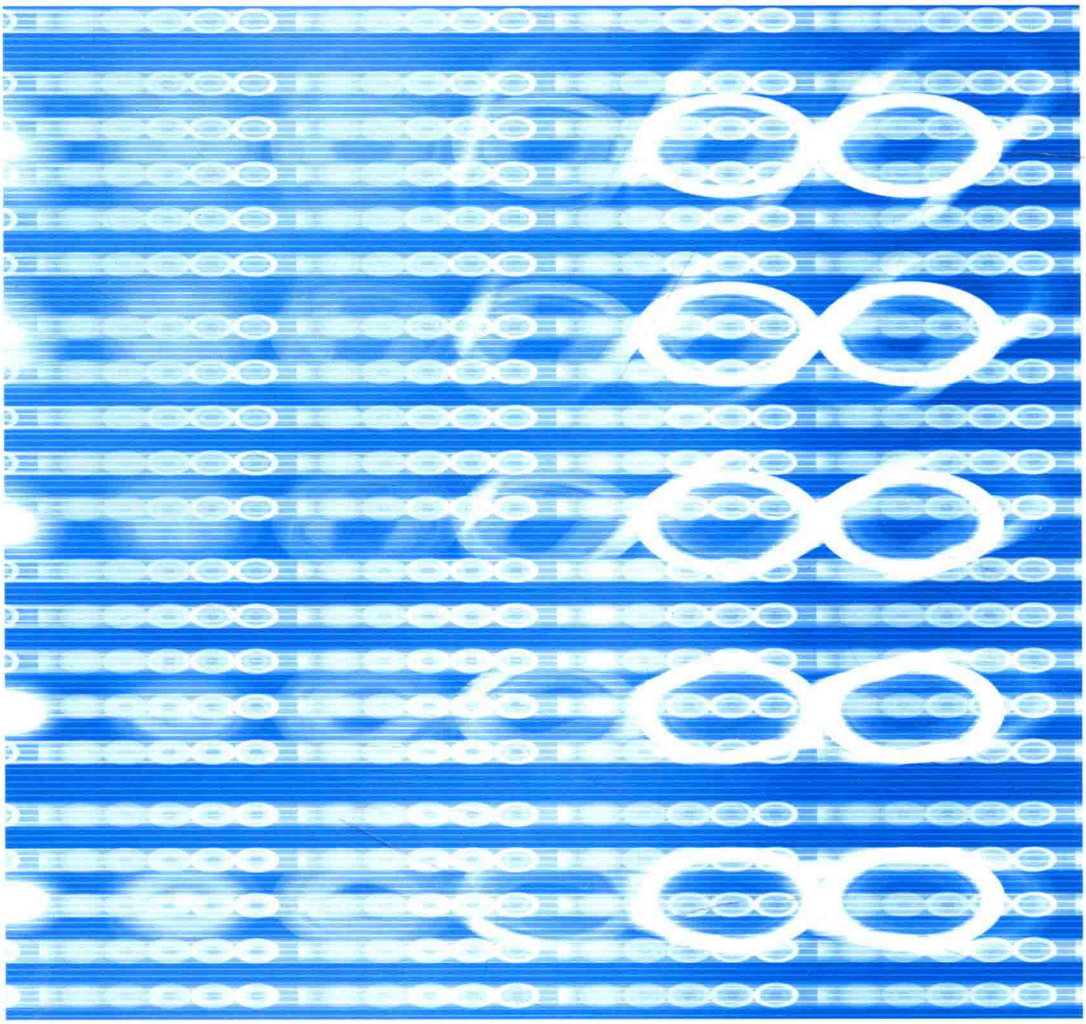
- 跳出题海战术，掌握万变不离其宗的数学思维方法
- 甩掉“不会做”包袱，真正打开创新、多样的解题思路

高考数学高效解题法

思路从0到N的飞跃

窦志民　编著



化学工业出版社

高考数学高效解题法

思路从0到N的飞跃

窦志民　编著

化学工业出版社

·北京·

《高考数学高效解题法：思路从0到N的飞跃》是一本特别针对高考而编的实用应考辅导书，能使考生在极短的时间内完整掌握高考数学的解题思路，从而又快又稳地拿到相应分数，大幅度提高解题速度和质量。

在对具体考题的思路梳理中，作者分几个方面加以详尽解答，使得学生能够很清晰地把握一类考题的解法和思路。本书收录的题目均为历年高考中的精华题和经典题型，并附有至少两种解法，意在帮助考生梳理富有逻辑的解题思路，并在解法的对比中，将完整的数学解题思维方法贯穿其中，使考生在学会某一道题目的解法后，可以对一类题和整个知识点触类旁通。

本书内容丰富实用、讲解清晰明了，是广大高考生必备的实用指南。

图书在版编目（CIP）数据

高考数学高效解题法：思路从0到N的飞跃/窦志民编著.—北京：化学工业出版社，2015.11

ISBN 978-7-122-25431-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①窦… Ⅲ.①中学数学课—高中—题解—升学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第250129号

责任编辑：张素芳　　责任校对：陈　静　　装帧设计：关　飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　装：北京画中画印刷有限公司
710mm×1000mm　1/16　印张17　字数435千字　2016年1月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：35.00元

如何培养数学思维

数学解题的过程，是在理解题意的基础上，由题设而推证。通常的课堂教学中，老师在讲解例题之前，总是提示学生注意题目中的某字或某词，或者某一个特定的条件，目的是使学生对题目做出更准确、深入的理解，从而产生清晰的思路。

学生读完题目后，除了少部分能力较强的学生可以立刻下笔之外，绝大多数学生都会有一个“停滞”的过程。在这个过程中，每个学生的反应是不同的，也许他正在积极思考解题切入点，或者构思解题策略；也许他一筹莫展，还没有理解题意；也许他还在从文字里找隐藏条件……对于后几种情况来说，学生本人并不知道自己被困在哪一步，更为普遍的反应则是——“不会做”。

不会做的原因很简单，学生无法实现用题目中的条件得到需要的解证结果这个过程。不能否认的是，有一部分学生因为语文水平的问题，无法通过找主语、浓缩句子结构等方法，快速精练出题目中的关键点，导致“读不懂”题目，但是这样的现象是少数，一般来说，学生表达“不会做”的意思，是不能把学过的知识和题目中的已知条件相联系。

怎么才能将已经学到的知识灵活用于解题？这就是“解题思维过程”。

在数学中，形象思维与逻辑思维不是互相独立的，而是密不可分的，反映在解题方法上，我们最常鼓励学生使用“数形结合法”，因为它既快捷又直观。而熟练的解题方法来源于对知识点的熟练掌握，学生只要对数学概念有较深的理解，就会自然地将其融入解题方法、用于思维过程里。一味地单独强调“培养思维”而忽视对基本概念的深入理解，是不可能凭空在学生脑内构造出真正的思维模式的，也不可能培养出真正的数学思维能力。

无论是学生还是家长，甚至有部分老师，都只看重学生的解题能力，这是典型的急功近利的做法。我们必须承认，靠海量的题组训练，也是可以提高学生的数学成绩的，原理近似于穷举法，当你见到了世界上所有的数学题之后，也就不会惧怕高考卷上的题目。但是，题目是一直在变化的，很多靠“题海战术”在模拟考试中取得高分的学生，拿到一道做过的、将条件和结论置换一下的题目时，又会感到迷茫了——他可能认为这是一道全新的题目，当出题人再

修改一下条件参数后，他又觉得这是一道新题目，因此而陷入题海之中，只觉得所有题目都没有相似性，怎么做都无穷无尽，所谓高三之“苦”，也就是源自这里。想要跳出题海，脱离苦海，必须掌握正确的解题思维方法，同时加深对数学基本概念的理解。

在编写本书时，编者希望给学生提供一种培养数学思维的方法，因此，在例题的解答部分之前，都有“分析与思考”。“分析”指的是理解题意，“思考”则是在解答这道题目的思维过程。仔细研读这个部分，深入思考其中的逻辑关系，逐渐形成较强的思维能力，以此为基础，才可以构建出完整的数学思维。一旦掌握了数学思维，学生可以不再用题海战术折磨自己，编者本意，亦是希望借此书让更多考生受益。

在基础数学思维之外，我们还需要谈一谈“创新思维”。

创新思维如何培养？这个问题长期有专家学者论述、探讨，并引入课堂教学和课后练习。近些年，学生会发现，考卷和平时的练习题目中都频繁出现“探索性”或者“开放性”题目，并要求分析与思考或者完整解答，实际上，这些练习就是“创新思维”的范畴。单就题目而言，一般来说，常规方法往往不能用于解答此类题目，于是，它要求学生必须有新的“想法”，但不要求这个“想法”一定能够成功，而是鼓励学生拓展多种思路。这种能力并不是每一个学生都可以轻易拥有的，同时，培养创新能力也并非一朝一夕之事，但是，现在的教学环境和考卷，都要求学生具备一定程度的创新能力，即当传统办法无法解答题目的时候，你是否有能力找到新的办法。

因此，本书的每一个例题都给出了不止一种解答方法，每种不同的解法都有不同的思考方式和切入点。学生可以通过这些不同的解法，拓宽原有的思路，更大胆、广泛地尝试多种方法结合的解题技巧，逐渐培养出创新思维。

数学思维的用处，从微观角度来说，是以正确的思维方式构建正确的解证题目的方法，保证题目可以顺利完成；而从宏观角度来说，这是数学作为一门基础学科可以给予学生终身使用的、非常有益的能力。

编　者

目录

第一章

集合简易逻辑

例1 设全集 $U=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|x^2-4x+3\leqslant 0\}$,集合 $B=\{x|x^2-(a+1)x+a<0\}$.若 $B\subseteq A$,则实数 a 的取值范围是________.

【分析与思考】

集合 A 中的元素是由不等式 $x^2-4x+3\leqslant 0$ 确定的.先解此不等式,求得集合 A,再考虑集合 B.

易得不等式 $x^2-4x+3\leqslant 0$ 的解为 $1\leqslant x\leqslant 3$,而不等式 $x^2-(a+1)x+a<0$ 对应的方程 $x^2-(a+1)x+a=0$ 的两根分别为 1 和 a,需讨论 $a<1$,$a=1$,$a>1$,三种情况.从而确定集合 B,就可以求出实数 a 的范围.

解法一

解不等式 $x^2-4x+3\leqslant 0$ 得集合 $A=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$,又方程 $x^2-(a+1)x+a=0$ 的解为 $x=1$ 或 $x=a$.

当 $a<1$ 时,$B=\{x|a<x<1\}$,不满足 $B\subseteq A$;

当 $a=1$ 时,$B=\Phi$,满足 $B\subseteq A$;

当 $a>1$ 时,$B=\{x|1<x<a\}$,此时 $1<a\leqslant 3$,满足 $B\subseteq A$.

综上所述,$1\leqslant a\leqslant 3$.

解法二

解不等式 $x^2-4x+3\leqslant 0$ 得集合 $A=[1,3]$,由 $x^2-(a+1)x+a<0$ 可知集合 B 的区间为 (x_1,x_2),此时 $x_1<x_2$.依题意有 $(x_1,x_2)\subseteq[1,3]$,而方程 $x^2-(a+1)x+a<0$ 的两根为 1 和 a,故必有 $B=(1,a)$,则 $1\leqslant a\leqslant 3$.(在数轴上画出区间 A,再由 a 的三种情况画出区间 B 可以明显看出结果.)

点评

解法一用到了分类讨论,有的同学不知道在什么情况下需要分类讨论,如何分类.就此题而言,A、B 都是区间,A 可以写为 $[1,3]$,而 B 是写成 $(a,1)$ 还是写成 $(1,a)$,要比较 a 与 1 的大小才能确定,这就得分三种情况考虑 a,这就是分类讨

论. 由$a\in R$,故 a 可能比 1 大,也可能比 1 小,或者等于 1. 只有这三种情况,这就是如何分类.

解法二实际上是数形结合法,解出不等式,画出集合 A 的区间,集合 B 在数轴上有两个位置(空集除外)一看便知.

例 2 已知集合 $M=\{(x,y)\mid y-1=k(x-1),x,y\in \mathbf{R}\}$,集合 $N=\{(x,y)\mid x^2+y^2-2y=0,x,y\in \mathbf{R}\}$,那么 $M\cap N$ 中(　　).

A. 不可能有两个元素　　　　B. 最多有一个元素

C. 不可能只有一个元素　　　D. 必含有无数个元素

【分析与思考】

由于集合的元素是一组有序数对,其交集的元素是方程组$\begin{cases}y-1=k(x-1)\\x^2+y^2-2y=0\end{cases}$的解,只需考察该方程组解的个数.

将直线方程代入圆的方程,得到一个关于 x 的一元二次方程,由其判别式的情况可知方程的根的个数,从而 $M\cap N$ 中元素的个数可定. 当然,也可以利用数形结合法,这种方法更简捷.

解法一

由$\begin{cases}y-1=k(x-1)\\x^2+y^2-2y=0\end{cases}$得$(1+k^2)x^2-2k^2x+(k^2-1)=0(1)$

由于 $1+k^2\neq 0$,且$\triangle=(-2k^2)^2-4(1+k^2)(k^2-1)=4>0$ 可知,方程(1)有两个不同实根,从而 $M\cap N$ 中必有两个元素. 故选 C.

解法二

集合 M 是过点(1,1)的一条直线,集合 N 是圆心为(0,1),半径为 1 的圆,如图1-1所示,因为直线的斜率存在,故直线与圆必有两个交点. 故选 C.

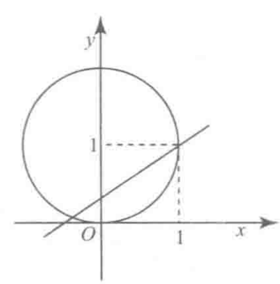


图 1-1

点评

解法一是代数法,直接从描述集合元素的方程入手,解方程组,考察方程解的个数. 解法二是数形结合法,由两个集合所对应的图形直接观察出交点的个数,即 $M\cap N$ 中元素个数. 对于本题来说,宜用数形结合法.

例 3 设 A、B 是两个集合,下列四个命题

① $A\not\subseteq B\Leftrightarrow$对任意的 $x\in A$,有 $x\in B$;

② $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$;

③ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$;

④ $A\not\subseteq B\Leftrightarrow\exists x\in A,\exists x\notin B$.

其中真命题的序号是________(把所有符合要求的命题的序号都写上.)

【分析与思考】

四个命题都有 $A\not\subseteq B$，这就是解本题应首先思考的问题. 而 $A\not\subseteq B$ 是 $A\subseteq B$ 的否定，可考虑 $B\subseteq A$ 是符合题意的.

$A\not\subseteq B$ 等价于集合 A 中至少有一个元素不属于 B，显然命题①不正确；对于命题②，若 $A\neq\varnothing$，$B=\varnothing$，则 $A\cap B=\varnothing$，但若 $A=B=\varnothing$，则不能推出 $A\not\subseteq B$；对于命题③，$A\not\subseteq B$ 可有 $B\subseteq A$. 故只有命题④正确.

解法一

对于四个命题，分别画出以下 Venn 图，如图 1－2 所示.

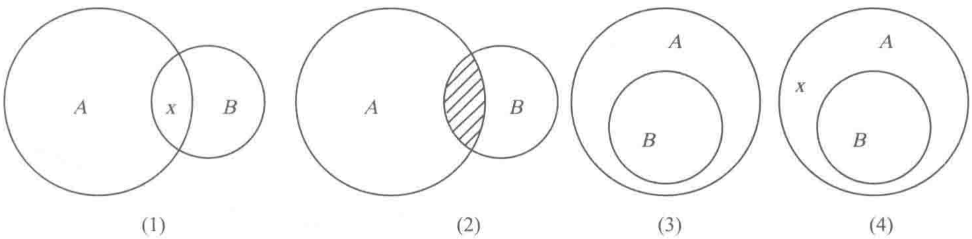


图 1－2

由图(1)知命题①不正确；由图(2)知命题②不正确；由图(3)知命题③不正确；由图(4)知命题④是正确的.

解法二

只需画出图(4)，若 $x\in A\cap B=B$，则命题①不正确；命题②也不正确；命题③也显然不正确；故命题④正确. 填④.

点评

画出符合题意的 Venn 图，对解集合的题目而言是很重要的. 图(4)可用于四个命题，也就是说，图画对了，会给解题带来很大方便.

例 4 已知集合 $A=\{x\mid |x^2-2x|\leqslant x\}$，$B=\{x\mid |\frac{x}{1-x}|=\frac{x}{1-x}\}$，$C=\{x\mid ax^2-x+b>0\}$，且 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$，求 a、b 的值.

【分析与思考】

由于集合 A、B 是由不等式的形式描述的，故应先解不等式，确定集合 A、B，就可求得 $A\cup B$. 根据 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，$(A\cup B)\cup C=\mathbf{R}$ 便可求不等式 $ax^2-x+b>0$ 的解，再由根与系数的关系即可求出 a、b.

解法一

由 $|x^2-2x|\leqslant x$ 得 $-x\leqslant x^2-2x\leqslant x$，

即 $\begin{cases}x^2-3x\leqslant 0\\ x^2-x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\ x\leqslant 0\text{ 或 }x\geqslant 1\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant x\leqslant 3$ 或 $x=0$　　①

由 $|\frac{x}{1-x}|=\frac{x}{1-x}$ 知 $\frac{x}{1-x}\geqslant 0$. 解得 $0\leqslant x<1$.　　②

由①②得 $A \cup B=\{x|0 \leqslant x \leqslant 3\}$.

$\because (A \cup B) \cap C=\varnothing,(A \cup B) \cup C=\boldsymbol{R}$,

$\therefore C=\{x|x<0$ 或 $x>3\}$.

故 $x=0$ 和 $x=3$ 是方程 $ax^2-x+b=0$ 的两个根,由根与系数的关系易得 $a=\frac{1}{3}$,$b=0$

解法二

集合 A 所对应的图象如图 1－3 所示.

$\therefore A=\{x|1 \leqslant x \leqslant 3$ 或 $x=0\}$.

由 $\left|\frac{x}{1-x}\right|=\frac{x}{1-x}$ 知 $\frac{x}{1-x} \geqslant 0$,

解得 $B=\{x|0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

$\therefore (A \cup B)=\{x|0 \leqslant x \leqslant 3\}$.

由 $(A \cup B) \cap C=\varnothing,(A \cup B) \cup C=\boldsymbol{R}$ 可得

$C=\{x|x<0$ 或 $x>3\}$.

又 $C=\{x|ax^2-x+b>0\}$,

$\therefore x=0, x=3$ 是方程 $ax^2-x+b=0$ 的两个根.

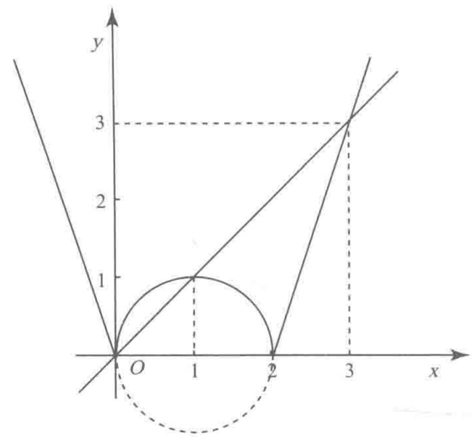


图 1－3

由根与系数的关系易求得 $a=\frac{1}{3}$,$b=0$.

点评

代数法解 $|x^2-2x| \leqslant x$ 较繁,而数形结合较简捷. 但若对函数的图象掌握不好,或画图不够准确,则难以快速得出集合 A,还可能做错. 对于绝对值概念理解不深的同学,求集合 B 时,将等式 $\left|\frac{x}{1-x}\right|=\frac{x}{1-x}$ 转化为 $\frac{x}{1-x} \geqslant 0$,可能有点困难. 对于这部分同学,在今后的解题时,应注意此类题型的练习.

例 5 已知集合 $A=\{(x, y)|x^2+mx-y+2=0\}$ 和 $B=\{(x, y)|x-y+1=0,0 \leqslant x \leqslant 2\}$,如果 $A \cap B \neq \varnothing$,求实数 m 的取值范围.

【分析与思考】

由 $A \cap B \neq \varnothing$ 可知方程组 $\begin{cases}x-y+1=0 \\ x^2+mx-y+2=0\end{cases}$ 有解. 又由代入消元法得 $x^2+(m-1)x+1=0$. 即该方程必有实数根,得 $\triangle \geqslant 0$,而 $0 \leqslant x \leqslant 2$,故该方程至少有一根在区间 $[0,2]$ 内,有两种情况:仅有一根在 $[0,2]$ 内,或两根都在 $[0,2]$ 内,分别求出 m 的取值范围即可.

解法一

由 $\begin{cases}x-y+1=0(0 \leqslant x \leqslant 2) \\ x^2+mx-y+2=0\end{cases}$ 得 $x^2+(m-1)x+1=0$. ①

$\because A\cap B\neq\varnothing$,

$\therefore$ 方程①至少有一个根在区间$[0,2]$内.

由$\triangle=(m-1)^2-4\geqslant 0$得$m\leqslant -1$或$m\geqslant 3$.

当$m\leqslant -1$时,由$x_1+x_2=-(m-1)\geqslant 2$,$x_1x_2=1$知,方程①的两根互为倒数,且均为正,故必有一根在$[0,1]$内,从而在区间$[0,2]$内至少有一根.

当$m\geqslant 3$时,$x_1+x_2=-(m-1)\leqslant -2$,$x_1x_2=1$,方程①有两个互为倒数的负数根,不合题意.

综上知,$m\in(-\infty,-1)$

解法二

由$\begin{cases}x-y+1=0(0\leqslant x\leqslant 2)\\ x^2+mx-y+2=0\end{cases}$得$x^2+(m-1)x+1=0$ ①

$\because A\cap B\neq\varnothing$

$\therefore$ 方程①至少有一个根在区间$[0,2]$内.

由$\triangle=(m-1)^2-4\geqslant 0$得$m\leqslant -1$或$m\geqslant 2$. ②

若仅有一根在$[0,2]$内,设$f(x)=x^2+(m-1)x+1$,则有$f(0)\cdot f(2)\leqslant 0$,即$4+2(m-1)+1\leqslant 0$,解得

$m\leqslant -\dfrac{3}{2}$. ③

若两根都在区间$[0,2]$内,则有

$$\begin{cases}f(2)\geqslant 0\\ f(0)\geqslant 0\Longrightarrow -\dfrac{3}{2}\leqslant m<1\\ 0<\dfrac{1-m}{2}<2\end{cases}$$ ④

由②、③、④得$m\leqslant -1$.

点评

以上两种解法都得进行分类讨论,解法一是按m的取值分类,由根与系数的关系得知两根的关系,判断两根的分布,进而可知m应在什么区间取值.解法二运用了函数思想,一元二次方程,二次函数,一元二次不等式分属三个不同的概念,但又有极为密切的关系,解高考题时,综合考虑且灵活使用这三个不同概念,会开阔思路,使问题变得简单.

例6 设集合$A=\{(x,y)\mid y=a|x|\}$,$B=\{(x,y)\mid y=x+a\}$,若$A\cap B$中含有两个元素,求实数a的取值范围.

【分析与思考】

求$A\cap B$即求方程组$\begin{cases}y=a|x|\\ y=x+a\end{cases}$的解,也就是说方程$a|x|=a+x$有两个解,以下解

决当 a 取什么值时,此方程有两个解的问题.

无论是方程或者函数,当遇到 $|x|$ 时,一般应考虑 $x\geqslant 0$ 或 $x<0$ 两种情况,两种情况分别有两个不同的方程,求得正、负两个根就可以得到 a 的取值范围.

解法一

由 $\begin{cases} y=a|x| \\ y=x+a \end{cases}$ 得 $a|x|=x+a$

1°当 $x\geqslant 0$ 时,方程为 $ax=x+a$,有唯一解 $x=\dfrac{a}{a-1}$. 即 $\dfrac{a}{1-a}\geqslant 0$,解得 $a\leqslant 0$ 或 $a>1$;

2°当 $x<0$ 时,方程为 $-ax=x+a$,有唯一解 $x=-\dfrac{a}{a-1}<0$. 故 $a<-1$ 或 $a>0$;

由于 $A\cap B$ 中有两个元素,故 1°、2°两种情况同时成立,从而 $a<-1$ 或 $a>1$,即 $a\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

解法二

集合 A、B 均为点集,$A\cap B$ 中的元素就是函数 $y=a|x|$ 与函数 $y=x+a$ 的图象的交点,如图 1-4 所示. 当 $|a|>1$ 时,两个图象有两个交点;当 $|a|\leqslant 1$ 时,两个图象只有一个交点,故 $|a|>1$.

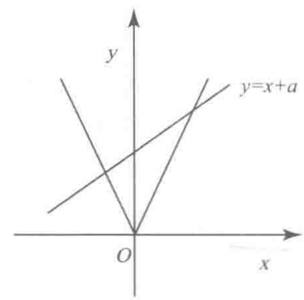


图 1-4

点评

解方程 $a|x|=x+a$ 时,可以两边平方,得到关于 x 的一元二次方程,再用求根公式化简可得到同样的结果,但并没有解法一简单. 假如两边平方,得 $(a^2-1)x^2-2ax-a^2=0$,此方程应有两个根,故 $a^2-1\neq 0$ 且 $\Delta>0$,就可以得到 $|a|>1$ 了,已没必要再求出两根了.

解法一中要注意,第 1 种情况的前提是 $x\geqslant 0$,所以求出的解 $x=\dfrac{a}{a-1}$ 必须大于或等于零. 第 2 种情况亦然.

解法二是数形结合,画图时不妨取 $a=2$. 若取 a 值接近于 1,由于 $y=x+a$ 的斜率为 1,故直线 $y=x+a$ 与射线 $y=ax(x\geqslant 0)$ 在有限的书写范围内看不到交点,会影响解题.

例 7 设集合 $A=\{(x,y)\,|\,y^2-x-1=0\}$,$B=\{(x,y)\,|\,4x^2+2x-2y+5=0\}$,$C=\{(x,y)\,|\,y=kx+b\}$,求满足 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$ 的正整数 k、b.

【分析与思考】

正确理解题意是很关键的. $(A\cup B)\cap C=\varnothing$ 就是说 $A\cap C=\varnothing$,$B\cap C=\varnothing$,即直线与两曲线都无公共点,实际上是方程组 $\begin{cases} y=kx+b \\ y^2=x+1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} y=kx+b \\ y=\dfrac{1}{2}(4x^2+2x+5) \end{cases}$ 都无解.

由这两个方程组易得$(kx+b)^2-x-1=0$和$4x^2+2x-2(kx+b)+5=0$，则这两个方程的判别式应都小于零. 这种思路看起来没什么问题，但继续做下去就难了. 注意到A、B两个集合是两条抛物线，都与y轴相交. 可先确定两抛物线分别在y轴上的截距，则b的取值或取值范围便可确定，进而可确定k的范围.

解法一

由A，令$y^2-x-1=0$中的$x=0$，得$y=\pm1$，即抛物线$y^2=x+1$与y轴交于点$(0,-1)$与$(0,1)$.

由B，令$4x^2+2x-2y+5=0$中的$x=0$. 得$y=\frac{5}{2}$，即抛物线$y=2x^2+x+\frac{5}{2}$交y轴于点$(0,\frac{5}{2})$.

$\because$ 直线$y=kx+b$与这两条抛物线都不相交，且k、$b\in\boldsymbol{N}_+$

$\therefore b=2$

此时集合C是直线$y=kx+2$上的所有点，

由$\begin{cases}y=kx+2\\y^2-x-1=0\end{cases}$得$k^2x^2+(4k-1)x+3=0$

令$\triangle=(4k-1)^2-4\times3k^2<0$即$4k^2-8k+1<0$

解得$\frac{2-\sqrt{3}}{2}<k<\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

$\because k\in\boldsymbol{N}_+$，

$\therefore k=1.$ ①

由$\begin{cases}y=kx+2\\4x^2+2x-2y-5=0\end{cases}$得$4x^2+(2-2k)x+1=0$

令$\triangle=(2-2k)^2-16<0$得$k^2-2k-3<0$

解得$-1<k<3$

$\because k\in\boldsymbol{N}_+$，

$\therefore k=1$或$k=2$ ②

由①、②知$k=1$.

故满足$(A\cup B)\cap C=\varnothing$的$k=1,b=2$.

解法二

由题设知，直线$y=kx+b$与两抛物线$y^2-x-1=0$与$4x^2+2x-2y+5=0$都不相交. 这两抛物线的开口分别向右和向上，令两曲线方程中的$x=0$，得知它们与y轴的交点$(0,-1)$，$(0,1)$和$(0,\frac{5}{2})$，如图1－5所示，由于$b\in\boldsymbol{N}_+$，故必有$b=2$.

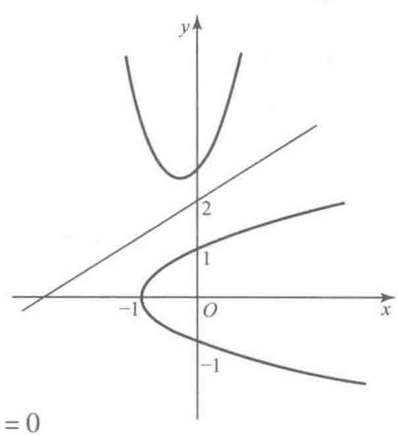


图1－5

又$k\in\boldsymbol{N}_+$，若$k=2$，则直线$y=kx+2$与抛物线$y^2=x+1$有公共点$(-1,0)$，不合题意，故只有$k=1$.

$\therefore$ 满足 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$ 的 $k=1,b=2$.

点评

在正确理解题意的情况下，不少同学都会用解法一求解，但解法一较繁、费时．解法二简捷、直观，考试时建议用解法二.

无论哪种解法，先求出两曲线在 y 轴上的截距都是很重要的，否则不能确定 b，从而难以继续做下去.

解法一中，两个判别式小于零是同时成立的，故求①与②的“交”，解法二中，画图时注意抛物线的开口大小.

例 8 设集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$，S_1、S_2、S_3、$\cdots$、S_k 都是 M 的含两个元素的子集，且满足：对任意的 $S_i=\{a_i,b_i\}$，$S_j=\{a_j,b_j\}$ $(i\neq j,i,j\in\{1,2,3,\cdots,k\})$，都有 $\min\{\frac{b_i}{a_i},\frac{a_i}{b_i}\}\neq\min\{\frac{b_j}{a_j},\frac{a_j}{b_j}\}$．[$\min(x,y)$ 表示两个数 x、y 中的较小者]，则 k 的最大值是（　　）.

A. 10　　　　B. 11　　　　C. 12　　　　D. 13

【分析与思考】

有 6 个元素的集合，含有两个元素的子集共有 $C_6^2=15$ 个，而四个选项均小于 15，由此可想必有重复元素.

对任意的 $i\in\{1,2,3,\cdots,k\}$，$\min\{\frac{b_i}{a_i},\frac{a_i}{b_i}\}$ 都是一个真分数，显然，$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{4}$、$\frac{3}{6}$ 的值是相同的，若把这 15 个子集都写出来，则答案就十分清楚.

解法一

M 的含有两个元素的子集分别是 $\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{1,5\}$，$\{1,6\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{2,5\}$，$\{2,6\}$，$\{3,4\}$，$\{3,5\}$，$\{3,6\}$，$\{4,5\}$，$\{4,6\}$，$\{5,6\}$，每一子集中的两个元素分别作为分数的分子（分母）和分母（分子），可以得到两个互为倒数的分数，不妨设 $S_2=\{1,3\}$，其中 $a_2=1,b_2=3$，则 $\frac{b_2}{a_2}=3,\frac{a_2}{b_2}=\frac{1}{3}$．设 $S_9=\{2,6\}$，其中 $a_9=2,b_9=6$，则 $\frac{b_9}{a_9}=3,\frac{a_9}{b_9}=\frac{1}{3}$．故 S_2 与 S_9 只能算作一个子集合．同样 $\{1,2\}$，$\{2,4\}$，$\{3,6\}$ 只能算作一个子集合，$\{2,3\}$，$\{4,6\}$ 算一个子集合，于是只有 11 个，故选 B.

解法二

M 的含有两个元素的子集共有 $C_6^2=15$ 个，其中满足任意两个作商相等的有 $\{1,2\}$，$\{2,4\}$，$\{3,6\}$，其较小值都是 $\frac{1}{2}$．还有 $\{1,3\}$，$\{2,6\}$ 和 $\{2,3\}$，$\{4,6\}$ 两组，其较小值都相等，故满足题意的 k 的最大值为：$15-2-1-1=11$．故选 B.

点评

在考察对象数量不大的情况下，可用列举法一一写出来，看起来清楚，便于解题.

本题对 $\min\{\frac{b_i}{a_i},\frac{a_i}{b_i}\}$ 的理解要正确，k 是个什么数要清楚，否则做起来就无头绪了. 我们要找的是真分数的个数最多是多少，这是问题的实质.

例 9 若非空集合 $M \subsetneqq N$，则“$a \in M$ 或 $a \in N$”是“$a \in M \cap N$”的(　　).

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分也非必要条件

【分析与思考】

前提条件是 $M \subsetneqq N$，“$a \in M$ 或 $a \in N$”，则 $a \in M \cup N$. 若 $a \in M \cup N$，则必有 $a \in N$，不一定有 $a \in M$，若 $a \in M \cap N$，就必有 $a \in M$，从而必有“$a \in M$ 或 $a \in N$”.

解法一

$\because M \subsetneqq N$.

$\therefore M \cap N = M$.

若 $a \in M$ 或 $a \in N$，则一定有 $a \in N$，但不一定有 $a \in M$，即 $a \in M$ 或 $a \in N \nRightarrow a \in M \cap N$，排除 A、C 选项.

若 $a \in M \cap N$，则必有 $a \in M$，从而 $a \in M$ 或 $a \in N$ 也就一定成立. 即由 $a \in M \cap N \Rightarrow a \in M$ 或 $a \in N$. 故选 B.

解法二

$\because M \subsetneqq N$

$\therefore M \cap N = M$，如图 1－6 所示.

$a \in M$ 必有 $a \in M \cap N$.

但 $a \in N \nRightarrow a \in M$，即 $\nRightarrow a \in M \cap N$. 选 B.

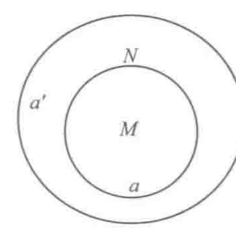


图 1－6

点评

抓住 M 是 N 的真子集，画出符合题意的 Venn 图，是正确解本题的关键. 由图可以明显看出，$a \in M$ 必有 $a \in M \cap N$，但 $a' \in N \nRightarrow a' \in M \cap N$

例 10 函数 $y = x^2 + bx + c, x \in [0, +\infty]$ 是单调函数的充要条件是(　　).

A. $b \leqslant 0$　　B. $b \geqslant 0$　　C. $b > 0$　　D. $b < 0$

【分析与思考】

求充要条件，即由函数是单调的，推出 b 的取值范围，再看 b 取什么值时可使函数是单调的. 本题可由单调函数的定义求之，也可以由选项考虑.

解法一

设 $0 \leqslant x_1 < x_2$，则 $x_2 - x_1 > 0, x_1 + x_2 > 0$.

$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 + bx_2 + c - (x_1^2 + bx_1 + c)$

$=x_2{}^2-x_1{}^2+b(x_2-x_1)$

$=(x_2-x_1)(x_2+x_1+b)$

$\because y=f(x)=x^2+bx+c$,其图象是开口向上的抛物线,

$\therefore f(x)$在区间$[0,+\infty]$单调,必然$f(x)$单调递增,故有$f(x_2)-f(x_1)>0$.

$\because x_2-x_1>0$,

$\therefore x_2+x_1+b\geqslant 0$,即$b\geqslant -(x_2+x_1)$.

$\because 0\leqslant x_1<x_2$,

$\therefore -(x_2+x_1)<0$.

故$b\geqslant 0$.

又当$b\geqslant 0$时,由于$x_2-x_1>0$,$x_2+x_1>0$

$\because (x_2-x_1)(x_2+x_1+b)\geqslant 0$,即$f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0$成立.

$\therefore b\geqslant 0$是$y=x^2+bx+c$在区间$[0,+\infty]$上单调的充要条件,故选B.

解法二

$y=x^2+bx+c=(x+\frac{b}{2})^2+c-\frac{b^2}{4}$,其对称轴为$x=-\frac{b}{2}$,如图1-7所示.当$b\geqslant 0$时,该函数在区间$[0,+\infty)$上单调递增;反之,当函数在区间$[0,+\infty)$上单调递增时,其对称轴$x=-\frac{b}{2}\leqslant 0$.即$b\geqslant 0$.故选B.

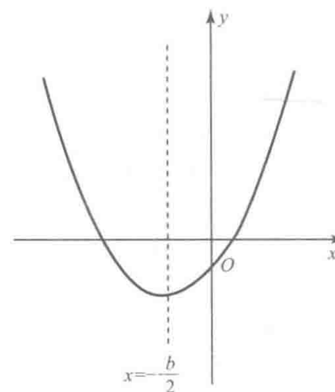


图1-7

点评

关于判断函数单调性的问题,一般可考虑单调函数的定义.对于非基本初等函数,可考虑求导.本题是二次函数,数形结合要比定义法简捷得多.画图时,注意将对称轴画在y轴左侧,与抛物线顶点无关.

例11 若条件$p:|x+1|<4$,条件$q:x^2<5x-6$,则$\neg p$是$\neg q$的( ).

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

【分析与思考】

$\neg p$与$\neg q$即$|x+1|\geqslant 4$和$x^2\geqslant 5x-6$,可直接解这两个不等式.实事上,求$|x+1|<4$与$x^2<5x-6$的解集的补集也是一样的.

解法一

由$|x+1|\geqslant 4$得$x\leqslant -5$或$x\geqslant 3$.即$\neg p:x\leqslant -5$或$x\geqslant 3$.

由$x2\geqslant 5x-6$得$x\leqslant 2$或$x\geqslant 3$.即$\neg q:x\leqslant 2$或$x\geqslant 3$.

$\therefore \neg q\nRightarrow \neg p$,但$\neg p\Rightarrow \neg q$.故选A.

解法二

$p: |x+1|<4$ 即 $p: -5<x<3$.

$q: x^2<5x-6$ 即 $q: 2<x<3$

$\therefore q \Rightarrow p$ 等价于 $\neg p \Rightarrow \neg q$，故选 A.

点评

这道题属于简单题，只要能解对不等式，就很容易得出正确选项. 要注意，有些时候，利用逆否命题与原命题等价会使问题转化得较为简单.

例 12 设有两个命题，p：函数 $f(x)=x^2+2ax+4$ 的图象与 x 轴没有交点，q：不等式 $|x+1|+|1-x|>a$ 恒成立，若"p 或 q"为真，"p 且 q"为假，则实数 a 的取值范围是________.

【分析与思考】

题中出现"p 或 q"为真，"p 且 q"为假，就应求出 $\neg p$ 和 $\neg q$. 其实，求出 p 和 q 后，自然就有 $\neg p$ 和 $\neg q$ 了. 命题 p 即 $\triangle<0$，命题 q 要分区间讨论. 可设 $y(x)=|x+1|+|1-x|$，化为分段函数后再求 a.

解法一

$f(x)=x^2+2ax+4$ 的图象与 x 轴无交点，则 $\triangle=4a^2-16<0$. 故 $p: -2<a<2$，$\neg p: a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 2$.

设 $g(x)=|x+1|+|1+x|$，

则 $g(x)=\begin{cases}-2x & (x<-1)\\ 2 & (-1\leqslant x<1)\\ 2x & (x\geqslant 1)\end{cases}$ 的最小值为 2.

由 $g(x)>a$ 恒成立，得 $a<2$，即 $q: a<2$，$\neg q: a\geqslant 2$.

"p 或 q"为真：p 真 q 真，或 p 真 q 假，或 p 假 q 真. 易知，$a<2$.

"p 且 q"为假：p 假 q 假. 易知，$a\geqslant 2$.

故使"p 或 q"为真，"p 且 q"为假的实数 a 不存在，应填 $\varnothing$.

解法二

如解法一可得 $p: -2<a<2$，$\neg p: a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 2$.

令 $g(x)=|x+1|+|1-x|$，其几何意义即 X 轴上的动点到两定点 $(0,-1)$ 和 $(1,0)$ 的距离之和，显然其最小值为 2. 使 $g(x)\geqslant 2$ 恒成立，则 $a<2$，故 $q: a<2$，$\neg q: a\geqslant 2$.

"p 或 q"为真等价于"$\neg p$ 且 $\neg q$"为假，当 $\neg p$ 且 $\neg q$ 为真时，$a\geqslant 2$，故"$\neg p$ 且 $\neg q$"为假时，$a<2$.

"p 且 q"为假等价于"$\neg p$ 或 $\neg q$"为真，此时 $a\geqslant 2$.

故同时满足"p 或 q"为真，"p 且 q"为假的 a 不存在，应填 $\varnothing$.

点评

求 p 时，由 $\triangle<0$ 可得. 求 q 时，可化为分段函数，也可以由绝对值的几何意义求得，后者不是每个同学都能想到的. 如果改为 $h(x)=|x+1|-|x-1|$，这个