刘弘泉

解析数论研究

哈爾濱工業大學出版社

HITP

解析数论研究

刘弘泉　著

哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书中作者采用正确的方法，解决了大整数表为两个平方与一个素数之和这个著名猜想，给出能表为两平方和的整数的分布渐近公式这一经典问题的带有 O 型余项的结果，并对相邻素数差问题、奇数 Goldbach 猜想、三维除数问题等著名问题进行重新处理(以前一些处理有问题)，给出适当的结果。本书适合从事解析数论研究的专家学者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

解析数论研究/刘弘泉著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.8
ISBN 978-7-5603-5529-0

Ⅰ.①解… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①解析数论-研究 Ⅳ.①O156.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 174076 号

责任编辑　蒋东翔
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 12.25　字数 117 千字
版　　次　2015 年 8 月第 1 版　2015 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5529-0
定　　价　48.00 元

目　　录

Fermat 大定理研究中代数理论存在的问题（代　序）

（一）早期分圆域工作中存在的问题

在 L. C. Washington 的名著［W］p. 48 上谈到可将 Q_p（p-adic 数域）的赋值拓展到域 $\bar{Q}_p$（Q_p 的代数闭包）上，对此一个问题是 $\bar{Q}_p$ 的存在要由带假设性质的 Zorn 引理导出（见［H］，p. 260，因为要用到全书最前面的 Introduction 部分的 §8 的几个定理，它们的证明都要用“Zorn 引理”）．注意，Zorn 引理中所述的“偏序”实则是不等号的推广，而在数论和分析学中我们知道要获得一个推广的命题通常需要克服一些意想不到的困难．另一方面由于不知道 $\bar{Q}_p$ 是否是 Dedekind 整环，对于它可能不成立标准素理想分解（一个理想未必能分解成有限个素理想之乘积），因此也无法用通常的办法给 $\bar{Q}_p$ 赋值（见［Z］的第四章）．能否利用嵌入映射 $\sigma: Q_p \to \bar{Q}_p$ 来给 $\bar{Q}_p$ 赋值？我不知道由此怎样得到一个满足三角不

等式的赋值(书上没有).如此一来似乎无法给 $\bar{Q}_p$ 适当赋值([ZS1]p.35 谈到的赋值是将 $\bar{Q}_p-\{0\}$ 映射到商群$(\bar{Q}_p-\{0\})/E$ 上的,而不是映射到实数),更谈不上将其完备化而得到空间 C_p(因此,[W] 中 p.48 以及以后的讨论是没有意义的).不仅如此,即使假设 C_p 存在,由[W] 中所论述的早期的分圆域的工作,还因混淆了各种不同的“数”而含有另一种错误,总之是进行一些毫无意义的运算.例如,在[W] 的定理 5.11 的陈述中(p.57),我们看到有表达式 $\chi(a)\langle a\rangle^{1-s}$,对此正如 p.56 最后一行解释的,$\chi(a)$ 应写成 $\rho(\chi(a))$,这里 ρ 为从 $\bar{Q}$ 到 C_p 的映射(这个映射未必存在,即使存在,它不能仅仅是一个平凡的映射),因为 $\chi(\cdot)$ 为一个 Dirichlet 特征(它取值于 $\bar{Q}$,见[W]第三章),而这里 $s\in C_p$,$\langle a\rangle^{1-s}=\exp((1-s)\log_p\langle a\rangle)\in C_p$(见 p.54,但我认为由于 $\langle a\rangle\in Q_p$,$\langle a\rangle$ 应写作 $\omega(\langle a\rangle)$,这里 $\omega:Q_p\to C_p$,因为否则 $\langle a\rangle$ 不能被放到一个含有 s 的无穷级数中;但然后无穷级数的收敛在 p.54 无法适当解释了,因为 $\omega(\langle a\rangle)$ 究竟是什么是不知道的,…);但实际上接下去为推导定理 5.11 的计算无法进行,因为显然 $\rho(\chi(a))\neq\chi(a)$ 而且 $\omega(\langle a\rangle)\neq\langle a\rangle$,例如我们不知道如何处理包含着 $\rho(\chi(a))(\omega(\langle a\rangle))^{1-s}(s\in C_p)$ 的一些项.

(二) 代数几何需要假设许多个代数无关的未定元的存在

一个环或者域 k 上的未定元(indeterminate)是 k 上的超

越元(不满足任何系数属于 k 的代数方程). 对于 $k=Q$(有理数域),通常的超越数就是一个未定元. 若k是含有单位"1"的环,按照[ZS](p. 26) 我们可以将 $X=(0,1,0,\cdots,0,\cdots)$ 作为一个未定元,用来形成多项式环 $k[X]$(但由于不知道 X^{-1} 是什么,无法形成函数域 $k(X)$). 但许多代数几何的工作,需要假设存在很多个代数无关的未定元(例如见[S] 的第二章,[Hr] 的 pp. 1-2,[Fu] 的 pp. 92-93),并且这些未定元要明确地写出来,例如在[Hr] 的 p. 35 上有表达式

$$k[x,y]/(xy), K[[x,y]]/(y^2-x^2-x^3),$$

在[Hr]p. 104 上有表达式 $Z[x_0/x_k,\cdots,x_n/x_k]$,p. 163 上则有 $x_iy_j-x_jy_i$(练习 7. 12. 1). 我们知道,虚单位 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 的引进是复分析的基础,但这本质上与未定元有区别,因为虚单位的含义是明确的,而未定元则只是一些记号(并且随便可以允许有好几个).

(三) 算术代数几何需要假设一些映射的存在

除了上述问题外,在[W]p. 49 上作者还要假设 C_p 和 C(复数域) 之间存在同构关系,但未能证明. 在[K] 第一章的§5作者描述了一种方式,能将$\sqrt{6}$ 嵌入(也即存在一个一一的映射) 到 Q_5 中,但要知道实数里有大量代数数用根式难以表示,而且有不可数个超越数,对此怎么搞类似的整体嵌入? 没有适当的嵌入映射,很明显 C_p 中的数无法跟复数混合运

算，要知道 C_p 中的数应该写成$[(x_1,\cdots,x_n,\cdots)]$ 的形式（美国学者习惯写成 $\sum_n(x_n-x_{n-1})$ 的形式），其中 $x_n\in\bar{Q}_p$（见[K]，或[L] 的p. 36，或[Y] 的p. 56，或[X] 的第四章）. 在[W] 的第五章（pp. 57,60）作者相信 $\bar{Q}$ 能被嵌入到 C_p 中. 即使存在这样的嵌入映射，由于无法构造出来，还是无法实用. 所以按我前面的分析，**实质是将这种映射看成是恒等映射，将 C_p 和 C 中的数混合起来运算，这明显是有问题的**. 事实上在算术代数几何许多工作里都有类似假设，有的假设存在从 $\bar{Q}_p$ 到 C 的一一嵌入映射，见[Dw]（p. 636），[De]（许多地方），[Gr]（pp. 83-84），[M]（p. 565，第三行）. 所谓的 p-adic 分析，有些还要用到 Haar 测度，其存在性已受到我的质疑（见[L9] 的附录三）.

我认为假设这些映射的存在比假设未定元的存在更为离谱，因为当两个集合都已经定义好了的时候，只能是具体构造出一个映射，而不能仅仅是假设存在一个什么映射. 从分圆域理论（[W] 第五章）来看，实际上是假设了“嵌入映射”为恒等映射，然后混淆了由 p-adic 数经取闭包再经完备化得到的数与复数一起运算（有些地方还搞“解析开拓”；大家知道只有复数才有解析开拓），这些内容被传承到了后来出现的所谓“算术代数几何”这门学科中了. 因此，算术代数几何表面上看搞一些群什么的似乎有意义，其实在关键的地方就涉及上述内容. 这样看 P. Deligne 对 Ramanujan 猜想的证明当然就是有理论缺陷的了，张益唐关于相邻素数差的工作就要用到算术代数几何的结果（包括 Weil 关于经典

Kloosterman 和的估计).

(四)Fermat 大定理只对于指数 $n=3$ 和 4(及其整倍数)得到验证

Kummer(1850 年左右)是首先用分圆域和上述 p-adic 方法研究 Fermat 大定理的. 例如为推导关于 Fermat 大定理第一情形的 Wieferich 判别准则(见[R],p. 151),必须用由[R]的第六章(3.7)给出的 Kummer 的同余式([R],pp. 105,124,139),而后者只能由[W]的第五章使用 p-adic 方法导出(p. 61,推论 5.14)([R]没有给出证明). 关于 Fermat 大定理第二情形,p-adic 方法也起着必不可少的作用,见[W]的第九章(用到第五章的结果). 在[W]一些地方还用到代数数域的解析理论,而按照我们这本书后面的的附录三,关于代数数域的 Dedekind zeta 函数的解析理论是建立不起来的. 关于椭圆曲线和模形式的基础理论中存在的问题,参见[L9]后面的几个附录. 关于用解析数论的方法研究 Fermat 大定理(见[Fo],[AHB]),涉及到一些基本理论的问题参见[L9]的附录一和我们这本书后面的附录二,以及[L10]§9.6 后面的附录. 在[L10]中我已经给出 Fermat 大定理对于指数 $n=3$ 和 4 的详细证明.

(五)对数学发展整体态势的分析

自从 2005 年以来,我陆续在数学许多分支找到大量基本

的理论错误，特别是在 Riemann 几何和代数几何中，因此与其他数学分枝相比，解析数论是基本理论含有错误相对较少的. 但是，许多基本重要的东西还是有问题(参见我今年的著作[L10] 的附录以及本书的附录). 但我不认为这是数学的退步，恰恰是进步，因为许多东西必须经过历史的考验，原来人们的认识不深，只能是有的人有机会逐步加深认识，辨明真伪，然后逐步揭示给别人，但现在的潮流则是跟风从速写一些“锦上添花”的论文，只有我因为二十几年来远离数学的“核心地区”而有幸做出重大发现.

参考文献

[**AHB**] L. M. Adleman and D. R. Heath-Brown, The first case of Fermat's last theorem, Invent. Math. 79(1985), 409-416. [**De**] P. Deligne, La conjecture de Weil(I). Pub. Math. IHES, 43 (1974), 273-307. [**Dw**] B. Dwork, On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, Amer. J. Math. 82(1960), 631-648. [**Fo**] E. Fouvry, Theoreme de Brun-Titchmarsh; application au theorem de Fermat, Invent. Math. 79(1985), 383-407. [**Fu**] W. Fulton, Algebraic curves, W. A. Benjamin, 1969. [**Gr**] B. H. Gross, On the facterization of p-adic L-series, Inv. Math. 57 (1980), 83-95. [**Hr**] R. Hartshorne, Algebraic geometry, GTM 52, Springer, 1977. [**H**] T. W. Hungerford, Algebra, GTM 73. [**K**] N. Koblitz, p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions, GTM 58, 2nd edition, Springer,

1984. [**L**] S. Lang, Algebraic Number Theory, GTM 110, Springer, 1986. [**M**] W. Messing, Short sketch of Deligne's proof of the hard Lefschetz theorem, Proc. Symp. Math. vol. 29, 563-580. [**R**] P. Ribenboim, 13 lectures on Fermat's last theorem, Springer, 1979. [**S**] J. P. Serre, Algebraic groups and Class fields, GTM 117, Springer, 1988. [**W**] L. C. Washington, Introduction to cyclotomic fields, GTM 83, Springer, 1982. [**X**] 夏道行等著,实变函数论与泛函分析,下册,第二版,高等教育出版社,1987. [**Y**] K. Yosida, Functional Analysis, Sixth Edition, Springer, 1980. [**ZS**] O. Zariski and P. Samuel, Commutative algebra, GTM 28. [**ZS1**] O. Zariski and P. Samuel, Commutative algebra, GTM 29. [**Z**] 张贤科,代数数论导引,第二版,高等教育出版社,2006.

第一章

L 函数零点密度估计的简短推导

§1.1　引　　言

我在专著[L8]中证明了一个带有 loglog 因子的 L 函数零点密度估计(见定理 2.4.3),证明及其繁琐,特别是在推导定理 2.3.4(Graham 首创的渐近公式)的过程中. 但实际上我的方法并不需要只带有 loglog 因子的零点密度估计,实际上带几个对数因子都可以,因为即使密度估计带有对数因子 L^k,在[L8]§3.2 的工作里经过使用相关技术步骤后得到的最后估计(见 p. 240,(45))

$$S_2 \ll y^{-c'/L_1} L^k,$$

这里 $L_1 = hcL/\log L$, $y > x^{0.5}$, h 和 c' 为正的绝对常数,而 c 为可以充分小的常数. 在[L8]§3.3 的工作中,最后对数因子都可以被 $\exp(-L^{0.5})$ 所吸收. 于是我们要在这里用一种相当简

洁的方法证明一个带对数因子的零点密度估计. 注意,[PP]第三十章中证明类似的结果,要使用 L 函数在 1/2 线的四次方均值估计(证明较为艰涩).

定理 1.1.1 设 $Q \geqslant 3, T \geqslant 3, 5/6 \leqslant \alpha < 1$, 用 $N(\alpha, T, \chi)$ 表示 $L(s, \chi)$ 满足

$$\rho = \sigma + \mathrm{i}t, \alpha \leqslant \sigma \leqslant 1, |t| \leqslant T$$

的零点个数(是几阶零点就重复计数几次),则对任意 $\varepsilon > 0$,

$$\sum_{q \leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi(\bmod q)} N(\alpha, T, \chi) = O((Q^2 T)^{(1-\alpha)(1+\varepsilon)} \log^4(QT)),$$

其中 $*$ 表示对原特征求和(若 $q=1$,则只有一个 $\chi(n)$,它恒等于 1).

注意,定理 1.1.1 实际上也将 ζ 函数一并包括进去了,因此实际上[L8] 的第三章中不需要应用素数定理了.

现在看 Jutila 方法([J]) 是唯一能得到 log-free 零点密度估计的,对此在[L8] 中我的观点有问题(是受到[PP] 的影响的,[PP] 中对 Jutila 方法的阐述是有问题的). 虽然 log-free 零点密度估计能够达到,在 Goldbach 数例外集和算术级数中最小素数问题的研究中却有其他问题(见附录五和附录六).

§1.2 定理 1.1.1 的证明

先叙述一个引理.

引理 1.2.1 设 q 为正整数,$q=1$ 或 $q \geqslant 3$,函数 $\chi(n)$ 在 $q=1$ 时恒等于 1,在 $q \geqslant 3$ 时是模 q 的一个原特征,令

$$E_0=\begin{cases}1, & \text{若 } q=1,\chi(n) \text{ 恒等于 } 1,\\ 0, & \text{若 } q\geqslant 3,\chi(n) \text{ 为原特征,}\end{cases}$$

设 ρ 为 $L(s,\chi)$ 的非平凡零点(若 $q=1$ 则 $L(s,\chi)=\zeta(s)$), $x\geqslant 3$ 为一个正的实数, $y=x(\log x)^2$, 则(其中 $\sigma=\mathrm{Re}(\rho)$)

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-1/x}+\sum_{2\leqslant n\leqslant y}\chi(n)n^{-\rho}\mathrm{e}^{-n/x}\\ &=E_0\Gamma(1-\rho)x^{1-\rho}\frac{\varphi(q)}{q}+O(x^{1/2-\sigma}q^{1/4}\log(2q)).\end{aligned}$$

证明:只需在[L8]的定理 2.2.2 中令 $z=r=1$ 即可.

现在开始证明定理 1.1.1. 先处理和

$$J=\sum_{3\leqslant q\leqslant Q}\ \sum_{\chi(\bmod q)}{}^{*}N(\alpha,T,\chi).$$

这里我们没有必要搞[L8]定理 2.4.3 证明开始阶段过细分化(见 pp. 191-192). 令 $R=z=1$, $x=(Q^2T)^{(1+\varepsilon)/2}$, $y=x(\log x)^2$, 对每个计数于 J 中的零点 ρ, 由引理 1.2.1 得到(见 p. 193 的(4))

$$1+O(L^{-1})=-\sum_{2\leqslant n\leqslant y}\chi(n)n^{-\rho}\mathrm{e}^{-n/x},$$

此处 $L=\log(QT)$. 由此我们得到(q 与 χ 给定时, $L(z,\chi)$ 的零点 $\rho=s+\alpha$ 按阶数自然重复计数几次)

$$\begin{aligned}J^2&=\Big(\sum_{(q,\chi,s)}\Big|\sum_{2\leqslant n\leqslant y}\chi(n)n^{-s-\alpha}\mathrm{e}^{-n/x}\Big|\Big)^2\\ &=\Big(\sum_{(q,\chi,s)}\eta_{q,\chi,s}\sum_{2\leqslant n\leqslant y}\chi(n)n^{-s-\alpha}\mathrm{e}^{-n/x}\Big)^2\\ &\leqslant\Big(\sum_{2\leqslant n\leqslant y}\psi_n\Big|\sum_{(q,\chi,s)}\eta_{q,\chi,s}\chi(n)n^{-s}\Big|\Big)^2\end{aligned}$$

$$\leqslant \Big(\sum_{2\leqslant n\leqslant y}\psi_n^2 b_n^{-1}\Big)\Big(\sum_{2\leqslant n\leqslant y} b_n \Big|\sum_{(q,\chi,s)}\eta_{q,\chi,s}\chi(n)n^{-s}\Big|^2\Big), \quad (1)$$

其中 $|\eta_{q,\chi,s}|\leqslant 1$，$\psi_n = n^{-\alpha}e^{-n/x}$，而 $b_n = n^{-1}(e^{-n/x} - e^{-n})$. 与[L8]p. 194 的(8) 类似地有

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant y}\psi_n^2 b_n^{-1} = O\Big(1 + \sum_{2\leqslant n\leqslant y} n^{1-2\alpha}\Big) = O\Big(\frac{y^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha}\Big) = O(y^{2(1-\alpha)}L),$$

而与[L8]p. 201 的(19) 类似地有([L8]p. 203 上计算似乎有误，(27) 上面一行似乎不应有 $y^{1/3}$ 这个因子)

$$\sum_{2\leqslant n\leqslant y} b_n \Big|\sum_{(q,\chi,s)}\eta_{q,\chi,s}\chi(n)n^{-s}\Big|^2$$

$$\ll LJ + \sum_{(q,\chi,s)}\sum_{s'} |(x^{-\bar{s}-s'} - 1)\Gamma(-\bar{s} - s')| + J^2L^{-2}, \quad (2)$$

其中对 s' 的求和满足 $\bar{s} + s' \neq 0$. 此时

$$0 \leqslant \mathrm{Re}(\bar{s} + s') \leqslant 2(1-\alpha),$$

$$\frac{2}{3} \leqslant 1 - 2(1-\alpha) \leqslant \mathrm{Re}(1 - (\bar{s} + s')) \leqslant 1.$$

对于给定的(q,χ,s)，将对 s' 的求和分成两部分，

$$\sum_{s'} |(x^{-\bar{s}-s'} - 1)\Gamma(-\bar{s} - s')| = S_1 + S_2;$$

其中 S_1 相应于 $|\mathrm{Im}(\bar{s}+s')|\leqslant 1$ 的部分，S_2 相应于 $|\mathrm{Im}(\bar{s}+s')|> 1$ 的部分. 对于 S_1，使用[L8] 定理 1. 5. 10(ⅲ) 可知满足条件的零点个数为 $O(L)$，而由于对任意复数 w 可以证明(对实数的 w 显然成立，对复数的 w 右边定义为沿着从 0 到 $w = u + iv$ 的直线段所做的线积分，$u < 0$ 时其参数方程为 $z = t(1 + iv/u)$，$t \in [u, 0]$，然后可以用 Cauchy-Riemann 的判别法则证明右边的函数是 w 的解析函数，于是由解析开拓