OLYMPIC MATHS

奥林匹克数学

初二分册

训练题集

钱展望 朱华伟/编著

湖北教育出版社

与《奥林匹克数学》初二分册配套

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学训练题集.初二分册/钱展望,朱华伟编著.
—武汉:湖北教育出版社,2002
(奥林匹克数学系列丛书)
ISBN 7-5351-3147-6

Ⅰ.奥… Ⅱ.①钱…②朱 Ⅲ.数学课-初中-习题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011165 号

出版 发行:湖北教育出版社　武汉市青年路 277 号
网址:http://www.hbedup.com　邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北恒泰印务有限公司 (430223·武汉市江夏庙山开发区汤逊湖工业园)
开 本:850mm×1168mm 1/32 5.75 印张
版 次:2002 年 3 月第 1 版 2005年3月第6次印刷
字 数:142 千字 印数:28 001-31 000

ISBN 7-5351-3147-6/G·2553 定价:9.00 元

目　录

测试题一

1. 因式分解：

(1) $125a^n - a^{n+3}$；

(2) $\frac{1}{4}ax^2y^2 - \frac{1}{16}a(x^2+y^2)^2$；

(3) $a^4b - a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4$.

2. 因式分解：

(1) $16 - x^{2n} + 2x^ny - y^2$；

(2) $2(x^2-y^2)^2 - (x^2-y^2)(x-y)^2$；

(3) $(x^3+y^3)^2 - 9x^2y^2(x+y)^2$；

(4) $(x+y)^3 + 2xy(1-x-y) - 1$.

3. 因式分解：

(1) $x^4 - 7x^2y^2 + 9y^4$；

(2) $p^4 - 4p^3 + 8p^2 - 8p + 4$；

(3) $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$；

(4) $(ab+cd)(a^2-b^2+c^2-d^2) + (ac+bd)(a^2+b^2-c^2-d^2)$.

4. 分解因式：$x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1$.

5. 分解因式：$x^3 + (1-m)x^2 - 2mx + m^2$.

解　答

1.解　(1)原式 $= a^n(125-a^3) = a^n(5-a)(25+5a+a^2)$.

(2)原式 $= \frac{1}{16}a[4x^2y^2-(x^2+y^2)^2]$

$= \frac{1}{16}a(2xy+x^2+y^2)(2xy-x^2-y^2)$

$= -\frac{1}{16}a(x+y)^2(x-y)^2$.

(3)原式 $= ab[(a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)]$

$= ab(a+b)[(a^2-ab+b^2)-ab]$

$= ab(a+b)(a-b)^2$.

2.解　(1)原式 $= 16-(x^{2n}-2x^ny+y^2)$

$= 16-(x^n-y)^2 = (4+x^n-y)(4-x^n+y)$.

(2)原式 $= (x^2-y^2)(x-y)[2(x+y)-(x-y)]$

$= (x+y)(x-y)^2(x+3y)$.

(3)原式 $= (x+y)^2[(x^2-xy+y^2)^2-(3xy)^2]$

$= (x+y)^2(x^2-4xy+y^2)(x^2+2xy+y^2)$

$= (x+y)^4(x^2-4xy+y^2)$.

(4)原式 $= [(x+y)^3-1]-2xy(x+y-1)$

$= (x+y-1)[(x+y)^2+(x+y)+1]-2xy(x+y-1)$

$= (x+y-1)[(x+y)^2+(x+y)+1-2xy]$

$= (x+y-1)(x^2+y^2+x+y+1)$.

3.解　(1)原式 $= (x^4-6x^2y^2+9y^4)-x^2y^2$

$= (x^2-xy-3y^2)(x^2+xy-3y^2)$.

(2)原式 $= (p^4-4p^3+4p^2)+(4p^2-8p)+4$

$= p^2(p-2)^2+4p(p-2)+4$

$= [p(p-2)+2]^2$

$= (p^2-2p+2)^2$.

(3)原式$=4a^2b^2-(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2)$

$=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

$=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)$

$=[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]$

$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b).$

(4)原式$=(ab+cd)[(a^2-d^2)-(b^2-c^2)]$

$+(ac+bd)[(a^2-d^2)+(b^2-c^2)]$

$=(a^2-d^2)(ab+cd+ac+bd)$

$+(b^2-c^2)(ac+bd-ab-cd)$

$=(a^2-d^2)(a+d)(b+c)-(b^2-c^2)(b-c)(a-d)$

$=(a+d)^2(a-d)(b+c)-(b-c)^2(a-d)(b+c)$

$=(a-d)(b+c)[(a+d)^2-(b-c)^2]$

$=(a-d)(b+c)(a+b-c+d)(a-b+c+d).$

4.解　因

$$x^{10}-1=(x^2)^5-1=(x^2-1)(x^8+x^6+x^4+x^2+1),$$

及

$$x^{10}-1=(x^5)^2-1=(x^5-1)(x^5+1)$$

$$=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1),$$

故

$$x^8+x^6+x^4+x^2+1$$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).$$

5.解　原式$=m^2-(2x+x^2)m+x^3+x^2$

$=m^2-(2x+x^2)m+x(x^2+x)$

$=(m-x)(m-x-x^2).$

测试题二

换元法

1. 分解因式:

(1) $2x^2+3xy-9y^2+14x-3y+20$;

(2) $x^2-xy+2x+y-3$.

2. 分解因式:

(1) $(x+5)^4+(x+3)^4-82$;

(2) $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$;

(3) $4(2x^2-x+1)(x^2-2x+3)-(3x^2-3x+4)^2$.

3. 分解因式:

(1) $2x^4-x^3-6x^2-x+2$;

(2) $(x^2+y^2-2x+1)^2-4(y-4xy)(x^2-y^2-2x+1)$;

(3) $(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$.

4. 已知 x^3+bx^2+cx+d 的系数均为整数,且 $bd+cd$ 为奇数,求证:此多项式不能分解成两个系数均为整数的因式.

5. 若 a 是正整数,$P=a^4-4a^3+15a^2-30a+27$ 的值是素数.试求 P 的值.

解　答

1. 解　(1)因

$$2x^2 + 3xy - 9y^2 = (2x - 3y)(x + 3y),$$

故可设

$$\begin{aligned}原式 &= (2x - 3y + m)(x + 3y + n) \\ &= 2x^2 + 3xy - 9y^2 + (m + 2n)x + (3m - 3n)y + mn.\end{aligned}$$

比较对应项系数得

$$\begin{cases} m + 2n = 14, & ① \\ 3m - 3n = -3, & ② \\ mn = 20. & ③ \end{cases}$$

由①,②得 $m=4, n=5$,再代入⑤式,⑤式成立,故

原式 $=(2x-3y+4)(x+3y+5)$.

(2)因　$x^2 - xy = x(x-y)$,

故可设　原式 $=(x+m)(x-y+n)$,

即　原式 $= x^2 - xy + (m+n)x - my + mn$.

比较对应项系数得

$$\begin{cases} m + n = 2, & ① \\ -m = 1, & ② \\ mn = -3. & ③ \end{cases}$$

由①,②得 $m=-1, n=3$,再代入③式,③式成立.

故　原式 $=(x-1)(x-y+3)$.

2. 解　(1)令 $y = x+4$,则

$$\begin{aligned}原式 &= (y+1)^4 + (y-1)^4 - 82 \\ &= 2(y^4 + 6y^2 + 1) - 82 \\ &= 2(y^4 + 6y^2 - 40) \\ &= 2(y^2 - 4)(y^2 + 10)\end{aligned}$$

$$= 2(y+2)(y-2)(y^2+10)$$
$$= 2(x+6)(x+2)(x^2+8x+26).$$

(2) 原式 $=[(x-3)(x+4)][(x-1)(x+2)]+24$

$$=(x^2+x-12)(x^2+x-2)+24$$

令 $y=x^2+x-12$,则

$$\begin{aligned}原式 &= y(y+10)+24\\ &= y^2+10y+24\\ &= (y+4)(y+6)\\ &= (x^2+x-8)(x^2+x-6)\\ &= (x^2+x-8)(x-2)(x+3).\end{aligned}$$

(3)令 $m=2x^2-x+1, n=x^2-2x+3$,则 $m+n=3x^2-3x+4$,故

$$\begin{aligned}原式 &= 4mn-(m+n)^2\\ &= -(m-n)^2\\ &= -[(2x^2-x+1)-(x^2-2x+3)]^2\\ &= -(x^2+x-2)^2\\ &= -(x-1)^2(x+2)^2.\end{aligned}$$

3.解 (1)令 $y=x+\frac{1}{x}$,则 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$,有

$$\begin{aligned}原式 &= x^2(2x^2-x-6-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})\\ &= x^2[2(x^2+\frac{1}{x^2})-(x+\frac{1}{x})-6]\\ &= x^2[2(y^2-2)-y-6]\\ &= x^2(2y^2-y-10)\\ &= x^2(2y-5)(y+2)\\ &= x^2[2(x+\frac{1}{x})-5](x+\frac{1}{x}+2)\\ &= (2x^2-5x+2)(x^2+2x+1)\\ &= (2x-1)(x-2)(x+1)^2.\end{aligned}$$

(2)　原式 $=[(x-1)^2+y^2]^2+4y(x-1)[(x-1)^2-y^2]$

令 $t=x-1$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(t^2+y^2)^2+4yt(t^2-y^2)\\&=(t^2-y^2)^2+4yt(t^2-y^2)+4t^2y^2\\&=(t^2-y^2+2yt)^2\\&=[(x-1)^2-y^2+2y(x-1)]^2\\&=(x^2+2xy-y^2-2x-2y+1)^2.\end{aligned}$$

(3)令 $y=1+x+x^2$,则

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(y+x^3)^2-x^3\\&=y^2+2yx^3+x^6-x^3\\&=y^2+2yx^3+x^3(x^3-1)\\&=y^2+2yx^3+(x-1)x^3y\\&=y[y+2x^3+(x-1)x^3]\\&=y(y+x^4+x^3)\\&=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4).\end{aligned}$$

4. 证明　假设

$$x^3+bx^2+cx+d=(x+p)(x^2+qx+r), \qquad ①$$

其中 p,q,r 均为整数.

由①得

$$x^3+bx^2+cx+d=x^3+(p+q)x^2+(pq+r)x+pr,$$

比较对应项系数得

$$\begin{cases}p+q=b, & ②\\ pq+r=c, & ③\\ pr=d. & ④\end{cases}$$

依题设,$bd+cd$ 为奇数,即$(b+c)d$ 为奇数,故 $b+c,d$ 均为奇数.又由④可知 p,r 为奇数.

由②,③可知 b,c 均与 q 有不同的奇偶性,因此 b,c 有相同的奇偶性,$b+c$ 为偶数,这与 $b+c$ 为奇数相矛盾.故命题成立.

5. 解　设

$$P=(a^2+ma+n)(a^2+pa+q)$$
$$=a^4+(m+p)a^3+(n+q+mp)a^2+(mq+np)a+nq.$$

比较对应项系数,有

$$\begin{cases} m+p=-4, & ① \\ n+q+mp=15, & ② \\ mq+np=-30, & ③ \\ nq=27. & ④ \end{cases}$$

取 $m=-3,n=3,p=-1,q=9$,经检验可以满足①,②,③,④,即为上述方程组的一组解.因此

$$a^4-4a^3+15a^2-30a+27=(a^2-3a+3)(a^2-a+9).$$

因 $$(a^2-3a+3)-(a^2-a+9)=-2a-6<0,$$

故若 P 为素数,惟有

$$a^2-3a+3=1,$$

即 $$(a-1)(a-2)=0,$$

所以 $a=1$ 或 $a=2$. 但 $a=1$ 时,$a^2-a+9=9$ 不是素数;$a=2$ 时,$a^2-a+7=11$. 故 $P=11$.

测试题三

1. 分解因式：

(1) $x^2-y^2+5x+3y+4$；

(2) $6x^2-7xy-3y^2-xz+7yz-2z^2$.

2. 分解因式：

(1) x^3-4x^2+6x-4；

(2) $x^4-x^3y-7x^2y^2+13xy^3-6y^4$；

(3) $a^3-4a^2b+ab^2+6b^3$.

3. 分解因式：

(1) $x^4-6ax^2-9b^2-18ab$；

(2) $(a^2-1)(b^2-1)-4ab$.

4. 分解因式：

(1) $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$；

(2) $a^2(b^3-c^3)+b^2(c^3-a^3)+c^2(a^3-b^3)$.

5. 分解因式：

$(abc+bcd+cda+dab)^2-(ab-cd)(bc-ad)(ca-bd)$.

6. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$（a,b,c 为常数），$f(1)=1$，$f(2)=2$. 又若 $f(8)=m$，$f(-5)=n$，求 $m-n$ 的值.

解　答

1.**解**　(1)原式 $=(x+y)(x-y)+5x+3y+4$

$$=(x+y+1)(x-y+4).$$

(2)原式 $=6x^2-(7y+z)x-(3y^2-7yz+2z^2)$

$$=6x^2-(7y+z)x-(3y-z)(y-2z)$$

$$=(2x+3y-z)(3x-y+z).$$

2.**解**　(1)记 $f(x)=x^3-4x^2+6x-4$,有 $f(2)=0$,故 $f(x)$有因式 $x-2$.利用综合除法:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & 2 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

有 $f(x)=(x-2)(x^2-2x+2)$.

(2)记 $g(x)=x^4-x^3y-7x^2y^2+13xy^3-6y^4$.注意到 $g(x)$为 x,y 的齐次式,可先考虑 $g_1(x)=x^4-x^3-7x^2+13x-6$,其系数和为 0,含因式 $x-1$,利用综合除法得 $g_1(x)=(x-1)(x^3-7x+6)$.同样可得 $x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)$.故 $g_1(x)=(x-1)^2(x^2+x-6)=(x-1)^2(x-2)(x+3)$.于是原式 $=(x-y)^2(x-2y)(x+3y)$.

(3)注意到奇数项与偶数项数字系数的和相等,故有因式$(a+b)$.

$$\text{原式}=a^3+a^2b-5a^2b-5ab^2+6ab^2+6b^3$$

$$=a^2(a+b)-5ab(a+b)+6b^2(a+b)$$

$$=(a+b)(a^2-5ab+6b^2)$$

$$=(a+b)(a-2b)(a-3b).$$

3.**解**　(1)原式 $=(x^2)^2-6ax^2-9b(2a+b)$

$$=(x^2+3b)(x^2-6a-3b).$$

(2)原式 $=(b^2-1)a^2-4ba-(b^2-1)$

$$=(b-1)(b+1)a^2-4ba-(b-1)(b+1)$$
$$=[(b-1)a-(b+1)][(b+1)a+(b-1)]$$
$$=(ab-a-b-1)(ab+a+b-1).$$

4. 解 (1)当 $a=-b$ 时,原式 $=-cb^2+cb^2=0$. 根据因式定理,$a+b$ 是原式的一个因式. 又原式是关于 a,b,c 的对称式,故原式还含有因式 $b+c,c+a$. 可设

$$原式=k(a+b)(b+c)(c+a)$$

比较 a^2b 的系数,可知 $k=1$. 所以

$$原式=(a+b)(b+c)(c+a).$$

(2)当 $a=b$ 时,原式 $=a^2(a^2-c^2)+a^2(c^2-a^2)=0$. 根据因式定理,$a-b$ 是原式的一个因式. 又原式是关于 a,b,c 的轮换对称式,故原式还含有因式 $b-c,c-a$. 可设

$$原式=(a-b)(b-c)(c-a)[k(a^2+b^2+c^2)+l(ab+bc+ca)].$$

比较 a^4b 的系数,可知 $k=0$,又比较 a^3b^2 的系数知 $l=1$. 故

$$原式=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca).$$

5. 解 当 $a=0$ 时,原式 $=0$,故 a 是原式的一个因式. 由对称性知 b,c,d 也是原式的因式. 可设

$$原式=abcd[k(a^2+b^2+c^2+d^2)+l(ab+bc+cd+da+ac+bd)]. \quad ①$$

令 $a=b=c=d=1$,由①得

$$2k+3l=8. \quad ②$$

令 $a=b=c=1,d=2$,由①得

$$7k+9l=25. \quad ③$$

由②,③得 $k=1,l=2$. 于是

$$原式=abcd(a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2cd+2da)$$
$$=abcd(a+b+c+d)^2.$$

6. 解 令 $q(x)=f(x)-x$,则 $q(1)=q(2)=0$. 可设 $q(x)=(x-1)(x-2)(x-t)$(t 为常数). 于是

$$
\begin{aligned}
m-n &= f(8)-f(-5)=[q(8)+8]-[q(-5)-5] \\
&= q(8)-q(-5)+13 \\
&= 7\cdot 6\cdot(8-m)-(-6)\cdot(-7)\cdot(-5-m)+13 \\
&= 336-42m+210+42m+13 \\
&= 559.
\end{aligned}
$$

测试题四

一、填空题

1. $58.63\times199.9+586.3\times98.11-5.863\times1810$ 的值是______.

2. $\dfrac{(1998^2-2004)(1998^2+3993)\times1999}{1995\times1997\times2000\times2001}$的值是______.

3. $1+3+3(1+3)+3(1+3)^2+3(1+3)^3+3(1+3)^4+3(1+3)^5$ 的值是______.

4. 若 $x-y=3$,则$\dfrac{1}{3}(x^3-y^3)-xy(x-y)$的值是______.

5. 若 $a+b=6,a^3+b^3=72$,则 a^2+b^2 的值是______.

6. 整数 a,b 满足 $6ab=9a-10b+303$,则 $a+b$ 的值是______.

7. 若 $a-b=1+m,b-c=1-m$,则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=$______.

8. 若 a 是正整数,且 $a^3-8a^2-12a+144$ 的值是一个素数,则这个素数是______.

二、解答题

9. 求证:对每个正整数 n,总能找到一个正整数 m,使得 $mn+1$ 是合数.

10. 若 m,n 为整数,且 $7m-n$ 是 6 的倍数,求证:$28m^2+31mn-5n^2$ 必是 18 的倍数.

11. 设$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)=(a+b+c+d)(bcd+cda+dab+abc)$.求证:$ac=bd$.

12. 设 a,b,c,d 均为整数,$m=(ab+cd)^2-\dfrac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$ 是正整数,求证:m 是合数.