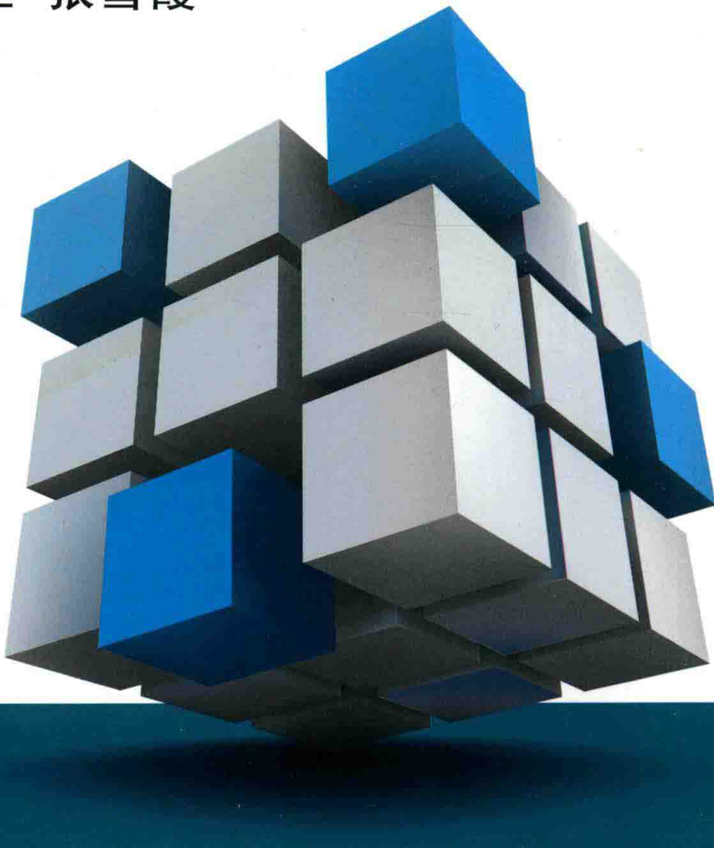
21世纪高等院校公共基础系列规划教材

普通高等教育优秀教材·公共基础系列

高等数学（下册）

主编 何 华 尹成立 张雪霞



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

21世纪高等院校公共基础系列规划教材

普通高等教育优秀教材·公共基础系列

高等数学

(下册)

主　　编　何　华　尹成立　张雪霞

副 主 编　金少华　郭献洲　穆军芬

参　　编　(排名不分先后)

臧　婷　马俊霞　陈秀引　潘晓春　谭彦华

王　艳　李慧云　阎爱玲　李志国　邵泽玲

刘淑平　李翠环　周俊明　穆军芬　程俊明

刘丽娜　李秀军　谭春晓　王志京　仝策中

原　军　张新鸿

上海交通大学出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

全书分上、下两册。上册包括极限与连续、导数与微分、导数应用与中值定理、一元函数积分学等内容。下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、微分方程等内容。每节都配有相应的习题。

本书可作为应用型本科院校非数学专业学生的教材,也可作为相关人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(下册)/何华,尹成立,张雪霞主编. —上海:上海交通大学出版社,2015
ISBN 978—7—313—12675—7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①何… ②尹… ③张… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材
Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 033559 号

高等数学(下册)

主　　编:何　华　尹成立　张雪霞
出版发行:上海交通大学出版社　　地　　址:上海市番禺路 951 号
邮政编码:200030　　电　　话:021—64071208
出 版 人:韩建民
印　　制:北京市龙展印刷有限责任公司　　经　　销:全国新华书店
开　　本:787×1092mm　1/16　　印　　张:15.5
字　　数:284 千字
版　　次:2015 年 3 月第 1 版　　印　　次:2015 年 3 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-313-12675-7/O
定　　价:31.00 元

前　言

应用型本科院校培养的主要是高级工程人员。无论是从能力的培养还是为了应用，相应的数学培养都是必需的。由于学生基础高低不一，编者针对教学的特点，在内容的论述上力求详细、严谨，清楚易懂，还配置了足够数量的习题，供学生课内外练习，便于教学。

全书分为上、下两册，共十二章。上册包括极限与连续、导数与微分、导数应用与中值定理、一元函数积分学等内容。下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、微分方程等内容。

本书以激发学生的学习兴趣为出发点，以培养应用能力为根本，以理论基础为保证，体现了应用型本科院校数学课的教学要求。

本书适合作为综合性大学、高等师范院校及其他理工科大学中的非数学类各专业学生的高等数学教材。书中带 * 内容为选讲内容。

本书在出版过程中得到了河北工业大学理学院、河北工业大学城市学院、太原科技大学各院校领导及老师的大力支持，同时还要感谢燕山大学里仁学院的同仁，与他们的交流使我们获益匪浅。

本书由何华、尹成立、张雪霞担任主编，金少华、郭献洲、穆军芬担任副主编，参加编写的老师还有臧婷、马俊霞、陈秀引、潘晓春、谭彦华、王艳、李慧云、阎爱玲、李志国、邵泽玲、刘淑平、李翠环、周俊明、穆军芬、程俊明、刘丽娜、李秀军、谭春晓、王志京、仝策中、原军、张新鸿。全书由何华、尹成立统稿定稿。

在编写本书时，编者参考了国内外与高等数学相关的优秀著作，在此恕不一一列名致谢。

由于编者水平所限，书中存在的不当之处，敬请广大读者和同行批评指正。

编　者

2014 年 6 月

目　录

第 7 章　空间解析几何与向量代数

7.1　向量及其线性运算

1. 向量概念

向量:在研究力学、物理学以及其他应用科学时,常会遇到这样一类量,它们既有大小,又有方向.例如力、力矩、位移、速度、加速度等,这一类量称为向量.

在数学上,用一条有方向的线段(称为有向线段)来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.

向量的符号:以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$.向量可用黑斜体字母表示,也可用上加箭头的斜体字母表示,例如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或$\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$.

自由向量:由于一切向量的共性是它们都有大小和方向,所以在数学上只研究与起点无关的向量,并称这种向量为自由向量,简称向量.因此,如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,且方向相同,则说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.相等的向量经过平移后可以完全重合.

向量的模:向量的大小称为向量的模.

向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{AB}$的模分别记为$|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{AB}|$.

单位向量:模等于 1 的向量称为单位向量.

零向量:模等于 0 的向量称为零向量,记作 $\boldsymbol{0}$ 或$\vec{0}$.零向量的起点与终点重合,它的方向可以看作是任意的.

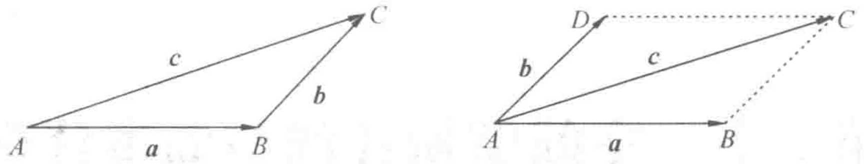
2. 向量的加法

1)向量的加法

向量的加法:设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与$\boldsymbol{a}$ 的终点重合,此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量$\boldsymbol{c}$ 称为向量$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

三角形法则:上述做出两向量之和的方法称为向量加法的三角形法则[见图 7-1(a)].

平行四边形法则[见图 7-1(b)]:当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合,以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形,从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.



(a) (b)

图 7-1

向量的加法的运算规律:

(1)交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2)结合律$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律,故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

并按向量相加的三角形法则,可得 n 个向量相加的法则如下:使前一向量的终点作为次一向量的起点,相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots\boldsymbol{a}_n$,再以第一向量的起点为起点,最后一向量的终点为终点作一向量,这个向量即为所求的和.

负向量:设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记为$-\boldsymbol{a}$.

向量的减法:我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即把向量$-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上,便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(见图 7-2).

特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0.$$

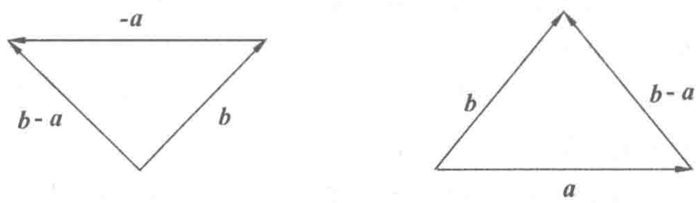


图 7-2

显然,任给向量$\boldsymbol{AB}$及点 $\boldsymbol{O}$,有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AO}+\boldsymbol{OB}=\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OA},$$

因此,若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 $\boldsymbol{O}$,则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 $\boldsymbol{A}$ 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 $\boldsymbol{B}$ 所引向量$\boldsymbol{AB}$便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

三角不等式:由三角形两边之和大于第三边的原理,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \text{ 及 } |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立.

2)向量与数的乘法

向量与数的乘法的定义:

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数λ的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当$\lambda>0$时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}.$$

运算规律：

(1)结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2)分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

【例 7-1-1】 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$.

试用 a 和 b 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点(见图 7-3).

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$，

于是 $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

因为 $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以 $\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于 $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

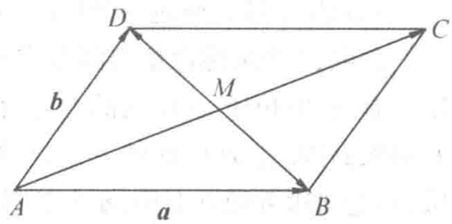


图 7-3

向量的单位化：

设 $\boldsymbol{a}\neq0$，则向量 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记为 $\boldsymbol{e}_a$. 于是 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

定理 7-1-1　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，那么，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：

存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明：条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 取 $|\lambda|=\frac{|b|}{|a|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 $\boldsymbol{\lambda}$ 取负值，即 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|=\frac{|b|}{|a|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证明数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得

$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=0$，即 $|\lambda-\mu|\,|\boldsymbol{a}|=0$.

因 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 i 确定了数轴 Ox，对于轴上任一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由 $\overrightarrow{OP}/\!/i$，根据定理 7-1-1，必有唯一的实数 x，使 $\overrightarrow{OP}=xi$(实数 x 称为轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值)，并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应. 于是

点 $P\leftrightarrow$ 向量 $\overrightarrow{OP}=xi\leftrightarrow$ 实数 x，

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此，定义实数 x 为轴上点 P 的坐标.

由此可知，轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP}=xi.$$

3. 空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，统称为坐标轴.它们构成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 坐标系.

注:①通常三个数轴应具有相同的长度单位;

②通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线;

③数轴的正向通常符合右手规则.

坐标面:

在空间直角坐标系中，任意两个坐标轴可以确定一个平面，这种平面称为坐标面.

x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫作 xOy 面，另两个坐标面是 yOz 面和 zOx 面.

卦限:3 个坐标面把空间分成 8 个部分，每一部分称为卦限，含有三个正半轴的卦限称为第一卦限，它位于 xOy 面的上方. 在 xOy 面的上方，按逆时针方向排列着第二卦限、第三卦限和第四卦限. 在 xOy 面的下方，与第一卦限对应的是第五卦限，按逆时针方向还排列着第六卦限、第七卦限和第八卦限. 8 个卦限分别用字母 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示(见图 7-4).

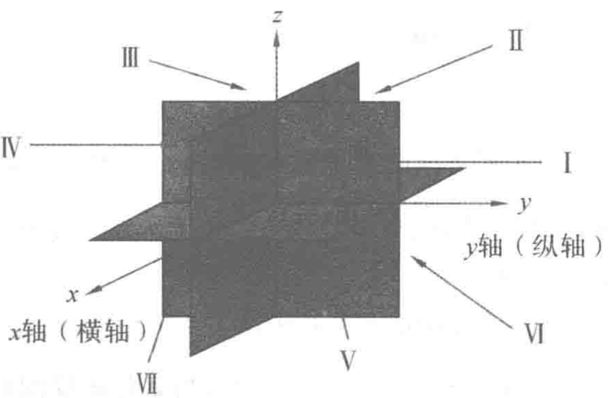


图 7-4

向量的坐标分解式:

任给向量 $\boldsymbol{r}$，对应有点 M，使$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

设

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 3 个坐标轴方向的分向量.

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$ 三个分向量，进而确定了 x、y、z 三个有序数;反之，给定三个有序数 x、y、z 也就确定了向量 r 与点 M. 于是点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序 x、y、z 之间有一一对应的关系

$$M\leftrightarrow \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z).$$

据此，定义：有序数 x、y、z 称为向量 $\boldsymbol{r}$（在坐标系 $Oxyz$）中的坐标，记作 $r=(x,y,z)$；有序数 x、y、z 也称为点 M（在坐标系 $Oxyz$）的坐标，记为 $M(x,y,z)$.

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x,y,z) 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如：点 M 在 yOz 面上，则 $x=0$；同相，在 zOx 面上的点，$y=0$；在 xOy 面上的点，$z=0$. 如果点 M 在 x 轴上，则 $y=z=0$；同样在 y 轴上，有 $z=x=0$；在 z 轴上的点，有 $x=y=0$. 如果点 M 为原点，则 $x=y=z=0$.

4. 利用坐标作向量的线性运算

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$

即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\ b=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z).\\\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})-(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}\\&=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).\end{aligned}$$

利用向量的坐标判断两个向量的平行：设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)\neq 0$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$，于是 $\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$.

【例 7-1-2】 求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases}5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$，其中 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$.

解 如同解二元一次线性方程组，可得

$$\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{y}=3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}.$$

以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式代入，即得

$\boldsymbol{x}=2(2,1,2)-3(-1,1,-2)=(7,-1,10)$，

$\boldsymbol{y}=3(2,1,2)-5(-1,1,-2)=(11,-2,16)$.

【例 7-1-3】 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求一点 M，使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解 由于 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$，

因此

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}),$$

从而

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right),$$

这就是点 M 的坐标.

另解 设所求点为 $M(x,y,z)$,则 $\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$,$\overrightarrow{MB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$. 依题意有 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$,即

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$$

$$(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2)-\lambda(x,y,z),$$

$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2),$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

点 M 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. 当 $\lambda=1$,点 M 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点,其坐标为 $x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}$.

5. 向量的模、方向角、投影

1)向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

按勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2},$$

设

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

有

$$|OP|=|x|,|OQ|=|y|,|OR|=|z|,$$

于是得向量模的坐标表示式 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$,则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

于是点 A 与点 B 间的距离为

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

【例 7-1-4】 求证以 $M_1(4,3,1)$、$M_2(7,1,2)$、$M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 因为 $|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$

$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$

$|M_1M_3|^2=(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6,$

所以 $|M_2M_3|=|M_1M_3|$,即 $DM_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

【例 7-1-5】 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解　设所求的点为 $M(0,0,z)$，依题意有 $|MA|^2=|MB|^2$，
即

$$(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2=(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2.$$

解之得 $z=\dfrac{14}{9}$，所以，所求的点为 $M(0,0,\dfrac{14}{9})$，

【例 7-1-6】　已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解　因为 $\overrightarrow{AB}=(7,1,3)-(4,0,5)=(3,1,-2)$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}$，所以

$$\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2).$$

2)方向角与方向余弦

当把两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到同一点时，两个向量之间的不超过π的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 与π之间任意取值.

类似地，可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角.

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角.

向量的方向余弦：

设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，则

$$x=|r|\cos\alpha,\ y=|r|\cos\beta,\ z=|r|\cos\gamma.$$

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

从而

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\mathrm{r}=\boldsymbol{e}_r.$$

上式表明，以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$. 因此

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

【例 7-1-7】　设已知两点 $A(2,2,\sqrt{2})$ 和 $B(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦和方向角.

解　$\overrightarrow{AB}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$；

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$；

$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2},\cos\beta=\dfrac{1}{2},\cos\gamma=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$\alpha=\dfrac{2\pi}{3},\beta=\dfrac{\pi}{3},\gamma=\dfrac{3\pi}{4}$.

3)向量在轴上的投影

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 u 轴.

任给向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，再过点 M 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 M'（点 M' 叫作点 M 在

u 轴上的投影),则向量$\overrightarrow{OM'}$称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分向量. 设$\overrightarrow{OM'}=\lambda e$,则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影,记作 $\boldsymbol{Prj_u r}$ 或$(\boldsymbol{r})_u$.

按此定义,向量 a 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x,a_y,a_z就是 a 在三条坐标轴上的投影,即

$$a_x=Prj_x\boldsymbol{a},a_y=Prj_y\boldsymbol{a},a_z=Prj_z\boldsymbol{a}.$$

投影的性质:

性质 7-1-1 $(\boldsymbol{a})_u=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$(即 $\boldsymbol{Prj_u a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$),其中φ为向量与 u 轴的夹角;

性质 7-1-2 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u$(即 $Prj_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=Prj_u\boldsymbol{a}+Prj_u\boldsymbol{b}$);

性质 7-1-3 $(\lambda\boldsymbol{a})_u=\lambda(\boldsymbol{a})_u$(即 $Prj_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda Prj_u\boldsymbol{a}$);

习题 7-1

(1)填空题:

①点 $A(a,b,c)$关于 xOy 平面对称点为________;关于 x 轴对称点为________. 从 A 到 y 轴做垂线,垂足坐标为________;A 到 z 轴距离为________.

②已知平行四边形 $ABCD$ 的三顶点 $A(3,-4,7)$,$B(-5,3,2)$,$C(1,2,-3)$,则和 B 点相对着的点 D 的坐标为________.

③已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$,$M_2(3,0,2)$;则 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=$________,$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向余弦为________,方向角为________.

④平行于向量 $\vec{a}=(5,6,-3)$的单位向量为________.

(2)计算与证明:

①在 z 轴上求与已知点 $A(-4,1,7)$,$B(3,5,-2)$等距离的点.

②设 $\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$,$\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$,$\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$. 求向量 $\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}+\vec{p}$ 在 x 轴上投影及在 z 轴上分向量.

③向量 $\vec{a}$ 的方向余弦满足 $\cos\alpha=0$,向量 $\vec{b}$ 的方向余弦满足 $\cos\beta=1$,问这两个向量与坐标轴、坐标平面的关系如何?

④已知三点 A、B、C 的向径分别为$\vec{r_1}=2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$,$\vec{r_2}=3\vec{i}+7\vec{j}+5\vec{k}$,$\vec{r_3}=4\vec{i}+10\vec{j}+9\vec{k}$,试证:$A$、$B$、$C$ 三点在一条直线上.

7.2 数量积 向量积

1. 两向量的数量积

数量积的物理背景:设一物体在常力 F 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2. 以 s 表示位移$\overrightarrow{M_1M_2}$. 由物理学知道,力 F 所做的功为

$$W=|F|\,|\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

其中 θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角.

数量积：对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的模 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角 θ 的余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

数量积与投影：由于 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{a,b})$，当 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{a,b})$ 是向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|Prj_a\boldsymbol{b}$.

同理，当 $\boldsymbol{b}\neq 0$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|Prj_b a$.

数量积的性质：

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2)对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；

反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

如果认为零向量与任何向量都垂直，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

数量积的运算律：

(1)交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2)分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

(3)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(a\cdot b)$，$\lambda$、$\mu$ 为数.

(2)的证明：

分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 的证明：

因为当 $\boldsymbol{c}=0$ 时，上式显然成立；

当 $\boldsymbol{c}\neq 0$ 时，有

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|Prj_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|(Prj_c\boldsymbol{a}+Prj_c\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|Prj_c\boldsymbol{a}+|c|Prj_c\boldsymbol{b}=a\cdot c+b\cdot c$.

【例 7-2-1】 试用向量证明三角形的余弦定理.

证：设在 ΔABC 中，$\angle BCA=\theta$，$|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$，

要证

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

记 $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，则有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

从而 $|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$

即

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.$$

数量积的坐标表示：

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

提示：按数量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

两向量夹角的余弦的坐标表示:

设 $\theta=(\widehat{a,b})$,则当 $\boldsymbol{a}\neq0$、$\boldsymbol{b}\neq0$ 时,有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

提示:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

【例 7-2-2】 已知三点 $M(1,1,1)$、$A(2,2,1)$和 $B(2,1,2)$,求$\angle AMB$.

解 从 M 到 A 的向量记为 $\boldsymbol{a}$,从 M 到 B 的向量记为 $\boldsymbol{b}$,则$\angle AMB$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

$$\boldsymbol{a}=\{1,1,0\},\boldsymbol{b}=\{1,0,1\}.$$

因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times0+0\times1=1,$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

所以

$$\cos\angle AMB=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

从而

$$\angle AMB=\frac{\pi}{3}.$$

【例 7-2-3】 设液体流过平面 S 上面积为 A 的一个区域,液体在这区域上各点处的流速均为(常向量)$\boldsymbol{v}$. 设 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于 S 的单位向量,计算单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一方的液体的质量 P(液体的密度为 ρ).

解 单位时间内流过这区域的液体组成一个底面积为 A、斜高为$|v|$的斜柱体. 这柱体的斜高与底面的垂线的夹角就是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ,所以这柱体的高为$|\boldsymbol{v}|\cos\theta$,体积为

$$A|\boldsymbol{v}|\cos\theta=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}.$$

从而,单位时间内经过这区域流向 n 所指一方的液体的质量为

$$P=\rho A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}.$$

2. 两向量的向量积

在研究物体转动问题时,不但要考虑这物体所受的力,还要分析这些力所产生的力矩.

设 O 为一根杠杆 L 的支点. 有一个力 $\boldsymbol{F}$ 作用于这杠杆上 P 点处. $\boldsymbol{F}$ 与$\overrightarrow{OP}$的夹角为 θ.

由力学规定,力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一向量 $\boldsymbol{M}$,它的模

$$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

而 $\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于$\overrightarrow{OP}$与 $\boldsymbol{F}$ 所决定的平面,$\boldsymbol{M}$ 的指向是按右手规则从$\overrightarrow{OP}$以不超过π的角转向 $\boldsymbol{F}$ 来确定的.

向量积:设向量 $\boldsymbol{c}$ 是由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定出:

$\boldsymbol{c}$ 的模$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角;

$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面,$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定.

那么,向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

根据向量积的定义，力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于$\overrightarrow{OP}$与 $\boldsymbol{F}$ 的向量积，即

$$\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}.$$

向量积的性质：

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(2)对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

如果认为零向量与任何向量都平行，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

数量积的运算律：

(1)交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

(2)分配律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

(3)$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$($\lambda$ 为数).

数量积的坐标表示：设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$. 按向量积的运算规律可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$，所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.$$

为了帮助记忆，利用三阶行列式符号，上式可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=a_yb_z\boldsymbol{i}+a_zb_x\boldsymbol{j}+a_xb_y\boldsymbol{k}-a_yb_x\boldsymbol{k}-a_xb_z\boldsymbol{j}-a_zb_y\boldsymbol{i}\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

【例 7-2-4】　设 $a=(2,1,-1)$，$b=(1,-1,2)$，计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}-4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$

【例 7-2-5】　已知三角形 ABC 的顶点分别是 $A(1,2,3)$、$B(3,4,5)$、$C(2,4,7)$，求三角形 ABC 的面积.

解　根据向量积的定义，可知三角形 ABC 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

由于$\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$