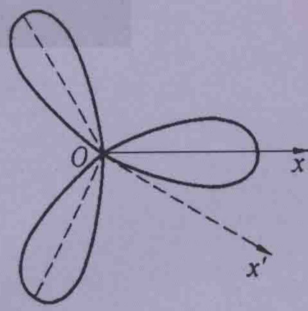

平面解析几何方法与研究

第3卷

刘连璞　编著

PINGMIANJIEXIJIHE
FANGFA YU YANJIU

PINGMIAN JIEXI JIHE FANGFA YU YANJIU

平面解析几何方法与研究

第3卷

● 刘连璞　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

《平面解析几何方法与研究》一书全面系统地介绍了欧氏平面解析几何的有关重要内容，是作者参考了多种有关论著并结合自己的教学经验整理而成的.本书对进一步理解平面解析几何基本内容、拓宽知识面都有很大帮助.对于书中的难点和一般解析几何书中不常见到的内容作者都做了严谨而详细地论述，并配备了较多例题.每个例题都具有典型意义，是对正文的重要补充，这些例题对理解重要概念、掌握解析几何方法有重要作用.因此，本书是一本有价值的数学教学参考书.

本书可作为高中或师范院校学生的课外学习用书，也可供中学或师范院校青年教师参考之用.教师可以从中得到许多与解析几何教材密切联系的重要知识，有助于数学教学工作.

图书在版编目(CIP)数据

平面解析几何方法与研究.第3卷/刘连璞编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.7

ISBN 978-7-5603-5446-0

Ⅰ.①平… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①平面几何—解析几何—研究 Ⅳ.①O182.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第140095号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 宋晓翠 杜莹雪
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张9.5 字数170千字
版　　次 2015年7月第1版 2015年7月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5446-0
定　　价 18.00元

前言

平面解析几何是数学基础课程之一，它对进一步学习近代数学有密切关系.

编者在教学实践中，根据自己的教学经验，陆续积累了这方面的一些材料，本书就是把这些材料加以补充整理而成的.

本书各章节联系紧密，条理清楚，力图避免内容支离破碎.

本书较全面地介绍了欧氏平面解析几何的知识. 例如，在第1章(直角坐标)介绍了有向线段、有向角及射影的基本原理；在第2章(曲线与方程)介绍了曲线的水平渐近线与垂直渐近线的求法；在第3章(直线)介绍了二元一次不等式表示的平面区域、二元二次方程表示两条直线的条件，并且详细讨论了中心直线束；在第4章(圆)介绍了极线、共轴圆系及平面上的反演变换；在第5章(椭圆)、第6章(双曲线)、第7章(抛物线)较详细地介绍了三种圆锥曲线的切线的性质以及极线；在第8章(坐标变换，二次曲线的一般理论)详细地介绍了二次曲线的不变量以及二次曲线的判定与方程的化简；在第9章(参数方程)详细介绍了二次曲线的渐近线、切线与直径；在第9章、第10章(极坐标)介绍了一些常用的经典曲线. 斜角坐标这个内容，在普通解析几何书中很少论及，为此，本书在附录中做了初步介绍.

本书中的定理，凡在普通解析几何书中常见的，或容易证明的，一般不再予以证明；不常见的，都适当地给出了证明. 证明力求严谨.

本书没有配备习题，但给出了一定数量的例题. 这些例题都经过了精心的选择，这对深刻理解本书中的重要概念、掌握基本方法以及提高解题能力都有一定帮助. 有的例题也是对正文内容的补充.

本书可作为学有余力的高中学生的课外学习用书，对扩大他们的知识面，提高学习兴趣有一定帮助；师范院校学生准备将来从事数学教学工作的，他们可以从本书中获得很多有助于教学的知识，为将来工作打好基础；本书也可供青年数学教师参考之用，对加深理解教材，丰富解析几何知识，提高驾驭解析几何方法的能力都有帮助.

编者衷心感谢北京教育学院杨大淳、张鸿顺两位教授，他们审阅了本书的初稿，并提出了宝贵的改进意见. 特别要感谢北京大学数学科学学院姚孟臣副教授，他对本书的编写、出版，一直给予很大关心和帮助，并且详细审阅了本书的最后稿，使本书得到很大改进.

限于编者水平，书中不妥或疏漏在所难免，敬请读者批评指正.

刘连璞

绪论

我们首先介绍一下解析几何的简单历史. 究竟是谁建立了解析几何,它建立在什么年代,所有这些问题,都存在不同意见,这是因为在古代埃及、希腊、罗马时期的实际问题和某些研究中,实际上已经有了属于解析几何的某些内容. 但大多数史学家都认为 17 世纪法国的两位数学家笛卡儿(Rene Descartes, 1596—1650,哲学家、数学家)和费马(Pierre de Fermat, 1601—1665,法学家、数学家)是解析几何的奠基人,并且主要是笛卡儿. 一般认为笛卡儿于 1637 年发表的哲学著作《方法论》中的一个附录"几何学"是解析几何的创始作品,所以我们都认为解析几何建立于 1637 年. 以后又经过数学家们,如牛顿(Isaac Newton, 1642—1727,英国物理学家、数学家)、莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716,德国哲学家、数学家)、欧拉(Leonhard Euler, 1707—1783,瑞士数学家)等人一百多年的改进、补充,才逐渐形成了今天的解析几何. 笛卡儿与费马之所以能建立解析几何,与他们所处的时代是分不开的. 他们所处的时代正是中世纪(5 世纪中叶至 17 世纪中叶)欧洲文艺复兴的后期,这个时期的生产技术、自然科学、文学艺术都出现了新面貌,得到了新发展,所有这一切,都自然而然地对数学提出新问题,希望从数学中得到解决. 这样,在数学中就必须研究曲线,就必须研究长度、面积、体积的计算,就必须研究变量与变量之间的函数关系. 于是在数学中几乎同时引起了三个数学学科的建立,这就是笛卡儿和费马的解析几何与牛顿

和莱布尼兹的微分学与积分学.这几种学科的建立,标志着数学从初等数学(常量数学)发展到了高等数学(变量数学).新学科的建立从本质上改变了整个数学的面貌,使得只用初等数学无法解决的问题变得易于解决了.

笛卡儿等人建立的解析几何有两个基本思想.一个是点的坐标的概念,通过这个概念把点和数联系起来;另一个是曲线方程的概念,通过这个概念把曲线和方程联系起来,这样就可以利用代数或分析的方法来研究几何图形的性质了,这对几何的发展起了巨大的推动作用.

所谓解析几何,通常是指应用代数方程来研究一些简单曲线(如直线、圆锥曲线等)的简单性质的几何.这样,解析几何与我们过去已经学过的初等几何的主要区别不在于它们所研究的对象,而在于研究这些对象时所使用的方法.解析几何使用的是代数解析法,即坐标法;而初等几何使用的是综合法,即古典公理法.现代研究几何还有一种方法,叫作(现代)公理法,这是一套纯理论方法,例如几何基础这个几何分支使用的就是这种方法.研究几何所使用的这些方法的区分并不是绝对的,我们很难划分出综合法与公理法的严格界线,同样,解析法与公理法也不免有混淆的地方.这样的分类不过是根据历史发展的进程而做出的一种不严密的分类而已.

目　录

第 9 章　参数方程

9.1　曲线的参数方程的定义

定义　设在平面上建立了一个直角坐标系 Oxy，t 是某个变数，它的取值范围是由某些实数组成的集合 S，(x,y) 是 Oxy 中点的直角坐标，设 x 和 y 都表示为 t 的函数

$$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}\quad(t\in S)\tag{9.1}$$

如果对于 t 的每个允许值 t_0，由(9.1)所确定的点 $(x_0,y_0)=(f(t_0),g(t_0))$ 都在曲线 C 上；反过来，曲线 C 上任何一点的坐标 (x_1,y_1) 也都可以由 t 的某个允许值 t_1 通过(9.1)得到，那么，方程组(函数表达式组)(9.1)叫作曲线 C 的参数方程(或参数表示). 曲线 C 叫作参数方程(9.1)的曲线. 辅助变数 t 叫作参变数，简称参数.

注意　在参数方程中，应明确参数 t 的取值范围(对于参数方程 $x=f(t)$，$y=g(t)$ 来说，如果 t 的取值范围不同，它们表示的曲线可能是不相同的). 如不明确写出其取值范围，那么，参数的取值范围就理解为 $f(t)$ 和 $g(t)$ 这两个函数的自然定义域的交集.

9.2　曲线的参数方程与普通方程的互化

9.2.1　由曲线的参数方程求普通方程

从曲线的参数方程中把参数消去所得的两个坐标间的关系式，一般就是曲线的普通方程. 消参数没有一般法则可循，有时甚至不可能消掉参数. 例如

$$\begin{cases}x=t+e^t+\lg t^2\\y=t+\sin t+\arcsin t\end{cases}\quad(t\text{ 为参数})$$

就消不掉参数.不过消参数这项工作并不总是必要的,因为有时用参数方程研究曲线比用普通方程更简便.

下面举几个消参数常用的方法.

1.用代入法消参数

这种方法是从参数方程中的一个方程把参数解出来,然后代入参数方程中的另一个方程把参数消去.这是由参数方程求普通方程的基本方法之一.

例1 由曲线的参数方程

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} & (9.2) \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} & (9.3) \end{cases} \quad (\lambda\neq -1,\text{为参数})$$

求它的普通方程,并说明它是什么曲线.

解 由(9.2)得 $x+\lambda x=x_1+\lambda x_2$,由此得

$$\lambda(x-x_2)=x_1-x \tag{9.4}$$

由(9.3)得 $y+\lambda y=y_1+\lambda y_2$,由此得

$$\lambda(y-y_2)=y_1-y \tag{9.5}$$

由(9.4)解出 λ,代入(9.5)得

$$\frac{x_1-x}{x-x_2}=\frac{y_1-y}{y-y_2}$$

由此得

$$\frac{x_1-x}{x_1-x_2}=\frac{y_1-y}{y_1-y_2}$$

这就是曲线的普通方程.

显然,这条曲线是直线.

2.利用三角函数(或代数)的恒等式消参数

如果参数方程中的 x 和 y 都表示为参数的三角(代数)函数,这时可考虑用三角函数(代数)中的某些恒等式消参数.这也是由参数方程求普通方程 的基本方法之一.

例2 由曲线的参数方程

$$\begin{cases} x=\cos(\varphi+\theta) & (9.6) \\ & (\theta\text{ 为参数}) \\ y=\cos(\varphi-\theta) & (9.7) \end{cases}$$

求它的普通方程；并说明它是什么曲线.

解　由(9.6)及(9.7)依次得

$$x=\cos\varphi\cos\theta-\sin\varphi\sin\theta$$

$$y=\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta$$

由这两个等式得

$$x+y=2\cos\varphi\cos\theta$$

$$x-y=-2\sin\varphi\sin\theta$$

由这两个等式又得

$$\frac{x+y}{2\cos\varphi}=\cos\theta,\quad \frac{x-y}{-2\sin\varphi}=\sin\theta$$

把这两个等式左右各平方，然后左右各相加，便得

$$\frac{(x+y)^2}{4\cos^2\varphi}+\frac{(x-y)^2}{4\sin^2\varphi}=1$$

这就是曲线的普通方程.

把这个方程展开、化简，得

$$x^2-2\cos 2\varphi\cdot xy+y^2-\sin^2 2\varphi=0$$

不变量

$$I_2=1\cdot 1-(\cos 2\varphi)^2=\sin^2 2\varphi$$

$$I_3=\begin{vmatrix} 1 & -\cos 2\varphi & 0 \\ -\cos 2\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin^2 2\varphi \end{vmatrix}=-\sin^4 2\varphi$$

所以当 $\varphi=0,\pm\frac{\pi}{2},\pm\pi,\cdots$ 时，$I_2=I_3=0$，所以这时曲线为退缩抛物线；当 $\varphi\neq 0,\pm\frac{\pi}{2},\pm\pi,\cdots$ 时，$I_2>0,I_3\neq 0$，所以这时曲线为椭圆.

3. 应用某些代数运算方法消参数

例如把参数方程中的两个方程相乘、相除、乘方后相加、相减之类的方法消参数.

例3　由曲线的参数方程

$$\begin{cases} x\sin\theta - y\cos\theta = \sqrt{x^2+y^2} & (9.8) \\ \dfrac{\sin^2\theta}{a^2}+\dfrac{\cos^2\theta}{b^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2} & (9.9) \end{cases} \quad (\theta\text{为参数})$$

求它的普通方程;并说明它是什么曲线.

解 把(9.8)的两端平方得

$$x^2\sin^2\theta - 2xy\sin\theta\cos\theta + y^2\cos^2\theta = x^2+y^2$$

移项得

$$x^2\cos^2\theta + 2xy\sin\theta\cos\theta + y^2\sin^2\theta = 0$$

即

$$(x\cos\theta + y\sin\theta)^2 = 0$$

所以有

$$x^2\cos^2\theta = y^2\sin^2\theta \tag{9.10}$$

由(9.9)得

$$\frac{x^2\sin^2\theta + y^2\sin^2\theta}{a^2}+\frac{x^2\cos^2\theta + y^2\cos^2\theta}{b^2}=1 \tag{9.11}$$

由(9.10)和(9.11)得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

这就是曲线的普通方程.

曲线是椭圆.

由曲线的参数方程求曲线的普通方程时,有一个问题必须注意,这就是当求出普通方程以后,原来的曲线可能被扩大了.

例4 已知曲线的参数方程如下:

$$(1)\begin{cases} x=3t^2+1 \\ y=t^2 \end{cases}; \tag{9.12}$$

$$(2)\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=\cos 2\theta \end{cases}. \tag{9.13}$$

这里 t 和 θ 都是参数,它们的取值范围都是$(-\infty,+\infty)$,求曲线的普通方程.

解 (1)用代入法消去 t,得曲线的普通方程

$$x-3y-1=0 \tag{9.14}$$

(9.14)和(9.12)表示的曲线并不相同.事实上,凡(9.12)上的点的坐标都满足(9.14),即凡(9.12)的点都在(9.14)上;而(9.14)上的点的坐标(例如

$(-2,-1)$)并不都满足(9.12),即(9.14)的点并不都在(9.12)上,所以(9.12)的曲线只是(9.14)的曲线的一部分.

(9.14)的曲线是一条直线,这直线和 x 轴相交于点 $A(1,0)$,和 y 轴相交于点 $B(0,-\frac{1}{3})$. 而由(9.12)可得在该曲线上的点的横坐标 $x\geqslant 1$、纵坐标 $y\geqslant 0$,所以(9.12)的曲线只是直线(9.14)的点 $A(1,0)$ 及 A 的斜上方的部分(图9.1实线部分).

因此(9.12)的普通方程应该写成

$$x-3y-1=0 \quad (x\geqslant 1)$$

(2) 由 $y=\cos 2\theta$ 得 $y=1-2\sin^2\theta$,把 $x=\sin\theta$ 代入上面这个方程,得

$$y=-2x^2+1 \tag{9.15}$$

和(1)的道理相同,(9.13)上的点都在(9.15)上,而(9.15)上的点不都在(9.13)上. 这是因为(9.13)的点的坐标 x 和 y 满足不等式 $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$,而(9.15)的点的坐标 x 和 y 满足不等式 $-\infty<x\leqslant+\infty$, $y\leqslant 1$.

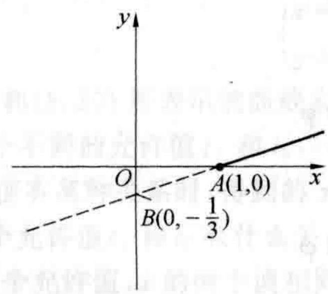

图 9.1

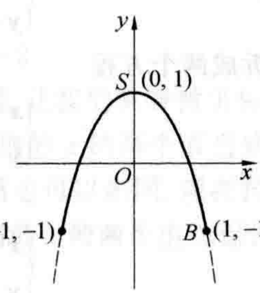

图 9.2

(9.15)的曲线是一条抛物线,而(9.13)的曲线是这条抛物线在点 $A(-1,-1)$ 和点 $B(1,-1)$ 之间的一段弧(图9.2实线部分).

因此(9.13)的普通方程应该写成

$$y=-2x^2+1 \quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

所以由曲线的参数方程化为普通方程后,应检查一下参数方程中 x 与 y 和普通方程中的 x 与 y 的取值范围是否一致. 如果不一致的话,要在普通方程中注明 x 或 y 的取值范围.

9.2.2 由曲线的普通方程求参数方程

首先指出,若已知曲线的普通方程,那么,由这个普通方程可以求出无限多

个参数方程.但是如果已经知道了参数方程中的一个方程,或已知两个坐标之间的某种关系,那么,由此就可以确定曲线的参数方程.

例1 已知曲线的普通方程为$4x^2+y^2-16x+12=0$,它的参数方程中的一个方程为$y=2\sin\varphi$(φ为参数),求这曲线的参数方程.

解 把$y=2\sin\varphi$代入已给曲线的普通方程,得

$$4x^2+4\sin^2\varphi-16x+12=0$$

即

$$x^2-4x+\sin^2\varphi+3=0$$

由此得

$$\begin{aligned}x&=\frac{4\pm\sqrt{16-4(\sin^2\varphi+3)}}{2}\\&=2\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}=2\pm\cos\varphi\end{aligned}$$

所以曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=2\pm\cos\varphi\\y=2\sin\varphi\end{cases}\tag{9.16}$$

这个方程可以拆成两个方程

$$\begin{cases}x=2+\cos\varphi\\y=2\sin\varphi\end{cases}\tag{9.17}$$

和

$$\begin{cases}x=2-\cos\varphi\\y=2\sin\varphi\end{cases}\tag{9.18}$$

但(9.17)和(9.18)所表示的曲线实际上相同.事实上,在(9.17)中给φ以允许值φ_0,则得$x_0=2+\cos\varphi_0$,$y_0=2\sin\varphi_0$,点$(x_0,y_0)=(2+\cos\varphi_0,2\sin\varphi_0)$是(9.17)上一点.在(9.18)中给$\varphi$以允许值$\pi-\varphi_0$,则得$x'=2-\cos(\pi-\varphi_0)=2+\cos\varphi_0=x_0$,$y'=2\sin(\pi-\varphi_0)=2\sin\varphi_0=y_0$.可见(9.18)上的点$(x',y')$也即是(9.17)上的点$(x_0,y_0)$,这即是说,如果在两个参数方程中,给的两个$\varphi$值的和为$\pi$,则得到(9.17)上的点与(9.18)上的点相同,而(9.17)和(9.18)中的φ都可取任意实数,于是可知(9.17)和(9.18)实际上是同一条曲线的参数方程,因此可以取(9.17)或(9.18)作为已知曲线的参数方程.

如果没有注意到(9.17)和(9.18)之间的上述关系,而把(9.16)作为已知曲线的参数方程也可以.

例2 已知曲线的普通方程为$x^2+2xy+y^2+2x-2y=0$,曲线的参数方程中的一个方程为$x=t-t^2$,求这曲线的参数方程.

解　用 $x=t-t^2$ 代入曲线的普通方程,得

$$(t-t^2)^2+2(t-t^2)y+y^2+2(t-t^2)-2y=0$$

由此得

$$y^2-2(t^2-t+1)y+t^4-2t^3-t^2+2t=0$$

解这个二次方程,得

$$\begin{aligned} y&=\frac{2(t^2-t+1)\pm\sqrt{4(t^2-t+1)^2-4(t^4-2t^3-t^2+2t)}}{2} \\ &=(t^2-t+1)\pm(2t-1) \\ &=\begin{cases} t^2+t \\ t^2-3t+2 \end{cases} \end{aligned}$$

因此曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=t-t^2 \\ y=t^2+t \end{cases} \tag{9.19}$$

和

$$\begin{cases} x=t-t^2 \\ y=t^2-3t+2 \end{cases} \tag{9.20}$$

但(9.19)和(9.20)所表示的曲线实际上相同.让我们来看横坐标 $x=t-t^2$.若给 t 某两个不同的允许值 t_1 和 t_2,一般地,得到的 x 的两个值当然不同;但当这两个允许值有某种关系时,得到的 x 的两个值也可以相同.现在我们来看一看,当 t 的两个允许值 t_1 和 t_2 有什么关系时,得到的 x 的两个值总保持相同.若 t 取 t_1,t_2 这两个允许值,x 的两个值相同,则有

$$t_1-t_1^2=t_2-t_2^2$$

移项并分解因式得

$$(t_1-t_2)(t_1+t_2)=t_1-t_2$$

由于 $t_1-t_2\neq 0$,所以有

$$t_1+t_2=1$$

反过来,若 t 的两个允许值 t_1 与 t_2 的和为1,则 x 的两个值必相同.这是因为

$$x_1=t_1-t_1^2$$

$$x_2=t_2-t_2^2=(1-t_1)-(1-t_1)^2=t_1-t_1^2$$

所以 $x_1=x_2$.

不仅如此,这时得到的 y 的两个值也相同,这是因为

$$y_1=t_1+t_1^2$$