黄　真
曾达幸　著

机构自由度计算

原理和方法

高等教育出版社

JIGOU ZIYOUDU JISUAN

黄　真
曾达幸　著

机构自由度计算

原理和方法

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

机构自由度计算：原理和方法 / 黄真，曾达幸著
. -- 北京：高等教育出版社，2016. 1
ISBN 978-7-04-044425-4

Ⅰ. ①机… Ⅱ. ①黄… ②曾… Ⅲ. ①机构学 Ⅳ.
① TH111

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 312362 号

策划编辑	刘占伟	责任编辑	刘占伟	特约编辑	陈　静	封面设计	姜　磊
版式设计	童　丹	插图绘制	杜晓丹	责任校对	张小镝	责任印制	毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	18.25		
字　　数	290 千字	版　　次	2016年 1月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2016年 1月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	69.00 元

物 料 号　44425-00

内容简介

机构的自由度计算是机构设计的一个基本问题。大学本科机械工程专业要培养千千万万个机械工程师，他们将参加方方面面的机械产品创新活动，能够正确分析机构自由度是他们不可或缺的知识和能力。然而，百余年来人们始终未获一个普遍适用的公式，自由度分析遇到了困难。

本书向读者系统地介绍了黄真首创的基于反螺旋理论的自由度通用原理和公式。

本书以螺旋理论最基础的知识和众多的各种类型的实际例子，将这个新的自由度统一原理介绍给读者，让他们了解最必要的自由度基础知识，并能够高效、简洁地对实际工作中遇到的各种各样的机构做出正确的自由度分析，甚至还可以在此基础上进一步深入和提高。

本书分 6 章，主要内容包括螺旋理论基础、基于反螺旋的自由度普遍原理，以及平面机构、并联机构、一般空间机构和复杂网络机构的自由度分析。

本书除了可以作为机械工程专业大学生和广大机械工程师的参考读物外，还可以作为有关研究生及科技人员的参考用书。

作者简介

黄真，1936 年 2 月出生于天津，祖籍江苏宜兴，1959 年毕业于哈尔滨工业大学。现为燕山大学教授，博士生导师。中国机械工程学会机构学专业委员会名誉主任。从事并联机器人理论研究多年，获国家自然科学基金等项目共 20 余项，国内外发表论文 350 余篇，出版著作 6 部，其中包括 2012 年由国际学术组织 IFToMM 推荐的由 Springer 出版社出版的 *Theory of Parallel Mechanisms*。突出贡献是，首创了分析机构自由度的统一通用的原理和公式，解决了困惑机构学界 150 年的历史问题。曾 4 次获得国家教育部和河北省自然科学一等奖，2010 年获 IFToMM 授予的“卓越成就奖”，为该奖设立以来第一次授予的华人学者。

前　言

机构的自由度计算是机构分析和设计的基本问题, 也是大学《机械原理》教科书的一个基本理论, 所有的机械原理书中对此问题都介绍了自由度的 Grübler-Kutzbach (G-K) 公式。确实, G-K 公式比较简单, 仅仅依赖机构中的杆件和运动副的数目, 且仅通过最基础的数学计算就能获得机构自由度的结果。历史上众多的平面机构和一些空间机构的自由度都是用这个公式确定的, 为此它做出了巨大的历史贡献。然而百余年来发现, 不少机构并不服从 G-K 公式, 近半个世纪以来, 出现了空间多自由度机构, 特别是出现有重要用途的并联机构以来, 发现 G-K 公式往往不能得出正确的结果, 这表明 G-K 公式在某种程度上丧失了普遍性。于是许许多多学者潜心研究, 企图提出一种新的真正具有普遍性的自由度公式以代替 G-K 公式。然而 150 余年以来, 这个问题并没有很好地获得解决, 或是出现反例表明仍没有普遍性, 或是理论太深奥、太麻烦并不能适应多自由度所要求判断自由度的性质。这个问题的实质就在于机构中出现了 "过约束", 如何发现和去除过约束就成了自由度计算的关键。

作者黄真于 1997 年在《并联机器人机构学理论及控制》一书中, 首创基于反螺旋理论识别 "过约束" 的自由度原理, 2011 年出版了《论机构自由度——寻找了 150 年的自由度通用公式》一书, 以众多古典的反例机构和现代的并联机构论证了这种原理具有的普遍性, 且能够适应现代多自由度的新要求。这个原理已经编入了研究生教材《高等空间机构学》。但由于该原理需要用到较多的螺旋理论这个数学基础, 目前还难以直接编入大学本科的《机械原理》教材。

机械工程学科要培养出千千万万个机械工程师, 他们将参加方方面面的机械创新活动, 如果没有正确分析机构自由度的能力, 则对他们的创新活动来说是一个很大的缺陷。为此, 我们就想以最通俗的语言, 以最必要且简单的螺旋理论知识, 以较多的各种类型的实际例子, 将这个新的自由度原理介绍给广大的机械

工程学科的大学生和已经在各条战线上从事创新性工作的机械工程师们，作为大学生的课外读物和机械工程师们的参考读物，让他们了解最必要的自由度基础知识，并能够正确地做自由度分析，必要时还可以进一步深入研究。这本书对他们会有帮助。这就是编写本书的目的。

为了适应实际应用的需要，本书把过去仅仅讨论并联机构和古典机构建立起的理论，又扩展到包括一般平面机构和一般多环空间机构等更一般的情况，在这个拓展过程中又解决了许多看来十分困难的理论和实际问题，这两方面是本书对机构学理论上的重要贡献，也补充、丰富和发展了基于螺旋理论的自由度原理。这些将使本书对读者更为实用，更全面，读来更具有兴趣。基于此，本书也适合研究生参看。

作者要深深感谢尊敬的 Duffy 教授，就是因为作者于 1982 年在美国佛罗里达大学做访问学者时，聆听了 Duffy 教授 20 学时的有特色的螺旋理论研究生课程，从中得到了感悟和启发，才有 30 年后解决了机构自由度计算的历史问题。作者愿意以本书的出版，纪念已故的 Duffy 教授。

螺旋的数学表达方式，无论是在几何学上还是物理学上都有十分重要的意义。在几何学上，一个螺旋能表示直线在空间的方向和位置。在物理学上，当它用来表示运动螺旋时，可以表示转动运动，还可以表示移动运动；当它用来表示力螺旋时，可以表示力，还可以表示力偶；当用来表示自由度时，可以表示转动自由度，还可以表示移动自由度；当用来表示约束时，可以表示约束力，还可以表示约束力偶。由于螺旋有如此丰富而多变的表达能力，且上述多个概念之间容易以互逆积而互相转化以讨论不同的几何和物理问题，加之螺旋又容易转化为其他的数学形式，于是方便了数学计算以获得需要的数值。这些特点使得螺旋在机构学上发挥了重要作用，解决了机构学中多方面的问题，包括在机构学上有重大的历史意义的问题。

通过以螺旋理论研究机构自由度问题，作者深深体会到螺旋理论在解决这个实际问题中所表现出的“数学之美”。螺旋理论的妙处在于能够给出最完整和系统的理论和方法。它对众多对偶概念的包容和轻易地相互转换，它解决实际问题的巨大能力，它体现出的简明、对称、协调、韵律和节拍，无不让人感叹数学之美。也希望读者能够从文中欣赏到其中的数学之美，从审美的体验中掌握这种理论和方法。

在此还要深深地感谢国家自然科学基金会，作者在不懈的科学研究中，得到

国家自然科学基金会数十年强有力的支持。没有这种支持, 即使像这本小册子的成果展示也是不可想象的。

虽然作者做了最大的努力和反复地修改, 但限于水平和时间, 书中疏误之处在所难免, 恳请读者和各方面专家批评指正。科学的发展是无止境的, 也希望本书的出版能为后续的研究提供一个更高的平台, 希望能有更简单、更适用的理论问世。

作者黄真今年已满 79 岁, 在如此高龄仍然能够做出创新性成绩, 十分高兴, 并希望以此作为自己 80 岁生日的献礼。今天国家为实现两个 100 年的伟大目标, 号召人人都参与创新。愿年轻朋友一定要去除保守思想, 创新就在你们脚下!

本书作者愿意回答读者各方面的问题, 请联系如下 Email 信箱: huangz@ysu.edu.cn

黄真
燕山大学 秦皇岛海滨
2015 年 2 月 16 日

目　录

第 1 章　螺旋理论基础

机构的自由度分析之所以成为问题, 是因为长期以来一直找不到一种能够普遍适用的、通用的自由度分析的原理、方法和公式, 特别是发现过去应用的自由度公式不适用于现今广泛关注的“并联机构和并联机器人”, 自由度问题就这样成了研究的热点。人们提出过许多方法, 却一直没有得到真正解决。问题如此困难之原因, 正是机构中存在的难以捉摸的“过约束”, 即约束被重复计算而得不到正确的结果。

黄真求解并联机构的思路是通过采取反螺旋理论, 以寻找机构中的“过约束”, 从而打开突破难题的隘口。机构中的过约束, 有如病人身体中的病灶或结节, 医生用手术刀可以处理病灶, 而螺旋理论正是机构学家处理机构中结节的手术刀。

用螺旋理论分析空间机构特别方便, 它具有几何概念清楚、物理意义丰富、表达形式简单、数学运算方便、理论难度也并不很高等优点, 因而在机构学中得到了广泛的应用。特别是近 30 多年来在机构学中的许多前沿性有难度的问题上, 螺旋理论常常领先作出了贡献, 尤其解决了长期困扰机构学界的自由度分析问题, 表现出强大的生命力。

本章针对分析自由度之需要, 将简要介绍螺旋理论最基本的知识[1-3]。首先从空间直线矢量的 Plücker 坐标引出两个重要概念, 即线矢量和螺旋, 讨论它们的数学物理性质和代数运算; 然后重点介绍螺旋系、反螺旋和反螺旋系等最基本的螺旋理论知识。

1.1 线矢量及螺旋

1.1.1 直线的矢量方程

空间有两个点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$, AB 具有单位长度, 见图 1.1a。若按一定的顺序连接这两点后, 就决定了一条空间直线的位置和方向, 这条有向的直线段的方向就可由单位矢量 $\boldsymbol{S}$ 表示。

若给定直线方向, 直线在空间的位置可通过直线上某点 A 的矢径 $\boldsymbol{r}_1$ 给定。这样, 这条直线的方程可以用矢量形式表示

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0} \tag{1.1}$$

将上式再改写就得到直线方程的标准矢量形式

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_0 \tag{1.2}$$

式中, $\boldsymbol{S}_0$ 为直线的某个位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 与矢量 $\boldsymbol{S}$ 的叉积

$$\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{S} \tag{1.3}$$

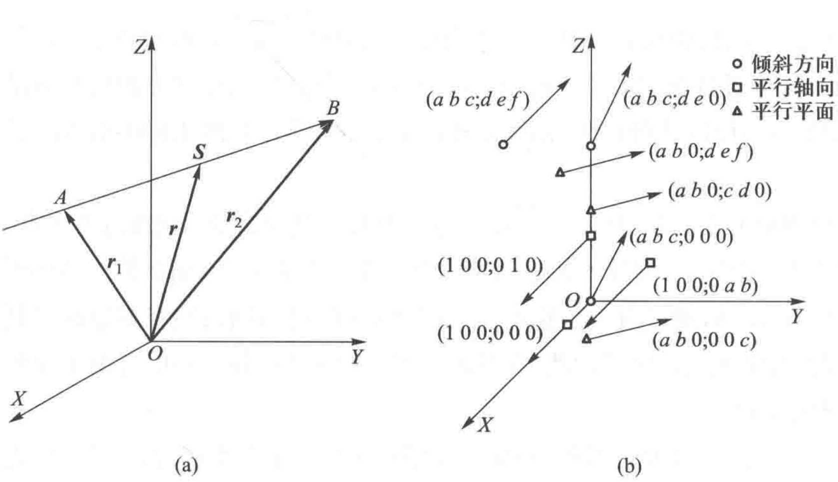

图 1.1 直线的 Plücker 坐标

定义 1.1 线矩 $\boldsymbol{S}_0$ 被称为矢量 $\boldsymbol{S}$ 对原点的线矩。

线矩也是矢量，其大小及方向与矢量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{r}_1$ 在空间的方向位置有关。若 $\boldsymbol{S}$ 是单位矢量，$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}=1$，则线矩 $\boldsymbol{S}_0$ 的模表示直线到原点的距离。单位矢量 $\boldsymbol{S}$ 可以表示为方向余弦，它没有单位，而 $\boldsymbol{S}_0$ 却具有长度单位。当矢量 $\boldsymbol{S}$ 过原点，其线矩为零，$\boldsymbol{S}_0=\boldsymbol{0}$。当 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{S}_0$ 给定后，直线在空间的方向及位置都被确定，而且它们是一一对应的。显然矢量 $\boldsymbol{S}$ 与其对原点之线矩 $\boldsymbol{S}_0$ 是互为正交的，$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}_0=0$。$\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{S}_0$ 这两个矢量就完全决定了直线在空间的方向和位置，因而就可以用这两个矢量结合成的对偶矢量 $(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$ 来表示一条空间直线[4]。

直线的 $(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$ 表示又称为直线的 Plücker 坐标。两个矢量的如此结合形成的对偶矢量，其中的 $\boldsymbol{S}$ 为对偶矢量的原部，$\boldsymbol{S}_0$ 为对偶矢量的对偶部。空间中的直线与其 Plücker 坐标 $(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$ 是一一对应的。由于 $\boldsymbol{S}$ 是单位矢量，它可以用 3 个方向余弦表示，$\boldsymbol{S}=(l\quad m\quad n)$；式 (1.3) 中 $\boldsymbol{S}_0$ 表示为两矢量的叉积，$\boldsymbol{S}_0$ 不是单位矢量，它也可以写成 $\boldsymbol{S}_0=(p\quad q\quad r)$。这样直线的 Plücker 坐标 $(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$ 又可以用如下 6 个标量元素表示:

$$(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)=(l\quad m\quad n;\quad p\quad q\quad r) \tag{1.4}$$

式中，在 6 个元素中间的分号表示其前后分别是那两个矢量 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{S}_0$。

图 1.1b 中表示了各种不同位置下直线的 Plücker 坐标。可以看到，当直线在空间对坐标系有不同的位置和不同的方向时，它们的 Plücker 坐标中的零元素的数目及位置也不同。

因为直线 $\boldsymbol{S}$ 与其线矩 $\boldsymbol{S}_0$ 为正交，即 $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}_0=0$，故由式 (1.4) 有如下代数式:

$$lp+mq+nr=0 \tag{1.5}$$

据式 (1.5)，这 6 个标量 l,m,n,p,q,r 中只有 5 个是独立的，在三维空间中就有 ∞^5 条不同方向、位置和长度的有向线段。由式 (1.2) 也可以得出，该直线方程取决于矢量 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 的 5 个独立的参数。

从上面的分析可知，直线可以用 Plücker 坐标 $(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)=(l\quad m\quad n;\quad p\quad q\quad r)$ 表示。最重要的是，一个对偶矢量 $(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$ 对应空间唯一的一条直线，而空间的一条直线也唯一地对应一组对偶矢量 $(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$，它们具有一一对应的性质。

例 1.1

$(l\quad m\quad n;\quad 0\quad 0\quad 0)$ 为过原点的直线，其方向余弦为 $(l\quad m\quad n)$;

$(1 \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad a \quad b)$ 为一条平行 $\boldsymbol{X}$ 轴但不过原点的空间直线;

$(l \quad m \quad n;\quad p \quad q \quad r)$, 且 $lp + mq + nr = 0$。这是一条不过原点、方向为 $(l \quad m \quad n)$ 的直线。

1.1.2 直线到原点的距离和两直线的互矩

若有过原点的矢量 $\boldsymbol{T}$ 垂直于直线 $(\boldsymbol{S};\boldsymbol{S}_0)$, 见图 1.2, 则矢量 $\boldsymbol{OP}$ 的模 $|\boldsymbol{T}|$ 是从原点 O 到直线的距离, 由于矢量 $\boldsymbol{T}$ 的端点在直线 $\boldsymbol{S}$ 上, 满足直线方程 (1.2), 即 $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_0$。将此等式两边左面叉乘 $\boldsymbol{S}$, 有 $\boldsymbol{S} \times (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{S}) = \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}_0$。展开左边矢量的三重叉积, 有

$$\boldsymbol{S} \times (\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{S}) = (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S})\boldsymbol{T} - (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{T})\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S})\boldsymbol{T}$$

解出 $\boldsymbol{T}$, 有

$$\boldsymbol{T} = \frac{\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}_0}{\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{S}} \tag{1.6}$$

因为直线 $\boldsymbol{S}$ 与其线矩相互垂直, 上式可写为

$$\boldsymbol{T} = \frac{|\boldsymbol{S}||\boldsymbol{S}_0|}{|\boldsymbol{S}||\boldsymbol{S}|}\boldsymbol{e} = \frac{|\boldsymbol{S}_0|}{|\boldsymbol{S}|}\boldsymbol{e}$$

这里 $\boldsymbol{e}$ 是单位矢量, 其方向由 $\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}_0$ 决定, 这样直线 $\boldsymbol{S}$ 到原点的距离 $|\boldsymbol{T}|$ 为 $|\boldsymbol{S}_0|/|\boldsymbol{S}|$。

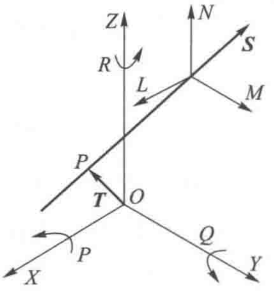

图 1.2 直线到原点的距离

可以看到, 当 $\boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{0}$, 则 $|\boldsymbol{T}| = 0$, 直线到原点的距离为零, 即直线过原点。此时直线的 Plücker 坐标为 $(\boldsymbol{S};\boldsymbol{0})$, 即 $(l \quad m \quad n;\quad 0 \quad 0 \quad 0)$。反之, 若 Plücker 坐标的前 3 个标量为零, 即当 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$, 而 $|\boldsymbol{S}_0|$ 为有限值, $|\boldsymbol{T}| = \infty$, 此时直线位于距原点无穷远的平面上, Plücker 坐标可以写成 $(\boldsymbol{0};\boldsymbol{S}_0)$。因为此时对于任何选择的原