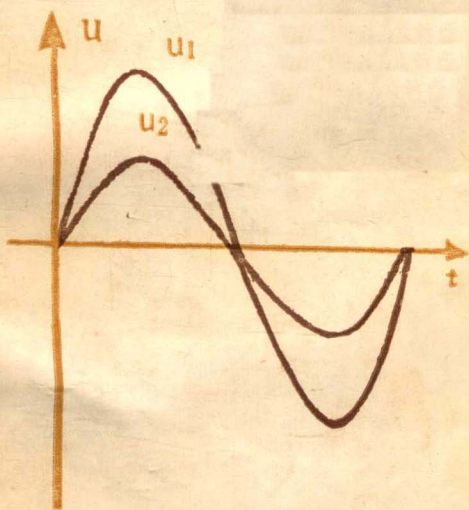


高中

GAOZHONG SHUXUE  
FUXITI JINGXUAN

数学复习题精选



# 高中数学复习题精选

《高中数学复习题精选》编写组编

江苏教育出版社

(苏)新登字第003号

高中数学复习题精选  
《高中数学复习题精选》编写组编  
编辑 喻 纬

出版发行：

教 育 出 版 社

(

邮政编码：210009)

省 新 华 书 店

新 华 印 刷 厂

号 邮 政 编 码：223001)

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 12.75 字数 300,000

1990年5月第2版 1992年2月第4次印刷

印数 152,091—202,120

ISBN 7-5343-0765-1

G·672

定价：3.50元

江苏教育版图书若有印刷装订错误，可向承印厂调换

# 说 明

最近几年，由于高中数学教学要求与高考命题范围不断调整，配套的高中数学课本来不及编写出版，因而造成高中毕业班数学总复习时间较长又“无本可循”的状况。各地高中毕业班师生都渴望得到要求恰当、使用方便、确实有助于提高总复习教学质量的材料。为此，编写了本书。

本书实际上给出了一个143课时的高中数学总复习教学设计的全套实施材料。前四章按平面三角、立体几何、代数、平面解析几何的顺序编排，以便逐渐增强综合性。这四章共安排了65个小单元，每个小单元由预习题、例题与习题三部分构成，例题均附有提炼解题经验的“说明”，教学时间至多不超过3课时。其中一些单元具有“微型专题讲座”的性质。在第五章“综合复习”中，专辟5个专题讲座，进一步融双基复习与解题训练为一体。全书解题训练系列性强，层次丰富，便于学生拾级而上，稳步达到高考水平。

本书的编写方案，是由编写组集体讨论制定的，力图系统整理江苏省有关重点中学指导高考数学（理科）复习的丰富资料与经验。编写分工情况如下：

第一章，由吴县木渎中学高级教师孙镇荣、马澄玉、赵季康执笔；

第二章，由常熟中学高级教师赵善祐执笔；

第三章，由江阴市南菁中学高级教师李金安、勇青、韩连华执笔；

第四章，由泰县姜堰中学高级教师钱忠继、沈骅、黄华幸执笔；

第五章，第一、二、三节由泰兴中学高级教师常新民、韩林章、一级教师黄银生执笔，第四节由扬州中学高级教师张乃达执笔，第五节由常州中学特级教师杨浩清执笔。

全书由无锡县教研室中学高级教师蒋国华，无锡县天一中学高级教师胡琛、张颀、钱颂鸣、一级教师沈少华统稿。部分原稿经统稿者改写或重写。插图由浦云龙绘制。

由于水平有限，时间匆促，书中缺点错误在所难免，恳请广大读者批评指正。

《高中数学复习题精选》编写组

一九八九年七月

# 目 录

## 第一章 平面三角(20课时)

一 三角函数的定义、图象和性质	1
1.1 三角函数的定义域和值域(2课时)	1
1.2 三角函数的图象(1课时)	5
1.3 三角函数的性质(2课时)	8
二 三角式的恒等变形	13
1.4 三角函数的求值(2课时)	13
1.5 三角函数式的化简和证明(2课时)	19
1.6 三角条件等式的证明(2课时)	23
三 反三角函数和简单的三角方程	28
1.7 反三角函数(2课时)	28
1.8 简单的三角方程(2课时)	33
四 三角的应用及综合练习	38
1.9 三角的应用(3课时)	38
1.10 三角综合练习(2课时)	46
复习题选	51

## 第二章 立体几何(18课时)

一 直线和平面	55
2.1 平面及其基本性质(2课时)	55
2.2 两条直线的位置关系(1课时)	59
2.3 直线与平面的位置关系(2课时)	62
2.4 两平面的位置关系(2课时)	67

2.5	角与距离的计算 (2 课时)	71
<b>二</b>	<b>多面体与旋转体</b>	79
2.6	棱柱、棱锥和棱台 (2 课时)	79
2.7	圆柱、圆锥和圆台 (2 课时)	85
2.8	球及组合几何体 (2 课时)	92
2.9	截面与最值 (2 课时)	99
2.10	立几综合题选讲 (1 课时)	104
	<b>复习题选</b>	108

### 第三章 代数(50课时)

<b>一</b>	<b>幂函数、指数函数和对数函数</b>	111
3.1	集合 (2 课时)	111
3.2	映射与函数 (2 课时)	115
3.3	函数的性质 (2 课时)	121
3.4	幂函数 (4 课时)	125
3.5	指数函数与对数函数 (2 课时)	129
3.6	图象与方程 (2 课时)	136
<b>二</b>	<b>数列、数学归纳法、数列的极限</b>	142
3.7	等差数列和等比数列 (2 课时)	142
3.8	等差数列与等比数列的综合运用 (2 课时)	147
3.9	由递推式给出的数列 (1 课时)	151
3.10	数学归纳法 (2 课时)	154
3.11	数列的极限 (2 课时)	159
3.12	数列极限的应用 (1 课时)	163
<b>三</b>	<b>不等式</b>	167
3.13	不等式的性质和用比较法证明不等式(2课时)	168
3.14	用综合法、分析法、数学归纳法证明不等式	

	(2 课时).....	172
3.15	解代数不等式 (2 课时).....	178
3.16	解指数不等式和解对数不等式 (2 课时).....	184
3.17	不等式的应用 (2 课时).....	187
<b>四</b>	<b>复数</b> .....	191
3.18	复数的概念 (2 课时).....	192
3.19	复数的运算 (2 课时).....	196
3.20	复数与方程 (2 课时).....	201
3.21	复数与几何 (2 课时).....	205
<b>五</b>	<b>排列、组合和二项式定理</b> .....	211
3.22	加法原理与乘法原理, 排列数与组合数公式 (1 课时).....	212
3.23	排列的应用 (2 课时).....	214
3.24	组合的应用 (1 课时).....	219
3.25	排列与组合的混合应用 (1 课时).....	221
3.26	二项式定理及其应用 (3 课时).....	223
<b>复习题选</b>	.....	230

## 第四章 平面解析几何(28课时)

<b>一</b>	<b>直线</b> .....	232
4.1	直角坐标系及线段定比分点公式 (2 课时).....	232
4.2	直线 (一) (2 课时).....	237
4.3	直线 (二) (1 课时).....	242
4.4	用解析法证明几何问题 (1 课时).....	244
<b>二</b>	<b>圆锥曲线</b> .....	247
4.5	圆的方程及有关圆的问题 (2 课时).....	249
4.6	椭圆的定义、方程及性质 (2 课时).....	254



4.7	双曲线的定义、方程及性质 (2 课时)	258
4.8	抛物线的定义、方程及性质 (2 课时)	264
4.9	有关二次曲线弦的问题 (1 课时)	268
4.10	曲线系方程及其应用 (1 课时)	271
<b>三</b>	<b>极坐标和参数方程</b>	<b>273</b>
4.11	参数方程与普通方程的互化 (1 课时)	273
4.12	直线参数方程及其应用 (1 课时)	276
4.13	圆锥曲线的参数方程及其应用 (1 课时)	279
4.14	极坐标系及极坐标与直角坐标的互化 (1 课时)	282
4.15	直线与圆的极坐标方程 (1 课时)	285
4.16	圆锥曲线的极坐标方程 (1 课时)	287
<b>四</b>	<b>曲线和方程</b>	<b>291</b>
4.17	用直接法求轨迹方程 (2 课时)	291
4.18	用间接法求轨迹方程 (2 课时)	295
4.19	韦达定理、判别式在解几中的应用 (2 课时)	299
	<b>复习题选</b>	<b>303</b>

## 第五章 综合复习(27课时)

<b>一</b>	<b>怎样解选择题 (6 课时)</b>	<b>305</b>
<b>二</b>	<b>数形结合 (4 课时)</b>	<b>318</b>
<b>三</b>	<b>分域讨论 (4 课时)</b>	<b>327</b>
<b>四</b>	<b>参数法 (7 课时)</b>	<b>336</b>
<b>五</b>	<b>综合题解题途径的探求 (6 课时)</b>	<b>350</b>
	<b>复习题选</b>	<b>365</b>
	<b>答案与提示</b>	<b>367</b>

# 第一章 平面三角

## 一 三角函数的定义、图象和性质

### 复习要点

角的概念与度量。三角函数的定义与符号。三角函数的图象。三角函数的定义域、值域、单调性、奇偶性和周期性。

### 1.1 三角函数的定义域和值域(2课时)

#### 预习题

1. 若 $\sin\theta \cdot \cos\theta > 0$ , 则 $\theta$ 是第\_\_\_象限的角;  
若 $\operatorname{tg}\theta \cdot \sin\theta < 0$ , 则 $\theta$ 是第\_\_\_象限的角.
2. 若 $\theta$ 分别为第一、二、三、四象限角时,  $\frac{\theta}{2}$ 分别为第\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_象限的角.
3. 填出下列不等式的解集:  
 $\sin x > 0.5$ ,  $x \in$  \_\_\_\_\_;  $2\cos x \geq -\sqrt{2}$ ,  $x \in$  \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_,  $\operatorname{tg} x + 1 < 0$ ,  $x \in$  \_\_\_\_\_.
4. 函数 $y = \lg \cos x$ 的定义域是 \_\_\_\_\_; 函数 $y = 2^{\operatorname{tg}\theta}$ 的定义域是 \_\_\_\_\_.
5. 函数 $y = -2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$ 的值域是 \_\_\_\_\_;  
函数 $y = \operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x$ 的值域是 \_\_\_\_\_.

#### 例题

例1 求函数 $y = \frac{\lg(\operatorname{tg} x + 1)}{\sqrt{2\cos x - 1}}$ 的定义域.

**略解** 要使函数有意义, 须

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + 1 > 0, & \implies k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, \\ 2\cos x - 1 > 0, & \implies 2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{3}, \\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

$\therefore$  函数定义域为  $2k\pi - \frac{\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

**说明** 求三角函数定义域时, 除注意分母不等于零等条件外, 还要注意三角函数本身的定义域。此外, 往往要解三角不等式(组), 其依据是函数的单调性。在求三角不等式组的解集时, 可利用图形直接求出其公共部分, 如例 1 可通过图 1-1 求得结果。

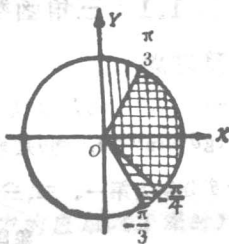


图 1-1

**例 2** 求下列函数的值域:

(1)  $y = \cos 2x - 4\sin x$ ;

(3)  $y = \frac{2 - \sin x}{2 - \cos x}$ .

(2)  $y = 3\sqrt{3}\cos 2x + 3\sin 2x$ ;

**略解** (1)  $y = -2\sin^2 x - 4\sin x + 1 = -2(\sin x + 1)^2 + 3$ .

$\because 0 \leq |\sin x + 1| \leq 2, \therefore$  函数的值域是  $[-5, 3]$ .

(2)  $y = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 6\sin(60^\circ + 2x)$ .

$\therefore$  函数的值域是  $[-6, 6]$ .

(3) 由  $y = \frac{2 - \sin x}{2 - \cos x}$  去分母得  $\sin x - y \cos x = 2 - 2y$ ,

和差化积得  $\sqrt{1+y^2} \sin(x-\varphi) = 2-2y$ .

即有  $\sin(x-\varphi) = \frac{2-2y}{\sqrt{1+y^2}}$ ,

$$\therefore \left| \frac{2-2y}{\sqrt{1+y^2}} \right| \leq 1, \text{ 解得 } \frac{4-\sqrt{7}}{3} \leq y \leq \frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

$\therefore$  函数的值域是  $\left[ \frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3} \right]$ .

**说明** 例 2(3)除上述解法外, 还可设  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , 利用万能公式化为以  $t$  为自变量的函数式, 再用判别式法求值域. 或把函数值域看作过  $A(2, 2)$ ,  $B(\cos x, \sin x)$  的直线斜率的取值范围, 其中  $B$  是单位圆上的动点, 利用几何法求值域.

**例 3** 求函数  $y = 1 + \sin x + \cos x + \sin x \cos x$  的最值, 其中  $x \in [-\pi, \pi]$ .

**略解**  $y = (1 + \sin x)(1 + \cos x)$

$$= 4 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \cos^2 \frac{x}{2} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \right]^2.$$

$$\therefore -\pi \leq x \leq \pi \implies -\frac{3\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} - x \leq \frac{5\pi}{4},$$

$$\therefore -1 \leq \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \leq 1.$$

当  $\cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = 1$  时,  $y$  有最大值  $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ , 这时  $x = \frac{\pi}{4}$ ; 当  $\cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  时,  $y$  有最小值 0, 这时  $x = -\frac{\pi}{2}$  或  $\pi$ .

**说明** 注意到函数的对称性, 本例可令  $\sin x + \cos x = t$  ( $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ ), 则  $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{t^2 - 1}{2}$ . 将原函数化为关于  $t$  的有约定定义域的二次函数, 易求出函数的最值.

**例 4** 设  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ , 若对于任何实数  $x$ , 不等式

$$x^2 + x \cos \alpha + \frac{3}{4} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2} > 0 \text{ 恒成立. 求 } \alpha \text{ 的取值范围.}$$

**略解** 由题设得  $\Delta = \cos^2 \alpha - 4\left(\frac{3}{4} \sin^2 \alpha - \frac{1}{2}\right) < 0$ . 即

$$\cos^2 \alpha - 3\sin^2 \alpha + 2 < 0. \therefore \sin \alpha > \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 或 } \sin \alpha < -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$$

$$\therefore \text{不等式的解为 } \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{2\pi}{3} \text{ 或 } \frac{4\pi}{3} < \alpha < \frac{5\pi}{3}.$$

### 习题

1. 已知角  $\theta$  的终边上有点  $P(1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$ , 求  $\sin \theta$  和  $\operatorname{tg} \theta$ .
2. 分别写出函数  $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$  和  $y = \lg \sin x$  的定义域.
3. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{-\sin x} + \sqrt{\cos x}; \quad (2) y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \sin x};$$

$$(3) y = \frac{4}{2\sin^2 x - 5\sin x - 3}; \quad (4) y = \lg(2\cos x - \sqrt{3}).$$

4. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{\sin x} + \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}};$$

$$(2) y = \sqrt{\cos 2x} + \lg(3 - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg}^2 x).$$

5.  $\alpha$  为何值时, 函数  $\log_{\sin \alpha} \left( \cos \alpha + \frac{1}{2} \right)$  有意义?

6. 求下列函数的值域:

$$(1) y = 5 - \sin^2 x;$$

$$(2) y = \cos x + \sqrt{3} \sin x;$$

$$(3) y = \frac{1 + 3\sin x}{2 + 3\sin x}$$

7.  $m$  为何值时, 函数  $\sin x = \sqrt{\frac{3m}{2-m}}$  有意义?

8. 求函数  $y = \sqrt{2\sin^2 x + 3\cos x - 3}$  的定义域和值域.

## 1.2 三角函数的图象(1课时)

### 预习题

1. 函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  的振幅, 周期, 频率和初相分别是什么?

2. 将  $y = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位, 所得曲线的函数式是什么?

### 例题

**例 1** 用五点法作出函数  $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$  的图象, 并说明这个图象可由  $y = \sin x$  的图象经过怎样的变换而得到.

$x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{3}$
$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$y$	0	2	0	-2	0

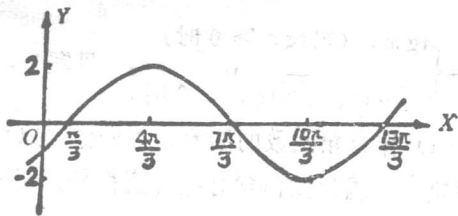


图 1-2

解 先列表, 再描点作图。

可以先把  $y = \sin x$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位得

到  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  的图象, 再把所得图象上所有点的横

坐标伸长到原来的 2 倍得到  $y = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$  的图象, 然后把

所得图象上各点的纵坐标伸长到原来的 2 倍得到  $y =$

$2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$  的图象。

**说明** 本例牵涉到位相, 周期和振幅等三种变换, 是正弦曲线变换的典型例题, 请读者细心体察。

**例 2** 作下列函数的图象:

$$(1) y = \frac{\sin x + |\sin x|}{2}; \quad (2) y = |\operatorname{tg} x|.$$

**解** (1)  $y = \begin{cases} \sin x, & (\text{当 } \sin x \geq 0 \text{ 时}) \\ 0, & (\text{当 } \sin x < 0 \text{ 时}) \end{cases}$  见图 1-3.

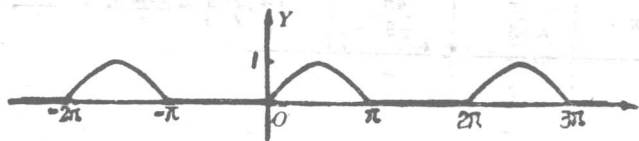


图 1-3

(2)  $y = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & (\text{当 } \operatorname{tg} x \geq 0 \text{ 时}) \\ -\operatorname{tg} x, & (\text{当 } \operatorname{tg} x < 0 \text{ 时}) \end{cases}$  见图 1-4.

**说明** (1) 作三角函数的图象, 可先作出原点附近一个周期内的图象。若函数式内含有绝对值符号, 应先化去绝对值号, 再根据要求作图。

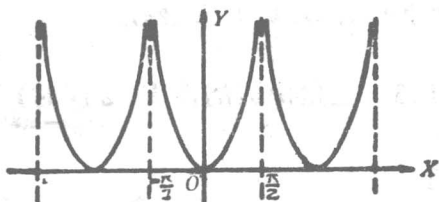


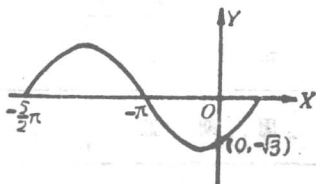
图 1-4

(2) 例 2(2)也可先作出函数  $y = \operatorname{tg} x$  的图象, 再作出  $x$  轴下方的部分关于  $x$  轴对称的图象, 即得  $y = |\operatorname{tg} x|$  的图象.

**例 3** 已知正弦函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  (其中  $A > 0$ ,  $\omega > 0$ ) 的一个周期的图象如图 1-5 所示, 试求函数的解析式.

**略解** 由题中所给的图知

$$\begin{cases} \omega \left(-\frac{5}{2}\pi\right) + \varphi = 0, \\ \omega(-\pi) + \varphi = \pi, \\ A \sin \varphi = -\sqrt{3}. \end{cases}$$



解得  $A = 2$ ,  $\omega = \frac{2}{3}$ ,  $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ . 图 1-5

$\therefore$  函数式为  $y = 2 \sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{5\pi}{3}\right)$ .

**说明** 合理选点对已知图象求函数这类问题至关重要.

### 习题

1. 函数  $y = \frac{1}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}\right)$  的振幅, 周期, 频率和初相各是什么?
2. 作出下列函数的图象:
  - (1)  $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ ; (2)  $y = |\cos x| + \cos x$ .
3. 已知正弦曲线  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  上的一个最高点是  $(2, \sqrt{2})$ , 由这个最高点到相邻的最低点曲线与  $x$  轴相交于点  $(6, 0)$ , 求函数



解析式(其中 $A>0$ ,  $\omega>0$ ,  $0<\varphi<2\pi$ ).

### 1.3 三角函数的性质(2课时)

#### 预习题

填写下表:

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$
单调递减区间			
单调递增区间			
奇 偶 性			
周 期 性			

#### 例题

例1 求下列函数的单调区间:

$$(1) y = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right); \quad (2) y = \log_{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\omega}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

略解 (1) 当  $k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2}$  时,

即  $\frac{k\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} < \omega < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$  时, 函数单调递增.

$\therefore$  函数的递增区间是  $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) (k \in \mathbb{Z})$

(2) 由函数定义域知  $\cos\left(\frac{\omega}{3} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ ,