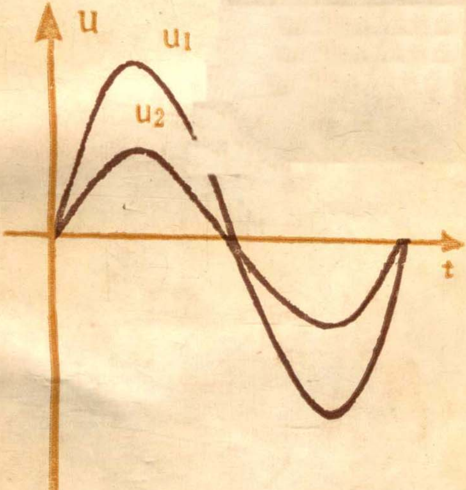
高中数学复习题精选

GAOZHONG SHUXUE FUXITI JINGXUAN



江苏教育出版社

高中数学复习题精选

《高中数学复习题精选》编写组编

江苏教育出版社

（苏）新登字第003号

高中数学复习题精选

《高中数学复习题精选》编写组编
编辑 喻 纬

出版发行： 教 育 出 版 社
（ ，邮政编码：210009）
省 新 华 书 店
新 华 印 刷 厂
号 邮政编码：223001）

开本 787×1092毫米 1/32 印张 12.75 字数 300,000
1990年5月第2版 1992年2月第4次印刷
印数 152,091—202,120

ISBN 7—5343—0765—1

G·672 定价：3.50元

说　明

最近几年，由于高中数学教学要求与高考命题范围不断调整，配套的高中数学课本来不及编写出版，因而造成高中毕业班数学总复习时间较长又“无本可循”的状况。各地高中毕业班师生都渴望得到要求恰当、使用方便、确实有助于提高总复习教学质量的资料。为此，编写了本书。

本书实际上给出了一个143课时的高中数学总复习教学设计的全套实施材料。前四章按平面三角、立体几何、代数、平面解析几何的顺序编排，以便逐渐增强综合性。这四章共安排了65个小单元，每个小单元由预习题、例题与习题三部分构成，例题均附有提炼解题经验的“说明”，教学时间至多不超过3课时。其中一些单元具有“微型专题讲座”的性质。在第五章“综合复习”中，专辟5个专题讲座，进一步融双基复习与解题训练为一体。全书解题训练系列性强，层次丰富，便于学生拾级而上，稳步达到高考水平。

本书的编写方案，是由编写组集体讨论制定的，力图系统整理江苏省有关重点中学指导高考数学（理科）复习的丰富资料与经验。编写分工情况如下：

第一章，由吴县木渎中学高级教师孙镇荣、马澄玉、赵季康执笔；

第二章，由常熟中学高级教师赵善祜执笔；

第三章，由江阴市南菁中学高级教师李金安、勇青、韩连华执笔；

第四章，由泰县姜堰中学高级教师钱忠继、沈骅、黄华幸执笔；

第五章，第一、二、三节由泰兴中学高级教师常新民、韩林章、一级教师黄银生执笔，第四节由扬州中学高级教师张乃达执笔，第五节由常州中学特级教师杨浩清执笔。

全书由无锡县教研室中学高级教师蒋国华，无锡县天一中学高级教师胡琛、张頔、钱颂鸣、一级教师沈少华统稿。部分原稿经统稿者改写或重写。插图由浦云龙绘制。

由于水平有限，时间匆促，书中缺点错误在所难免，恳请广大读者批评指正。

《高中数学复习题精选》编写组

一九八九年七月

目　录

第一章　平面三角(20课时)

第二章　立体几何(18课时)

第三章　代数(50课时)

第四章 平面解析几何（28课时）

第五章 综合复习(27课时)

第一章　平面三角

一　三角函数的定义、图象和性质

复习要点

角的概念与度量。三角函数的定义与符号。三角函数的图象。三角函数的定义域、值域、单调性、奇偶性和周期性。

1.1　三角函数的定义域和值域（2课时）

预习题

1. 若$\sin\theta\cdot\cos\theta>0$，则$\theta$是第___象限的角；
若$tg\theta\cdot\sin\theta<0$，则$\theta$是第___象限的角。

2. 若θ分别为第一、二、三、四象限角时，$\frac{\theta}{2}$分别为第______________________________象限的角。

3. 填出下列不等式的解集：
$\sin x>0.5$，$x\in$ __________，$2\cos x\geqslant-\sqrt{2}$，$x\in$ ____________________，$tg x+1<0$，$x\in$ __________。

4. 函数$y=\lg\cos x$的定义域是__________，函数$y=2^{tg\theta}$的定义域是__________。

5. 函数$y=-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+3$的值域是__________；
函数$y=tg^2x+4tg x$的值域是__________。

例题

例1　求函数$y=\frac{\lg(tg x+1)}{\sqrt{2\cos x-1}}$的定义域。

略解 要使函数有意义，须

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x+1>0, & \Longrightarrow k\pi-\dfrac{\pi}{4}<x<k\pi+\dfrac{\pi}{2}, \\ 2\cos x-1>0, & \Longrightarrow 2k\pi-\dfrac{\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{3}, \\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2} \ (k\in Z). \end{cases}$$

$\therefore$ 函数定义域为$2k\pi-\dfrac{\pi}{4}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$ $(k\in Z)$.

说明 求三角函数定义域时，除注意分母不等于零等条件外，还要注意三角函数本身的定义域. 此外，往往要解三角不等式(组)，其依据是函数的单调性.在求三角不等式组的解集时，可利用图形直接求出其公共部分，如例 1 可通过图 1-1 求得结果.

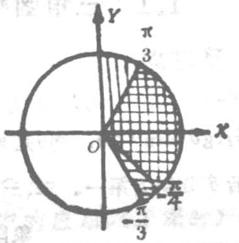


图 1-1

例 2 求下列函数的值域：

(1) $y=\cos 2x-4\sin x$;

(2) $y=3\sqrt{3}\cos 2x+3\sin 2x$;

(3) $y=\dfrac{2-\sin x}{2-\cos x}$.

略解 (1) $y=-2\sin^2 x-4\sin x+1=-2(\sin x+1)^2+3$.

$\because$ $0\leqslant|\sin x+1|\leqslant 2$, $\therefore$ 函数的值域是$[-5, 3]$.

(2) $y=6\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)=6\sin(60^\circ+2x)$.

$\therefore$ 函数的值域是$[-6, 6]$.

(3) 由 $y=\dfrac{2-\sin x}{2-\cos x}$去分母得 $\sin x-y\cos x=2-2y$,

和差化积得$\sqrt{1+y^2}\sin(x-\varphi)=2-2y$。

即有 $$\sin(x-\varphi)=\frac{2-2y}{\sqrt{1+y^2}},$$

$\therefore$ $\left|\dfrac{2-2y}{\sqrt{1+y^2}}\right|\leqslant 1$，解得$\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\leqslant y\leqslant\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$.

$\therefore$ 函数的值域是$\left[\dfrac{4-\sqrt{7}}{3},\ \dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right]$.

说明 例2(3)除上述解法外，还可设 $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$，利用万能公式化为以$t$为自变量的函数式，再用判别式法求值域。或把函数值域看作过$A(2,2)$，$B(\cos x,\ \sin x)$的直线斜率的取值范围，其中B是单位圆上的动点，利用几何法求值域。

例3 求函数$y=1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x$的最值，其中$x\in[-\pi,\ \pi]$。

略解 $y=(1+\sin x)(1+\cos x)$

$$=4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos^2\frac{x}{2}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^2.$$

$\because$ $-\pi\leqslant x\leqslant\pi\Longrightarrow-\dfrac{3\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{4}-x\leqslant\dfrac{5\pi}{4}$,

$\therefore$ $-1\leqslant\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\leqslant 1$.

当$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=1$时，$y$有最大值$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$，这时$x=\dfrac{\pi}{4}$；当$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$y$有最小值0，这时$x=-\dfrac{\pi}{2}$或$\pi$。

说明 注意到函数的对称性，本例可令 $\sin x+\cos x=t\ (-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，则 $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$。将原函数化为关于 t 的有约定定义域的二次函数，易求出函数的最值。

例 4 设 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$，若对于任何实数 x，不等式

$$x^2+x\cos\alpha+\frac{3}{4}\sin^2\alpha-\frac{1}{2}>0$$ 恒成立.求α的取值范围.

略解 由题设得$\Delta=\cos^2\alpha-4\left(\dfrac{3}{4}\sin^2\alpha-\dfrac{1}{2}\right)<0$。即 $\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha+2<0$。∴ $\sin\alpha>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\sin\alpha<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

∵ $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$，

∴ 不等式的解为$\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\dfrac{2\pi}{3}$或$\dfrac{4\pi}{3}<\alpha<\dfrac{5\pi}{3}$。

习题

1. 已知角 θ 的终边上有点$P(1+\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$，求$\sin\theta$和$\operatorname{tg}\theta$。
2. 分别写出函数$y=\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x$ 和 $y=\lg\sin x$ 的定义域。
3. 求下列函数的定义域：

   (1) $y=\sqrt{-\sin x}+\sqrt{\cos x}$； (2) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x}{1-\sin x}$；

   (3) $y=\dfrac{4}{2\sin^2x-5\sin x-3}$；(4) $y=\lg(2\cos x-\sqrt{3})$。
4. 求下列函数的定义域：

   (1) $y=\sqrt{\sin x}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$；

   (2) $y=\sqrt{\cos 2x}+\lg(3-2\sqrt{3}\operatorname{tg}x-3\operatorname{tg}^2x)$。
5. α 为何值时，函数 $\log_{\sin\alpha}\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{2}\right)$有意义？
6. 求下列函数的值域：

   (1) $y=5-\sin^2x$； (2) $y=\cos x+\sqrt{3}\sin x$；

(3) $y=\dfrac{1+3\sin x}{2+3\sin x}$.

7. m为何值时，函数 $\sin x=\sqrt{\dfrac{3m}{2-m}}$ 有意义?

8. 求函数 $y=\sqrt{2\sin^2 x+3\cos x-3}$ 的定义域和值域。

1.2 三角函数的图象(1课时)

预习题

1. 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的振幅，周期，频率和初相分别是什么?

2. 将 $y=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位，所得曲线的函数式是什么?

例题

例 1 用五点法作出函数 $y=2\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$的图象，并说明这个图象可由$y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换而得到。

x	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{4\pi}{3}$	$\dfrac{7\pi}{3}$	$\dfrac{10\pi}{3}$	$\dfrac{13\pi}{3}$
$\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
y	0	2	0	-2	0

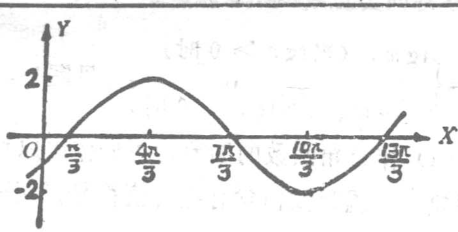


图 1-2

解 先列表，再描点作图。

可以先把 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，再把所得图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍得到 $y=\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，然后把所得图象上各点的纵坐标伸长到原来的 2 倍得到 $y=2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象。

说明 本例牵涉到位相，周期和振幅等三种变换，是正弦曲线变换的典型例题，请读者细心体察。

例 2 作下列函数的图象：

(1) $y=\dfrac{\sin x+|\sin x|}{2}$；(2) $y=|\operatorname{tg} x|$。

解 (1) $y=\begin{cases}\sin x, & (\text{当}\sin x\geqslant 0\text{时})\\ 0. & (\text{当}\sin x<0\text{时})\end{cases}$ 见图1-3。

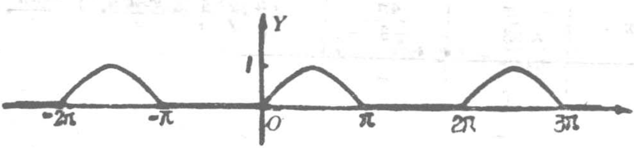


图 1-3

(2) $y=\begin{cases}\operatorname{tg} x, & (\text{当}\operatorname{tg} x\geqslant 0\text{时})\\ -\operatorname{tg} x. & (\text{当}\operatorname{tg} x<0\text{时})\end{cases}$ 见图1-4。

说明 (1) 作三角函数的图象，可先作出原点附近一个周期内的图象。若函数式内含有绝对值符号，应先化去绝对值号，再根据要求作图。

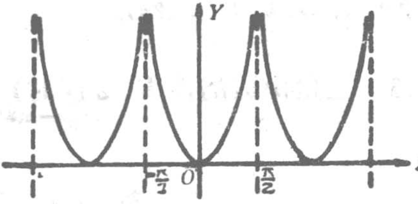
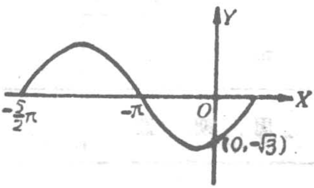


图 1-4

(2) 例 2(2)也可先作出函数 $y=\operatorname{tg}x$ 的图象，再作出 x 轴下方的部分关于 x 轴对称的图象，即得 $y=|\operatorname{tg}x|$ 的图象。

例 3 已知正弦函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $A>0$，$\omega>0$）的一个周期的图象如图1-5所示，试求函数的解析式。

略解 由题中所给的图知



$$\begin{cases}\omega\left(-\dfrac{5}{2}\pi\right)+\varphi=0,\\ \omega(-\pi)+\varphi=\pi,\\ A\sin\varphi=-\sqrt{3}.\end{cases}$$

解得 $A=2$，$\omega=\dfrac{2}{3}$，$\varphi=\dfrac{5\pi}{3}$。

图 1-5

∴ 函数式为 $y=2\sin\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{5\pi}{3}\right)$。

说明 合理选点对已知图象求函数这类问题至关重要。

习题

1．函数 $y=\dfrac{1}{2}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的振幅，周期，频率和初相各是什么？

2．作出下列函数的图象：

(1) $y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1$；(2) $y=|\cos x|+\cos x$。

3．已知正弦曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 上的一个最高点是$(2,\sqrt{2})$，由这个最高点到相邻的最低点曲线与 x 轴相交于点(6, 0)，求函数

解析式(其中$A>0$，$\omega>0$，$0<\varphi<2\pi$)。

1.3 三角函数的性质(2课时)

预习题

填写下表：

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\mathrm{tg}\,x$
单调递减区间			
单调递增区间			
奇　偶　性			
周　期　性			

例题

例1　求下列函数的单调区间：

(1) $y=\mathrm{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$；　　(2) $y=\log_{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

略解　(1) 当 $k\pi-\frac{\pi}{2}<2x+\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2}$时，

即　$\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$时，函数单调递增。

∴　函数的递增区间是$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{3\pi}{8},\ \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$ $(k\in Z)$

(2) 由函数定义域知 $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)>0$，