国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

信息与计算科学丛书—79

自适应Fourier变换：一个贯穿复几何，调和分析及信号分析的数学方法

钱　涛　著

科学出版社

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

"十二五"国家重点图书出版规划项目

信息与计算科学丛书　79

自适应 Fourier 变换：一个贯穿复几何，调和分析及信号分析的数学方法

钱　涛　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书阐述自适应 Fourier 分解(Adaptive Fourier Decomposition, AFD)及单分量函数论的数学理论及应用.

按照理论发展的顺序, 第 3 章单分量函数论应该在第 2 章 AFD 理论之先的, 后者作为单分量函数分解的特殊情况. 尽管如此, 我们选择优先讲述 AFD 的理论. 第 3 章基于单复变量几何分析全通滤波器, 建立了单分量函数的理论. 第 4 章讲述单分量函数论对数字信号处理的奠基性的应用, 其中包括由 AFD 引出的 Dirac 型时间-频率分布的理论, 以及对经典 Heisenberg 型测不准原理的改进. 在第 5 章中, 应用调和分析及单复变量分析方法, 我们发展了前移及后移不变子空间的理论, 并将该研究用于频带保持、相位重构以及 Bedrosian 方程式的解. AFD 与单分量函数的思想贯穿一维单复变结构下的两个典型流型, 即圆与直线(第 2 章); 高维两种复结构(Clifford 代数及多复变量)之下的 Euclid 空间、实球壳以及多环面(第 6 及第 7 章). 2-环面上的数学理论可直接用于图像处理. AFD 在一维及高维空间以及它们的典型流形上的实现开拓了有关场合的有理函数逼近理论. 单分量函数的理论止步于一维情况. 然而在高维空间中存在有标量值相位导数的概念(第 4 章), 后者在高维空间的信号分析理论, 特别是在高维空间超强测不准原理的建立上起到关键的作用. AFD 是应单分量函数分解稳定性要求的产物, 其与贪婪算法的原则不约而同. AFD 不同于现存的任何一种贪婪算法. 在第 8 章中我们证明, 引入完备化字典的概念, 正交贪婪算法可以被优化为预正交贪婪算法, 后者在经典场合即化为 AFD. 预正交贪婪算法的诸多优越性揭开了贪婪算法研究的新篇章.

本书是为数学研究人员和工程技术人员两者而写的. 如果偏重于应用, 读者可以跳过某些数学证明, 例如第 1 章的 Plemelj 定理的证明, 而求直接理解及接受方法本身.

图书在版编目(CIP)数据

自适应 Fourier 变换：一个贯穿复几何，调和分析及信号分析的数学方法/钱涛著. —北京：科学出版社, 2015.11

(信息与计算科学丛书; 79)

“十二五”国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-03-046387-6

Ⅰ. ①自⋯ Ⅱ. ①钱⋯ Ⅲ. ①自适应控制-信号处理 Ⅳ. ①TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 274932 号

责任编辑: 王丽平 / 责任校对: 钟 洋

责任印制: 肖 兴 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 11 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2015 年 11 月第一次印刷 印张: 16 3/4 彩插: 2 页

字数: 328 000

定价: 178.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

创新不是由逻辑思维带来的，尽管最后的产物有赖于一个符合逻辑的结构.

阿尔伯特·爱因斯坦

纪念程民德教授诞辰 100 周年

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末，由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》，至今已逾 30 册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨，学术水平高、社会影响大，对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整，将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并，定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要，科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》，组建了新的编委会，并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议，讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者，针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性，体现新的研究方向. 内容力求深入浅出，简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作，在学术界赢得了很好的声誉，在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版，以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前　　言

本书的主旨是引入一类新的函数, 称为单分量函数, 以及用该类函数逼近一般函数的新的函数逼近方法, 后者称为自适应 Fourier 分解 (adaptive Fourier decomposition, AFD). 该函数分解方法与经典的 Fourier 分解是同源的. 后者是前者的特殊情况, 前者是后者从概念到方法上的进一步发展. 本书中凡是使用信号一词的地方, 均可用函数一词来代替, 除了"解析信号"一词之外. 事实上, 解析信号是解析函数的边值. 本书致力于构造一个有应用背景的数学理论. 信号分析之广泛的可应用性及有关的疑难是自适应 Fourier 分解的原推动力. 凡是 Fourier 分解可应用的地方都可以尝试使用自适应 Fourier 分解. 阅读本书需要实与复的分析以及 Hilbert 空间的基础知识. 所需要的基础知识在书中都已清楚地注明, 并给出参考文献. 本书的对象是大学数学系及其他科技学系本科高年级的学生及研究生, 以及教师及科技领域中的研究人员.

除了预备知识外, 本书的每一章节都是由一系列新的研究成果所构成. 所收录的大部分结果是在作者与他的合作者 (包括学生) 的共同努力之下得到的. 值此机会, 作者对所有对这个研究方向有贡献的合作者表示由衷的感谢. 从另一个角度讲, 本书所建立的是瞬时频率的数学理论, 并用之于信号与函数分析的理论与实践. 在复 Hardy 空间的理论框架上我们严格地定义解析相位导数 $\theta'(t)$, 其在理想情况下与相位的经典导数相一致. 在拓广了的相位导数的意义下我们区分出具有非负解析相位导数的一类信号, 称之为单分量信号 (mono-component). 我们选出一类特殊的单分量函数, 称之为加权 Blaschke 乘积 (weighted Blaschke product), 并将给出的任意信号表示为加权 Blaschke 乘积的线性组合. 此种表示法给出一般信号的正解析频率分解, 后者正是 Gabor 解析信号的初衷. 所建立的理论是自洽的. 对信号正频率分解的稳定性的要求由分解的快速收敛性来达到, 后者催生了 AFD. 各种场合和各种类型的 AFD 算法的快速收敛性使它成为一维及高维有理逼近的有效工具. 高维空间的有理逼近及应用是有意义的新研究方向. AFD 收敛性质的研究推进了前移及后移算子及其不变子空间理论及有关应用. 有关结果开拓了后者在相位及幅度重构、带限保持, 以及 Bedrosian 等式上的应用. 本书的数学结果有助于建立数字信号处理 (digital signal processing, DSP) 的理论基础, 后者涉及全通滤波器、最小相位及能量延迟. 特别指出, 在 DSP 上的应用是基于作者所得到的内、外函数边值相位导数的结果, 特别是内函数边值相位导数之存在性及正性. 单分量函数的理论目前仅限于一维. 通过对 Bedrosian 及非 Bedrosian 两种类型单分量函数

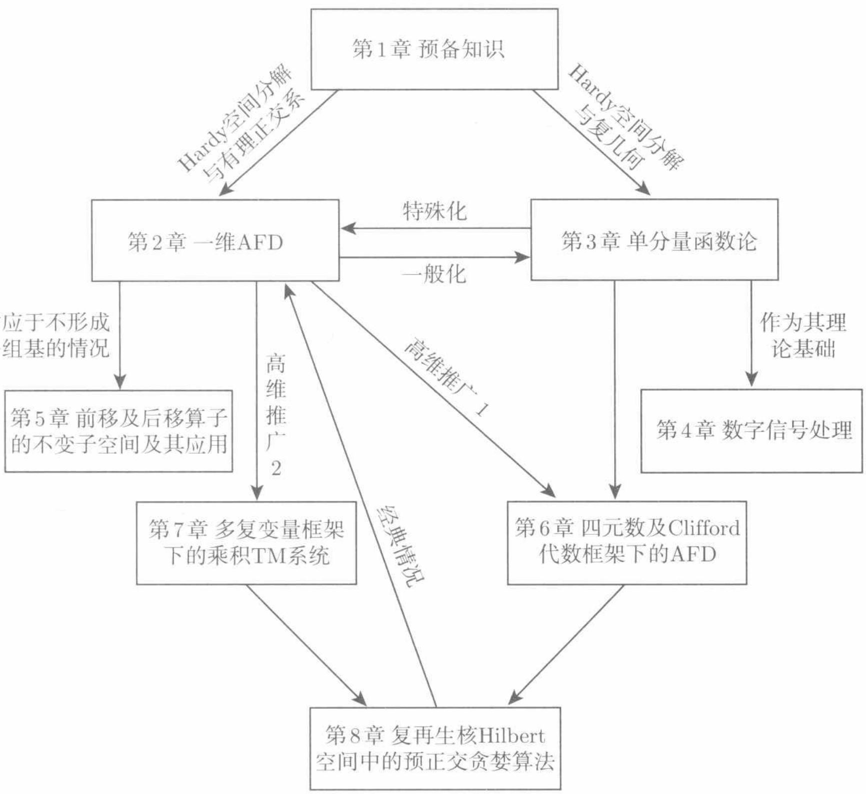
的刻画, 一维单分量函数的研究基本上是完备了. 所建立的理论揭示了单分量函数与Blaschke 乘积函数, 后移算子不变子空间、星形函数、多重星形与边界星形函数的内在联系. 一些曾经是一维复几何理论中重要研究课题的经典函数类, 由于与信号理论的联系显现出生机. 在一维理论之外, 本书讨论了 AFD 的相对于 Clifford 结构以及多复变结构的高维推广. 我们建立了高维空间标量值相位导数的理论. 高维空间的单分量函数论还是一片空白之地. 无论一维还是高维, AFD 都涉及函数论中最常见最有用的一类稀疏表示. 其广阔的研究前景包括一维及高维的有理逼近、压缩感知、再生核 Hilbert 空间以及学习理论; 而应用前景包括信号分析、图像处理、控制论, 特别是系统辨识, 等等.

本书的写作计划如下: 第 1 章提供有关的复分析及调和分析的预备知识. 主要内容包括复 Hardy 空间理论, 特别是与 Plemelj 定理有关的内容. 第 2 章直接进入 AFD 的理论, 包括它的几个变种及之间的联系. AFD 可以归类于复逼近. 在第 3 章中我们建立单分量函数论, 应用到较多的复变函数理论. 在概念发展进程上应该是单分量在先, AFD 在后. 作者期待这种“倒置”的写作方法能够突出这个研究方向在逼近论及函数表示论上的意义及应用, 并激发读者的兴趣. 第 4 章在单分量函数论基础上建立数字信号处理的基本理论. 时频分布理论及超强测不准原理也是第 4 章的重要构成部分. 第 5 章发展了前移及后移不变子空间的理论, 并将所得结果应用于带限保持、相位及幅度重构, 以及 Bedrosian 方程式. 第 6 章建立在 Clifford 代数框架之下的高维 AFD 理论. 在得到四元数空间的 AFD 之后, 我们重点阐明高维空间中标量值相位导数的理论及应用, 后者包括高维空间上的超强测不准原理. 第 7 章建立多复变框架下的高维 AFD 理论. Clifford 和多复变是高维空间中两种不同的复结构, 它们各自适用于不同的场合. 例如在实球上, 对于与球调和展开有关的理论与应用 (如地球物理), 我们须用 Clifford 结构; 而对于图像处理我们须用环面 (torus), 后者适合于多复变结构. 在第 8 章中我们将 AFD 推广到复再生核 Hilbert 空间, 建立了预正交贪婪算法, 即 P-OGA. 作为贪婪算法的新发展, P-OGA 被证明优于已存在的其他贪婪算法. P-OGA 在 Hardy 空间及 Szegö 核字典的经典模式下即化为 AFD. 在编后记中我们概述没有可能包含于本书的有关结果, 作为基本理论重要的组成部分与补充, 它们实际上是最近的研究成果. 我们将 AFD 分类为极大选择型及非极大选择型. 本书的内容仅局限于前者. 对于后者 (非极大选择型) 我们供给有关的参考文献.

作　者

2015 年 9 月

各章关系图


第1章 预备知识
Hardy空间分解与有理正交系
Hardy空间分解与复几何
第2章 一维AFD
特殊化
一般化
第3章 单分量函数论
对应于不形成一组基的情况
高维推广2
高维推广1
作为其理论基础
第5章 前移及后移算子的不变子空间及其应用
第4章 数字信号处理
经典情况
第7章 多复变量框架下的乘积TM系统
第6章 四元数及Clifford代数框架下的AFD
第8章 复再生核Hilbert空间中的预正交贪婪算法

目　录

《信息与计算科学丛书》序
前言
各章关系图
第 1 章　预备知识: 函数的 Hardy 空间分解及有理正交系统 ······ 1
1.1　单位圆上的 Hardy 空间分解 ······ 1
1.2　实数轴上的 Hardy 空间分解 ······ 12
1.3　有理正交系统 ······ 17
1.3.1　单位圆周内的有理正交系 ······ 17
1.3.2　上半复平面的有理正交系 ······ 23
第 2 章　自适应 Fourier 分解 ······ 25
2.1　单位圆上的自适应 Fourier 分解 ······ 25
2.1.1　Hardy 空间函数的 AFD (core AFD) ······ 25
2.1.2　借助于 AFD 逼近实值函数及其 Hilbert 变换 ······ 33
2.2　自适应 Fourier 分解的逼近阶 ······ 35
2.3　解绕 AFD ······ 38
2.3.1　Hardy 空间函数的 Nevanlinna 分解 ······ 38
2.3.2　解绕 AFD ······ 40
2.3.3　n 阶最佳有理逼近 ······ 44
2.3.4　Blaschke 形式及最佳 n-Blaschke 逼近的存在性 ······ 44
2.3.5　最佳 n-Blaschke 逼近与最佳 n 阶有理逼近 ······ 49
2.3.6　最佳 Blaschke 逼近问题的循环 AFD 解 ······ 51
2.4　实数轴上的 AFD 及其变种 ······ 53
2.5　Fourier 在平均意义下是最佳的 ······ 53
第 3 章　单分量函数的理论 ······ 57
3.1　问题的提出 ······ 57
3.2　单分量函数 ······ 61
3.3　物理可实现信号的单分量函数表示 ······ 67
3.4　内函数与外函数 ······ 68
3.5　单分量函数的刻画: Bedrosian 及非 Bedrosian 型 ······ 72

3.5.1 Bedrosian 型单分量函数 …… 73
3.5.2 非 Bedrosian 型 (星形及边界星形函数型) 单分量函数 …… 78
第 4 章 单分量函数理论在数字信号处理中的应用 …… 85
4.1 与频率均值及时间均值有关的经典关系式的推广 …… 85
4.2 Hardy-Sobolev 导数 …… 94
4.3 超强测不准原理 …… 99
4.3.1 非光滑信号的强测不准原理 …… 99
4.3.2 H-S 导数下的超强测不准原理 …… 101
4.3.3 相对于 Hilbert 空间中自共轭算子对的超强测不准原理 …… 103
4.4 最小相位物理可实现信号及全通滤波器 …… 107
4.4.1 离散信号 …… 107
4.4.2 上半及下半复平面 …… 112
4.4.3 连续信号 …… 115
4.5 基于 AFD 的 Dirac 型的时间–频率分布 …… 122
4.5.1 单分量信号的 TFD (mono-component time-frequency distribution, MTFD) …… 124
4.5.2 多分量函数的 Dirac 型时间-频率分布 (Dirac type time-frequency distribution of multi-component, MuTFD) …… 129
第 5 章 前移及后移算子的不变子空间及其应用 …… 134
5.1 TM 系统是它们所生成的闭子空间的 Schauder 基 …… 136
5.2 平方可积函数的理论 …… 139
5.3 L^p 可积函数的理论 …… 148
第 6 章 四元数与 Clifford 代数框架下的自适应 Fourier 分解 …… 160
6.1 四元数空间中的 AFD …… 160
6.1.1 预备知识 …… 162
6.1.2 $L^2(S^4)$ 中函数的快速球调和分解 …… 170
6.1.3 函数定义在整个空间的情形 …… 171
6.1.4 四元数域上 AFD 的收敛阶 …… 175
6.2 函数定义域低于四维的情况 …… 177
6.3 函数定义域不低于三维的情况 …… 178
6.3.1 高维空间中标量值的相位导数 …… 179
6.3.2 上半空间的 Clifford 全纯信号及其相位导数 …… 192
6.3.3 用标量值相位导数表述的测不准原理 …… 195
第 7 章 多复变量框架下高维空间的自适应 Fourier 分解 …… 201
7.1 乘积 TM 系统的二维 AFD 理论 …… 201

7.2　乘积 Szegö字典型二维 AFD ······ 209
第 8 章　复再生核 Hilbert 空间上的预正交贪婪算法与字典的完备化 ······ 212
8.1　复再生核 Hilbert 空间上的预正交贪婪算法 ······ 212
8.2　AFD 与字典之完备化 ······ 217
参考文献 ······ 223
编后记 ······ 233
索引 ······ 234
《信息与计算科学丛书》已出版书目
彩图

第 1 章　预备知识：函数的 Hardy 空间分解及有理正交系统

本书所建立的函数的自适应分解理论奠基于函数的复 Hardy 空间分解. 所讨论的函数是能量有限地定义在整个空间的一个余维为一的流形上, 而该流形将整个空间一分为二. 最基本的两个场合是复平面上的单位圆周及实数轴. 在每个场合中, 每个定义在该特殊流形上的能量有限的信号可表示为两个定义在该流形上的能量有限信号的和; 所不同的是, 该两个能量有限信号分别是被流形分成的两个区域上的 Hardy 空间函数的边值. 原信号的分析性质可以由此二 Hardy 空间函数之相应性质得到. 将对能量有限函数的研究转化为对 Hardy 空间函数的研究至少有两个优点. 一是 Hardy 空间函数分解的确定性: 该分解具有稳定性, 它们不因原边界函数 (given boundary data) 在 Lebesgue 几乎处处相等的等价类中的变动而变动 (边界函数在等价类之下无光滑性可言); 二是对 Hardy 空间函数可应用成熟有效的复分析方法. 本书将 Hardy 空间分解的方法系统地应用于不同的场合. 作者强调, 本章的目的不旨在系统及全面地阐述 Hardy 空间的理论, 而仅仅是介绍上面提到的两个最简单场合的 Hardy 函数的可应用的基本性质, 以及它们各自的有理正交系统.

1.1　单位圆上的 Hardy 空间分解

本书所涉及的 Hardy 空间的基本知识包含于大多数流行的关于复 Hardy 空间的书籍中 (如文献 [66], [157], [56]). 本节中, $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示复数域和实数域. 令 D 表示复平面中以原点为心的开单位圆, 即

$$D \triangleq \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}.$$

我们用 ∂D^+ 记该单位圆的边界, 带着正的转向, 即区域 D 位于沿 ∂D^+ 行进时的左手边:

$$\partial D^+ \triangleq \{e^{it} \ : \ 0 \leqslant t < 2\pi\}.$$

我们作如下区分: ∂D^+ 与单位圆的边界点集合 $\partial D = \mathbb{T}$ 是不同的, 后者通常用于一个集合或空间本身, 而前者是在一个较大空间中的一个区域的定向边界. 类似地

我们定义 ∂D^-. 我们也采用记号 $\partial\mathbb{C}^\pm$, 其中 $\mathbb{C}^\pm$ 为上、下复半平面. 我们将使用如下的复值函数空间.

定义 1.1.1　令 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\mathbb{T})$ 表示几乎处处相等的函数的等价类 $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ 所构成的空间: f 为 Lebesgue 可测函数, 且对测度 $|dz| = dt$ 满足

$$\|f\|_p \triangleq \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(z)|^p |dz|\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leqslant p < \infty;$$

及

$$\|f\|_\infty \triangleq \operatorname{ess\,sup}\{|f(z)| \ : \ z \in \mathbb{T}\} < \infty.$$

虽然有时也用到其他 p 值, 我们将集中研究 $p = 2$ 的理论. 由于三角函数系统

$$\{e^{ikt} \ : \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

是 $L^2(\mathbb{T})$ 的一个完备的标准化正交系, 有

$$L^2(\mathbb{T}) = \left\{f(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \ : \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty\right\},$$

上式中的无穷和取 L^2 收敛意义. 在内积

$$\langle f, g\rangle \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g}(e^{it})dt \tag{1.1}$$

之下 $L^2(\mathbb{T})$ 成为一个 Hilbert 空间. 单位圆周上的 Plancherel 定理读为

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2,$$

其中

$$c_k = c_k(f) = \langle f, e^{ik(\cdot)}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ikt}dt. \tag{1.2}$$

单位圆 D 中的复 Hardy 空间的定义如下[66, 157].

$$H^p(D) = \left\{f : D \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ 是全纯的, 并且 } \|f\|_p^p \triangleq \sup_{1 > r \geqslant 0}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p < \infty\right\}, \quad 0 < p < \infty,$$

以及

$$H^\infty(D) = \left\{f : D \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ 是全纯的, 并且 } \|f\|_\infty \triangleq \sup_{1 > r \geqslant 0, 2\pi > t \geqslant 0} |f(re^{it})| < \infty\right\}.$$

可以证明, 对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\|\cdot\|_p$ 满足赋范空间范数的定义, 并且在该范数之下, $H^p(D)$ 成为一个 Banach 空间; 对于 $0 < p < 1$, $\|\cdot\|_p^p$ 是一个度量, 所对应的 Hardy $H^p(D)$ 空间是一个完备的度量空间. 下面的关系式是显然的: 对任何 $0 < p < \infty$, $0 < q$, 有

$$H^\infty(D) \subset H^{p+q}(D) \subset H^p(D),$$

其中不同指数所对应的空间的包含关系是严格的. 对于复 Hardy 空间存在有等价的极大函数定义或刻画方式, 于此本书从略[66].

空间 $L^2(\mathbb{T})$ 的一个闭子空间为

$$\left\{ f(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} \ : \ \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty \right\}.$$

其称之为边界 Hardy-$H^2(\mathbb{T})$ 空间[66, 157]. 由 Hilbert 变换的性质 (1.9) 容易证明, $f \in H^2(\mathbb{T})$ 当且仅当存在 $g \in L^2(\mathbb{T})$ 使得 $f = (1/2)(g + i\tilde{H}g + c_0)$, 此处 c_0 为 f 的第 0 个 Fourier 系数. 其中 $\tilde{H}$ 为圆周上的 Hilbert 变换 (Hilbert transformation) (见 (1.5)). 事实上, 根据 (1.9), 上述关系式适合于任何 $g = f + h$, $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\mathrm{int}}$, $h = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{\mathrm{int}}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$. 这特别表明一个 Hardy 空间函数只含有 Fourier 正频率.

注 1.1.1 一般地, 但是粗略地说, 在一个有 "解析结构" 的空间中, 如果区域 Ω 有一个余维为一边界, 且 f 是一个在该区域 Ω 上 "好" 到有一个非切向边值 $f|_{\partial\Omega}$ 的解析函数. 记 $f|_{\partial\Omega} = U + V$, 其中 U 为 (实) 标量值部分, V 为非 (实) 标量值部分. 则从 U 到 V 的映射称作为该场合的 Hilbert 变换 (见文献 [16, 159, 66, 70, 71, 32, 31, 90, 89, 68, 104, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 33, 154, 7]).

Hardy 空间的一个重要性质是, 对于每一个 $f \in H^p(D), 0 < p \leqslant \infty$, 对几乎所有的 $t_0 \in [0, 2\pi)$, 有非切向极限

$$\lim_{z \to e^{it_0},\ z \in \Gamma_\theta(e^{it_0})} f(z),$$

此处 $\Gamma_\theta(e^{it_0})$ 是下述定义的角形区域:

$$\Gamma_\theta(e^{it_0}) = \left\{ z \in D \ : \ \frac{|e^{it_0} - z|}{1 - |z|} < \theta \right\}.$$

当讨论 Hardy 空间函数的非切向极限以及有关的角形极大函数时, 起关键作用的是角顶点的邻域. 角形区域可以有其他定义方式, 且与角的大小无关[66, 157].

记 f 的非切向极限为 $\tilde{f}$, 则映射 $f \to \tilde{f}$ 是由 $H^p(D)$ 到 $L^p(\mathbb{T})$ 内的线性且保范映射. 特别地, 对于任何 $H^p(D), 0 < p \leqslant \infty$, 以及 $f \in H^p(D)$, 有

$$\|f\|_{H^p(D)} = \|\tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

并因而该映射是 1-1 的. 空间 $H^p(D)$ 在该映射之下的像为 $L^p(\mathbb{T})$ 中的闭集合, 从而构成 $L^p(\mathbb{T})$ 的完备子空间. 这个子空间称为边界 Hardy 空间, 记为 $H^p(\mathbb{T})$. 非切向极限映射为从 $H^p(D)$ 到 $H^p(\mathbb{T})$ 的等距同构. 在函数的记号上我们有时不区分这两个空间. 特别地, 对于 $p=2$ 二者均被考虑成为 Hilbert 空间, 且后者与较前用 Fourier 级数所定义的边界 Hardy-H^2 空间相符. 对边界 Hardy 空间存在有其他的, 特别是实方法的定义方式. 鉴于本书的目的, 我们将不予讨论.

复 Hardy 空间 $H^p(D), 0<p\leqslant\infty$, 有另一个重要的性质或刻画方式[66]: 解析函数 $f\in H^p(D)$ 当且仅当非切向极大函数, 或角形极大函数

$$Mf(e^{it})=\sup\{|f(z)|\ :\ z\in\Gamma_\theta(e^{it})\}\in L^p(\mathbb{T}),\quad 0<p\leqslant\infty. \tag{1.3}$$

我们将应用这个结果.

下面讨论 $L^p(\mathbb{T})$ 的 $H^p(\mathbb{T})$ 空间分解, p 的范围局限于 $1<p<\infty$. 首先注记, 在闭的单位元外部也有一个 Hardy 空间, $H^p(\overline{D}^c)$, $\overline{D}^c$ 记闭的单位圆盘的补集, 其理论与 $H^p(D)$ 平行, 定义如下:

$$\begin{aligned}H^p(\overline{D}^c)=\Big\{f:\overline{D}^c\to\mathbb{C}\ :\ f\ \text{是全纯的, 并且}\ \|f\|_p^p\\ \triangleq\sup_{\infty>r>1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p<\infty\Big\},\quad 0<p<\infty,\end{aligned}$$

以及

$$H^\infty(\overline{D}^c)=\Big\{f:\overline{D}^c\to\mathbb{C}:f\ \text{是全纯的, 并且}\ \|f\|_\infty\triangleq\sup_{\infty>r>1,2\pi>t\geqslant0}|f(re^{it})|<\infty\Big\}.$$

容易证明, $f\in H^p(\overline{D}^c)$ 当且仅当 $\frac{1}{z}f\left(\frac{1}{z}\right)\in H^p(D)$, 其中变换 $f\to\frac{1}{(\cdot)}f\left(\frac{1}{(\cdot)}\right)$ 称为 Kelvin 逆转 (Kelvin inversion). 对于 $f\in L^p(\mathbb{T}), 1\leqslant p\leqslant\infty$, 定义它的圆内 Cauchy 积分 (Cauchy integral) 为

$$\mathcal{C}^+f(z)\triangleq\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad z=re^{it},\quad r<1,$$

其中积分是在围道 ∂D^+ 上, 即沿单位圆的反时针方向. 类似地可定义 $\mathcal{C}^-f(z)$, 区别是 z 在单位圆外部, 而围道积分是在 ∂D^- 上.

我们证明下述的 Plemelj 定理.

定理 1.1.1 (单位圆周上的 Plemelj 定理)　对于 $f\in L^p(\mathbb{T}), 1\leqslant p\leqslant\infty$, 有

$$\lim_{r\to1-}\mathcal{C}^+f(re^{it})=\frac{1}{2}c_0+\frac{1}{2}f(e^{it})+i\frac{1}{2}\tilde{H}f(e^{it}),\qquad \text{a.e.}\quad t\in[0,2\pi), \tag{1.4}$$