高等学校"十三五"规划教材

复变函数与积分变换

》学习指导书《

周凤玲 刘力华 张余 主编

FUBIAN HANSHU
YU JIFEN BIANHUAN
XUEXI ZHIDAOSHU

化学工业出版社

高等学校"十三五" 规划教材

复变函数与积分变换学习指导书

周凤玲　刘力华　张　余　主　编

化学工业出版社
·北京·

本书与西安交通大学高等数学教研室编写、高等教育出版社出版的《复变函数》(第四版)及东南大学数学系张元林编写、高等教育出版社出版的《积分变换》(第四版)相配套，编排与教学需求保持同步，每章内容都包含知识点概括（包含基础知识点概括和知识点框架图）、典型题选讲与习题精选等栏目。知识点概括将每章的基本知识点进行概括总结；典型题选讲既有基础性题目，又有一些教材中较难理解并有代表性的题目；习题精选则选择了每章知识点要求的典型题目，既让学生巩固了基础知识点，又留有自我发挥和提高的余地。

本书主要面向学习该课程的学生，也可以作为教师的教学参考书。本书也可作为其他工科学生学习本门课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换学习指导书/周凤玲，刘立华，张余主编．—北京：化学工业出版社，2015.12

高等学校“十三五”规划教材

ISBN 978-7-122-25637-9

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①周…②刘…③张…　Ⅲ.①复变函数-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材　Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 264818 号

责任编辑：陶艳玲　马　波　　　装帧设计：王晓宇

责任校对：宋　玮

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm　1/16　印张 10¾　字数 262 千字　2016 年 3 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　价：29.00 元

编写人员名单

主　　编　周凤玲　刘力华　张　余
参　　编　赖俊峰　李志远　曹　艳

前言

本书是与西安交通大学高等数学教研室编写的《复变函数》第四版(由高等教育出版社出版)及东南大学数学系张元林编写的《积分变换》第四版(由高等教育出版社出版)相配套的学习辅导书，主要面向使用该教材的学生，也可以作为使用该教材的教师的教学参考书。

复变函数与积分变换是工科院校中许多专业的一门重要的理论基础课，在不同专业的主要课程中有广泛应用。本书按照《复变函数》和《积分变换》(第四版)的内容编排，以便于教材和教学要求保持同步，并考虑到读者使用的方便，在编写时又具有本书的自身独立性。在编写时，一方面对应教材的章节编写各章的内容总结和知识框架图，另一方面给出基本系统，提高习题和模拟试题以便于学生更好地掌握对应内容。每个章节包含以下几部分内容。

(1) 重点

简明扼要地给出本章要求掌握的重点内容。

(2) 难点

概括出本章学习中不好掌握或者难以理解的知识点。

(3) 基本要求

主要根据教学大纲和工科学生对工程数学基本要求确定，对教学层次的要求，按照“了解”、“理解”、“会”、“掌握”、“熟练掌握” 等表示教学要求的程度差异。

(4) 知识点概括

提纲挈领地概括出本章的基本内容，一些定义、定理等一般不再一一列出。

(5) 知识点框架图

用图表式框架图呈现各章知识点，直观形象，便于学生理解掌握。

(6) 典型题选讲

按照各章的教学内容要求，在教材原有例题、习题的基础上，适当选取一部分基本习题和提高性习题作为例题进行分析解答。

(7) 习题精选

在教材例题和习题的基础上，给出对应各章的精选习题，便于学生掌握好巩固各章内容。

除了以上各章对应的内容外，本书还通过几个附录给出了与教学内容相联系的 Matlab 在《复变函数》中的实现，十套模拟试题，对应教材的习题参考答案及模拟试题参考答案。

本书由以下教师编写：周凤玲(第一章，第二章)，刘力华(第五章)，张余(第三章)，李志远(第四章)，赖俊峰(第六章，第七章)，曹艳(附录一)。

编　者

2016 年 1 月

目录

第一章 复数与复变函数

复数是在实数基础上进一步了扩大数域范围，是根据解决实际问题的需要而扩充的．复变函数又是在复数域的基础上定义的函数，是整个《复变函数与积分变换》的主要研究对象．

重点

① 复数三种形式的相互转化及其复数的运算；

② 复变函数的极限与连续性的判定；

③ 映射．

难点：复变函数极限与连续性的判定及其映射．

基本要求

① 熟练掌握复数代数形式， 指数形式与三角形式之间的相互转化；

② 掌握复变函数的极限与连续性的概念及其判定方法；

③ 掌握映射；

④ 了解复平面与复球面的基本概念．

一、 知识点概括

（一） 基础知识点概括

1. 复数的概念

（1） 虚数单位 i：$i^2=-1$，

基本运算规律：$i^{4n}=1$，$i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$，$i^{4n+3}=-i$（n 为正整数）．

（2） 复数 $z=x+iy$：x，y 分别称为 z 的实部与虚部，记为 $x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$，当 $x=0$，$y\neq0$ 时，称 $z=iy$ 为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x$ 为实数．

（3） 两个复数的相等：$z_1=z_2\Leftrightarrow\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$，$\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)$

2. 复数的运算与运算法则

(1) 复数的四则运算

(2) 复数的共轭运算

(3) 复数的运算法则

①交换律：$z_1+z_2=z_2+z_1$；

结合律：$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$；

分配率：$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

②$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$，$\left(\overline{\dfrac{z_1}{z_2}}\right)=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2\neq 0)$；

③ $\overline{\overline{z}}=z$，$z\overline{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$，$z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$，$z-\overline{z}=2i\mathrm{Im}(z)$

3. 复数的几何表示

(1) 复平面

① 复平面上的点 $(x, y)\leftrightarrow$复数 $z=x+iy\leftrightarrow$复平面上的向量$\overrightarrow{oz}$.

② 复数 $z=x+iy$ 的模：$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，其基本性质有：

$$|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|,\ |\mathrm{Im}(z)|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|;$$

$$|z|=|\overline{z}|,\ z\overline{z}=|z|^2;$$

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|\ \text{(三角不等式)}.$$

③ 辐角 $\mathrm{Arg}z$ 及其辐角主值 $\arg z$

$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi$ $(k\in Z^+)$，其中辐角主值 $\arg z$ 计算方法为

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\ y\neq 0\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y>0\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0\\[2mm] \pi, & x<0,\ y=0\end{cases}$$

(2) 复球面

① 复球面上的点[除北极（N 点）外]$\leftrightarrow$复数 $z=x+iy$；

② 北极（N 点）$\leftrightarrow$无穷远点；

③ 扩充复平面：包含无穷远点的复平面.

4. 复数的乘幂与方根

(1) 乘积与商

① 运算性质：设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_2e^{i\theta_2}$，则

$$z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}\quad(r_2\neq0)$$

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\quad\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq0)$$

② 几何意义.

(2) 乘幂与方根

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$，则

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^ne^{in\theta},$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$$

5. 复变函数

(1) 复平面上的区域

① 邻域，去心邻域，内点，边界点，边界，开集，连通集，区域，有界区域与无界区域.

② 单连通域与多连通域.

(2) 平面曲线

① 平面曲线的复数形式：$z(t)=x(t)+iy(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$；

② 连续曲线，光滑曲线，简单曲线等概念.

(3) 复变函数的概念

① 复变函数与映射的概念；

② 复变函数与二元函数的关系：一个复变函数对应两个二元函数；

设 $z=x+iy$，$f(z)=u+iv$，则 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$.

(4) 复变函数的极限

① 复变函数极限的概念

设 $f(z)$在 $z_0=x_0+iy_0$ 的某个去心邻域内有定义，

则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a+bi\Leftrightarrow$对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，则 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，恒有 $|f(z)-(a+bi)|<\varepsilon$

② 复变函数极限存在的充要条件

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$A=a+ib$，$z_0=x_0+iy_0$，

则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=a$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=b$

(5) 复变函数的连续性

① 复变函数连续性的概念；

② 复变函数连续性的运算及其性质.

复变函数的极限，连续性的概念、性质及其运算法则与实变函数对应内容可以对比学

习，并注意其区别与联系．

（二）知识点框架图

- 复数
  - 基本概念
  - 表示形式
    - 代数形式：$z=a+bi$，
    - 三角形式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，
    - 指数形式：$z=re^{i\theta}$，
  - 代数形式⇆三角形式⇆指数形式
  - 表示方法
    - 复平面
    - 复球面
  - 基本运算
    - 四则运算
    - 共轭运算
    - 乘幂运算：$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^n e^{in\theta}$
    - 方根运算：$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\dfrac{2k\pi+\theta}{n}\right)\ (k=0, 1, \cdots, n-1)$
- 复变函数
  - 基本概念
    - 复平面上的区域
    - 复变函数的概念
    - 映射
  - 复变函数的极限：$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A \Leftrightarrow$ 对任意 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|<\varepsilon$ 成立．
  - 复变函数的连续性：$f(z)$ 在 z_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$
  - $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续 $\Leftrightarrow u(x, y)$，$v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续

辐角主值 $\arg z$ 计算方法为

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\ y\neq 0\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y>0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0\\ \pi, & x<0,\ y=0\end{cases}$$

二、典型题选讲

【例 1】 将下列复数化为三角表示式和指数表示式

(1) $z=\dfrac{-6i}{1+i\sqrt{3}}$

(2) $z=1+\sin\theta+i\cos\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2})$

【解】(1) 方法 1：由于 $-6i=6\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$，$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

所以 $z=\dfrac{-6i}{1+i\sqrt{3}}$的三角表示式与指数表示式分别为

$$z=3\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=3e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

方法 2：由于 $z=\dfrac{-6i}{1+i\sqrt{3}}=\dfrac{-6i\ (1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})\ (1-i\sqrt{3})}=-\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}+i)$

所以 $z=\dfrac{-6i}{1+i\sqrt{3}}$ 的三角表示式与指数表示式分别为

$$z=3\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=3e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

(2) 方法 1：由已知 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，

故复数 $z=1+\sin\theta+i\cos\theta$ 位于第一象限，

$$\therefore |z|=\sqrt{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta}=\sqrt{2\ (1+\sin\theta)}$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)=2\cos\frac{\pi-2\theta}{4}$$

$$\arg z=\arctan\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\arctan\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$=\arctan\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\pi-2\theta}{4}$$

所以 $z=1+\sin\theta+i\cos\theta$ 的三角表示式与指数表示式分别为

$$z=2\cos\frac{\pi-2\theta}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)\right]=2\cos\frac{\pi-2\theta}{4}e^{i\frac{\pi-2\theta}{4}}$$

方法 2：利用三角公式可得

$$z=1+\sin\theta+i\cos\theta=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=2\cos^2\frac{\pi-2\theta}{4}+2i\sin\frac{\pi-2\theta}{4}\cos\frac{\pi-2\theta}{4}$$

$$=2\cos\frac{\pi-2\theta}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi-2\theta}{4}\right)\right]\text{（三角表示式）}$$

$$=2\cos\frac{\pi-2\theta}{4}e^{i\frac{\pi-2\theta}{4}}\qquad\text{（指数表示式）}$$

【例 2】 求下列方程的全部根

(1) $z^3-z^2-z+1=0$

(2) $z^3+z=0$

(3) $z^4-16=0$

【解】(1) 方程可化为 $z^2(z-1)-(z-1)=(z+1)(z-1)^2=0$

所以方程的全部根为 $z_1=-1$，$z_2=z_3=1$

(2) 方程可化为 $z(z^2+1)=z(z+i)(z-i)=0$

所以方程的全部根为 $z_1=0$，$z_2=i$，$z_3=-i$

(3) 方程可化为 $(z^2+4)(z^2-4)=(z+2i)(z-2i)(z+2)(z-2)=0$

所以方程的全部根为 $z_1=-2i$，$z_2=2i$，$z_3=-2$，$z_4=2$

【例 3】 求微分方程 $y'''+y'=0$ 的通解．

【解】 微分方程对应的特征方程为 $r^3+r=0$

全部特征值为 $r_1=0$，$r_2=i$，$r_3=-i$

所以所求的通解为 $y=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$

【例 4】 设有平面区域

$$D=\left\{z\,\middle|\,z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},\ \cos\theta<r<3\cos\theta\right\}$$

试判断区域 D 是单连通域还是多连通域．

【解】 设 $z=x+iy$，则

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\ \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

由已知 $\cos\theta<r<3\cos\theta$，故可得

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}<\sqrt{x^2+y^2}<3\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

即
$$x<x^2+y^2<3x$$

所以区域 $D=\{(x,y)\,|\,x<x^2+y^2<3x\}$ 为单连通域．

【例 5】 复变函数 $w=2-\frac{z^2}{2}$ 把 z 平面上的下列曲线映射成 w 平面上怎样的曲线？

(1) 双曲线 $xy=3$

(2) 曲线 $x^2-y^2=1$

(3) 直线 $y=2x$

【解】 设 $z=x+iy$，$w=u+iv$，则 $w=2-\dfrac{z^2}{2}$ 相当于

$$\begin{cases} u=2-\dfrac{x^2-y^2}{2} \\ v=-xy \end{cases} \quad (*)$$

(1) $xy=3$ 即 $v=-3$，

所以复变函数 $w=2-\dfrac{z^2}{2}$ 把双曲线 $xy=3$ 映射成 w 平面上的直线 $v=-3$.

(2) $x^2-y^2=1$ 即 $u=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$，

所以复变函数 $w=2-\dfrac{z^2}{2}$ 把双曲线 $x^2-y^2=1$ 映射成 w 平面上的直线 $u=\dfrac{3}{2}$.

(3) 将 $y=2x$ 代 (*) 可得

$$\begin{cases} u=2-\dfrac{x^2-4x^2}{2}=2+\dfrac{3x^2}{2} \\ v=-2x^2 \end{cases}$$

消去 x 可得
$$4u+3v=8$$

即复变函数 $w=2-\dfrac{z^2}{2}$ 把直线 $y=2x$ 映射成 w 平面上的直线 $4u+3v=8$.

【例 6】 求证以三个复数 z_1，z_2，z_3 为顶点的三角形构成等边三角形的充要条件是

$$z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2$$

证明 由乘法的几何意义可知，以三个复数 z_1，z_2，z_3 为顶点的三角形构成等边三角形的充要条件是 $z_3-z_1=(z_2-z_1)\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

即
$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}-\frac{1}{2}=\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

两边平方化简即可得证.

【例 7】 指出满足等式 $|z-1|-|z+2|=1$ 的点 z 的轨迹.

【解】 设 $z=x+iy$，则由已知等式可得
$$\sqrt{(x-1)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}=1$$

平方并进行化简得

$$8x^2+8x-y^2=0$$

即点 z 的轨迹为一条双曲线.

【例 8】 讨论函数

$$f(z)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}+i\sin(xy), & z\neq 0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$$

在点 $z=0$ 处的连续性.

【解】 记 $u(x, y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，$v(x, y)=\sin(xy)$，

显然函数 $v(x, y)=\sin(xy)$ 在 $z=0$ 处连续.

但是对于函数 $u(x, y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，让 z 沿直线 $y=kx$ 趋于零时，有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}} u(x, y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

显然，这个极限值随 k 的变化而变化，所以极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} u(x, y)$ 不存在，从而函数 $u(x, y)$ 在 $z=0$ 处不连续，故函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不连续.

三、习题精选

1. 填空题

(1) 设 $z=\dfrac{(1+i\sqrt{3})(2-i)}{(2+i)(1-i)}$，则 $|z|=$____________.

(2) 设 $z=\dfrac{1-i}{1+i}$，则 $z^{100}-z^{50}+z^{25}=$____________.

(3) 复数 $z=\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2+2i}\right)^4$ 的三角表示式为____________.

(4) 方程 $|z-3+i|=1$ 表示的曲线为____________.

(5) 若 $z=i(2+i)$，则 $\arg z=$____________.

(6) 若复数 z 满足条件 $\arg(z+2)=\dfrac{\pi}{3}$，$\arg(z-2)=\dfrac{5\pi}{6}$，则 $z=$____________.

(7) 方程 $(z-6)(z^2+4)=0$ 的全部根为____________.

(8) 若 $|z|=\sqrt{5}$，$\arg(z-i)=\dfrac{3\pi}{4}$，则 $z=$____________.

(9) 映射 $w=\dfrac{\bar{z}}{2i}$ 把 z 平面上的曲线 $x^2+y^2=1$ 映射成 w 平面上的曲线为__________.

(10) 极限 $\lim\limits_{z\to\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}(1+z^3-2z^6)=$____________.

2. 计算题

(1) 将复数 $z=-3+i\sqrt{27}$ 化为三角表示式和指数表示式.

(2) 设 $f(z)=1-\bar{z}$，$z_1=2+3i$，$z_2=5-i$，试计算 $f\,\overline{(z_1-z_2)}$.

(3) 解方程 $z^3-z^2+9z-9=0$.

(4) 若复数 z 满足方程 $z+|\bar{z}|=2+i$，求复数 z.

(5) 求方程 $\left|\dfrac{2z-1-i}{2-(1-i)z}\right|=1$ 表示的曲线的直角坐标方程，并指出曲线类型.

(6) 若复数 z 满足方程

$$z\bar{z}+(1-2i)z+(1+2i)\bar{z}+3=0$$

试求$|z+2|$的取值范围.

3. 证明题

（1）设复数$z\neq\pm i$，试证明复数$\dfrac{z}{1+z^2}$为实数的充要条件是$|z|=1$或者$\mathrm{Im}(z)=0$.

（2）设$z=x+iy$，则$\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$.

（3）设$z_2\neq0$，则$\dfrac{z_1}{z_2}\geqslant0$的充要条件为$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

第二章 解析函数

复变函数的解析性是其一个重要的性质，是研究其他性质和运算的基础，在传授基础理论和基本技能的同时，注重工程背景和实际应用，加强学生在应用方面的培养．对应于复变函数，引入常用的几类初等函数，既有与实函数相似的地方，又有区别，可以对比去掌握．

重点

① 复变函数的可导性与解析性的判定；

② 初等函数及其计算方法．

难点： ① 复变函数的可导性与解析性的判定；

② 初等函数及其计算方法．

基本要求

① 掌握复变函数的可导性与解析性的定义及其判定方法；

② 理解并记住常用初等函数的概念；

③ 熟练掌握初等函数及其对应主值的计算方法．

一、 知识点概括

（一）基础知识点概括

1. 复变函数的导数与微分

（1）复变函数导数的概念

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

（2）复变函数的求导法则

① $[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z)$；