ROUGH SETS

# 粗糙集理论及应用

周　炜　周创明　史朝辉　何广平　编著

清华大学出版社

ROUGH SETS

# 粗糙集理论及应用

周 炜 周创明 史朝辉 何广平 编著

清华大学出版社
北 京

## 内 容 简 介

本书系统地研究和介绍了粗糙集的理论和方法，简要介绍了模糊集与直觉模糊集的有关概念和研究成果。全书共分7章：第1章为预备知识，第2章为模糊集与直觉模糊集，第3章讲授基于等价关系的粗糙集模型，第4章研究粗糙集系统的代数结构，第5章介绍基于一般关系的粗糙集模型，第6章阐述近似算子的公理化定义，第7章讲授模糊粗糙集模型。

本书适合作为国内高校本科生和研究生教材，也可以作为科技人员的参考书。



**图书在版编目（CIP）数据**

粗糙集理论及应用/周炜等编著. 一北京：清华大学出版社，2015

ISBN 978-7-302-41614-2

Ⅰ. ①粗… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①集论一研究 Ⅳ. ①O144

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第238821号

**责任编辑**：陈 明

**封面设计**：张京京

**责任校对**：王淑云

**责任印制**：沈 露

**出版发行**：清华大学出版社

**网 址**：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com

**地 址**：北京清华大学学研大厦A座 **邮 编**：100084

**社 总 机**：010-62770175 **邮 购**：010-62786544

**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn

**质量反馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

**印 装 者**：三河市金元印装有限公司

**经 销**：全国新华书店

**开 本**：170mm×230mm **印 张**：11 **字 数**：216千字

**版 次**：2015年9月第1版 **印 次**：2015年9月第1次印刷

**印 数**：1～2000

**定 价**：28.00元

---

产品编号：060961-01

# 前言

<<<<<<

FOREWORD

人类认识事物、建立知识的基本逻辑思维方法是分类。一种分类方法在数学上就是论域(即研究对象集合)的一个划分。论域的每一个划分又唯一对应着该论域上的一个等价关系。从这个意义上讲,论域上的每一个等价关系就是一门知识,每一个等价类就是这门知识的一个基本概念,一族等价关系就是一个知识库。因此,对知识库的研究就化为对等价关系族的研究,对知识库的约简就化为对等价关系族的约简。

波兰数学家 Pawlak 正是在这个逻辑背景下于 1982 年提出了用于处理含糊不确定问题的粗糙集(rough sets)理论。Pawlak 粗糙集理论的主要思想是:利用已知的知识库,将知识理解为对数据的划分,构成划分的每一集合就是基本概念,用已知知识库中的知识来近似地表示含糊不确定的知识。由此可见,Pawlak 粗糙集理论是建立在分类机制也就是等价关系的基础之上的。

然而,在很多实际问题中,缺乏可以有效利用的等价关系,这在一定程度上制约了 Pawlak 粗糙集理论的应用和发展。因此人们提出了基于一般二元关系的粗糙集模型和模糊粗糙集模型等新的粗糙集模型,从而极大地丰富和发展了 Pawlak 粗糙集理论。

粗糙集理论与模糊集理论的最显著区别在于它最大限度地克服了模糊集理论中隶属函数的主观性,因而受到人们的普遍关注。人们根据粗糙集理论从数据库中成功地提炼出了知识库,在粗糙集理论的应用上也做了大量的学术研究,证明了粗糙集理论的广阔应用前景和顽强生命力。粗糙集理论本身也在不断丰富和完善中。

本书是作者多年来以张文修先生等编著的《粗糙集理论与方法》为教材从事粗糙集理论及应用课程教学的经验和应用、研究成果的结晶,有的研究成果还未公开发表过。

本书可以作为国内高校高年级本科生和研究生教材,也可以作为科技人员的参考书。书中绝大部分内容已在空军工程大学防空反导学院讲授多年。由于作者水平有限,书中一定还有作者未发现的错误、缺点和纰漏,恳请广大读者批评指正,作者不胜感激!

作　者

2015 年 3 月

# 目录

CONTENTS


第1章 预备知识 …… 1

1.1 二元关系 …… 1

1.1.1 集合的代数运算及性质 …… 1

1.1.2 二元关系的概念 …… 3

1.1.3 等价关系 …… 5

1.2 上确界与下确界 …… 7

1.3 下半连续 …… 13

1.4 三角模 …… 16

1.5 半群与群 …… 20

1.6 格与布尔代数 …… 24

1.6.1 格的基本概念 …… 24

1.6.2 格的代数结构 …… 26

1.6.3 布尔代数 …… 29

1.7 点集拓扑学基础 …… 31

习题1 …… 33

第2章 模糊集与直觉模糊集 …… 35

2.1 模糊集及其分解定理 …… 35

2.2 模糊二元关系 …… 42

2.3 模糊集与三角模 …… 43

2.4 直觉模糊集的基本概念 …… 44

2.5 直觉模糊集的分解定理 …… 49

2.6 直觉模糊集的真值和贴近度 …… 51

2.7 直觉模糊二元关系 …… 52

习题2 …… 55

第3章 基于等价关系的粗糙集模型 …… 57

3.1 精细集与粗糙集 …… 57

3.2 上近似与下近似 …… 59
3.3 知识约简和核 …… 65
3.4 相对约简和相对核 …… 66
3.5 知识库的依赖性 …… 68
3.6 布尔变量与布尔函数 …… 70
3.7 信息系统 …… 71
3.7.1 信息系统的概念 …… 71
3.7.2 信息系统的区分矩阵与区分函数 …… 73
3.8 决策表 …… 77
3.8.1 决策表的基本概念 …… 77
3.8.2 决策表的区分矩阵与区分函数 …… 79
3.8.3 条件属性子集关于决策属性集合的重要性 …… 83
3.8.4 决策规则 …… 84
3.8.5 非一致决策表的分解 …… 85
习题 3 …… 90

**第 4 章 粗糙集系统的代数结构** …… 92

4.1 粗糙集的 Stone 代数 …… 92
4.2 粗糙集与 Nelson 代数 …… 99
4.3 半群中的粗理想 …… 105
习题 4 …… 109

**第 5 章 基于一般关系的粗糙集模型** …… 110

5.1 二元关系邻域算子 …… 110
5.2 基于一般二元关系的上下近似算子 …… 114
5.3 近似算子与划分函数 …… 118
5.4 基于一般二元关系的其他上下近似算子 …… 120
5.5 变精度粗糙集模型 …… 125
习题 5 …… 128

**第 6 章 近似算子的公理化定义** …… 130

6.1 近似算子的公理集 …… 130
6.2 粗糙近似算子的公理化定义 …… 135
习题 6 …… 138

**第 7 章　模糊粗糙集模型** …… 139

7.1　基于经典等价关系的模糊粗糙集模型 …… 139
7.2　基于三角模的模糊粗糙集模型 …… 145
7.3　基于包含度的模糊粗糙集模型 …… 157
7.4　条件概率粗糙集模型 …… 160
7.5　直觉模糊粗糙集模型 …… 162
习题 7 …… 164

**索引** …… 165

**参考文献** …… 167

# 第 1 章

# 预备知识

由一些实数构成的集合称为实数集合。如无特殊声明，本书均以空心字母$\mathbb{R}$表示全体实数的集合，以大写字母 $I$ 表示单位闭区间$[0,1]$这个特殊的实数集合；以空心字母$\mathbb{N}$表示非负整数集合；以空心字母$\mathbb{Z}$表示整数集合；以空心字母$\mathbb{Q}$表示有理数集合。并以$\subseteq$和$\subset$两个符号分别表示两个集合或两个族之间的“含于”和“真含于”关系。

本章介绍关系、确界、三角模、格和布尔代数的基本概念与性质，为以后各章打下良好基础。

## 1.1 二元关系

### 1.1.1 集合的代数运算及性质

设 $\Lambda$ 是一个指标集，一族集合$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的并、交运算分别定义如下：

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha=\{x\mid \exists\alpha(\alpha\in\Lambda\wedge x\in A_\alpha)\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha=\{x\mid \forall\alpha(\alpha\in\Lambda\rightarrow x\in A_\alpha)\}。$$

设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是一族集合。如果对于任意的 $\alpha,\beta\in\Lambda$，当 $\alpha\neq\beta$ 时，都有 $A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing$，则称这族集合是互不相交的或两两不相交的。

设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是集合 $X$ 的一族互不相交的非空子集。如果$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=X$，则称这族集合是集合 $X$ 的一个划分。

二集合的差运算定义为 $A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$。显然 $A-B=A-(A\cap B)$。

对于非空集合 $U$，定义它的子集 $X$ 的补运算(余运算)为 $\bar{X}^{(U)}=U-X$。

二集合的异或(对称差)运算定义为 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$。

一个集合的笛卡儿乘积定义为这个集合本身。

$n(n\geqslant 2)$个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡儿积定义为

$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid\forall k(k\in\mathbb{N}\wedge 1\leqslant k\leqslant n\rightarrow a_k\in A_k)\}$。这里$\mathbb{N}$是全体非负整数的集合。

集合$U$的所有子集构成的族$P(U)=\{A|A\subseteq U\}$称为$U$的幂集,必要时将$P(U)$中的元素称为$U$的经典子集,以区别于模糊子集和直觉模糊子集。$U$的幂集也记作$2^U$。当$U$是有限集合时,其子集个数为$|P(U)|=2^{|U|}$,其中$|\cdot|$表示元素个数。

设$U$是非空集合。$U$的子集的并、交、补运算具有下列性质:

**交换律**:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$。

**分配律**:$A\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha), A\cup\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A\cup B_\alpha)$。

**同一律**:$A\cup\varnothing=A, A\cap U=A$。

**补余律**:$A\bigcup\bar{A}^{(U)}=U$(**排中律**),$A\cap\bar{A}^{(U)}=\varnothing$(**矛盾律**)。

**基元律**:$A\cup U=U, A\cap\varnothing=\varnothing$。

**幂等律**:$A\cup A=A, A\cap A=A$。

**吸收律**:$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$。

**交叠律**:$A\cup(\bar{A}^{(U)}\cap B)=A\cup B, A\cap(\bar{A}^{(U)}\cup B)=A\cap B$。

**结合律**:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

**对偶律**:$\overline{\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)}^{(U)}=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\overline{(A_\alpha)}^{(U)}, \overline{\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)}^{(U)}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{(A_\alpha)}^{(U)}$。

**对合律(双重否定律)**:$\overline{(\bar{A}^{(U)})}^{(U)}=A$。

上述性质中,交换律、分配律、同一律、补余律是最根本的性质,其余的性质都可以由这四条性质推出。对偶律又叫 De Morgan 律。

在不引起混淆的条件下常用$\bar{A}$或$\sim A$表示$\bar{A}^{(U)}=U-A$。

集合的运算还有一条简单性质值得注意:若$X,Y\in P(U)$,则$X-Y=X\cap\bar{Y}$。于是$X\subseteq Y$当且仅当$X-Y=\varnothing$,当且仅当$X\cap\bar{Y}=\varnothing$,当且仅当$\bar{X}\cup Y=U$。

设$U$是一个非空集合,称为论域,对于$U$的每一个子集$A$,$U$上的实值函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\in\bar{A}\end{cases}$$

称为$A$的特征函数。

特征函数$\chi_A(x)$完全确定了经典子集$A$,即$A=\{x|x\in U\wedge\chi_A(x)=1\}$。

本书约定：在讨论一个论域 $U$ 的子集族之交或并的时候，“空交为 $U$，空并为 $\varnothing$”。

对于一族非空集合 $X_\lambda(\lambda\in\Lambda)$，有下面的选择公理。

**选择公理** 设 $X_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是一族非空集合，则存在一个函数 $\sigma:\Lambda\to\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$，使得对于每一个 $\lambda\in\Lambda$，有 $\sigma(\lambda)\in X_\lambda$。

选择公理中的函数 $\sigma$ 称为选择函数。

**容斥原理** 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是有限集合 $U$ 的 $n$ 个子集。则

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|;$$

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n|=|U|+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|。$$

容斥原理的第二式又叫逐步淘汰原则，它实际上是对第一式取补的结果。容斥原理在计数问题中常常用到。

如果规定当 $k=0$ 时 $\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=|U|$，则逐步淘汰原则又可以写成

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n|=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|。$$

容斥原理最常用的形式是两个集合的形式：$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$，对应的逐步淘汰原则是 $|\bar{A}\cap\bar{B}|=|U|-|A|-|B|+|A\cap B|$。

**定义 1.1** 非空集合 $X$ 到其自身的任一函数 $f$ 称为该集合上的一个变换或一元运算。非空集合 $X$ 到其自身的任一二元函数 $f: X\times X\to X$ 称为该集合上的一个二元运算。非空有限集合 $X$ 上的任一可逆变换 $f$ 称为该集合(上)的一个置换。

### 1.1.2 二元关系的概念

**定义 1.2** 设 $U$ 是一个非空集合。$U\times U$ 的每一个子集 $R$ 称为 $U$ 上的一个二元关系。若 $\langle x,y\rangle\in R$，则称元素 $x$ 与元素 $y$ 有 $R$ 关系，记作 $xRy$。

必要时，可将二元关系称为经典二元关系，以区别于模糊二元关系和直觉模糊二元关系。

在任何一个非空集合 $U$ 上，普通的相等关系是最基本的二元关系，记作 $E_U$。$\varnothing$ 是 $U$ 上的一个二元关系，称为空关系。$U\times U$ 是 $U$ 上的一个二元关系，称为全域关系。普通的 $<,\leqslant,>,\geqslant$ 都是实数集合 $\mathbb{R}$ 上的二元关系。对于任意一个集合 $A$，普通的 $\subseteq,\subset,\supseteq,\supset$ 都是 $P(A)$ 上的二元关系。

**定义 1.3** 设 $P,Q$ 是论域 $U$ 上的两个二元关系，如果成立 $P\subset Q$，就称 $P$ 是比 $Q$ 细的二元关系，或者说 $Q$ 是比 $P$ 粗的二元关系；若 $P\subseteq Q$，则称 $P$ 是不比 $Q$ 更粗的二元关系，或者说 $Q$ 是不比 $P$ 更细的二元关系。

容易看出，$P\subseteq Q$ 的充要条件是 $\forall x\forall y(x\in U\wedge y\in U\wedge xPy\rightarrow xQy)$。

**定义 1.4** 设 $R,S$ 为 $U$ 上的两个二元关系。定义二元关系 $R$ 与 $S$ 的合成为 $U$ 上的二元关系 $R\circ S=\{\langle x,y\rangle\mid\langle x,y\rangle\in U\times U\wedge\exists z(z\in U\wedge xRz\wedge zSy)\}$。对于 $U$ 上的二元关系 $R$，规定 $R^0=E_U,R^1=R,R^{k+1}=R^k\circ R,k\in\mathbb{N}$。

**例 1.1** 设 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$R=\{\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 5,6\rangle\}$，$S=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 6,1\rangle\}$，则

$$R\circ S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 5,2\rangle\},$$
$$S\circ R=\{\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 5,4\rangle\},$$
$$R^2=\{\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,3\rangle\}。$$

**定义 1.5** 设 $R$ 为 $U$ 上的一个二元关系。如果对于所有的 $x\in U$，都有 $xRx$，则称 $R$ 为自反的或反身的二元关系。

**定理 1.1** 设 $R$ 为 $U$ 上的一个二元关系。$R$ 为自反的当且仅当 $R\supseteq E_U$。

**定义 1.6** 设 $R$ 为 $U$ 上的一个二元关系。如果对于所有的 $x,y\in U$，$xRy$ 与 $yRx$ 必同时成立或同时不成立，则称 $R$ 为对称的二元关系。

**定义 1.7** 设 $R$ 为 $U$ 上的一个二元关系。如果对于所有的 $x,y\in U$，$xRy$ 与 $yRx$ 同时成立必然导致 $x=y$ 成立，则称 $R$ 为反对称的二元关系。

**例 1.2** 普通的$\leqslant$和$\geqslant$都是$\mathbb{R}$上的自反关系和反对称关系。

**定义 1.8** 设 $R$ 为 $U$ 上的一个二元关系。如果对于所有的 $x,y,z\in U$，$xRy$ 与 $yRz$ 同时成立必导致 $xRz$ 成立，则称 $R$ 为传递的二元关系。

**例 1.3** 普通的$\leqslant$，$<$，$\geqslant$，$>$都是实数集合$\mathbb{R}$上的传递关系。

**定理 1.2** 设 $R$ 为 $U$ 上的一个二元关系。$R$ 为传递的当且仅当 $R^2\subseteq R$。

**定义 1.9** 设 $R$ 为 $U$ 上的一个二元关系。如果 $R$ 同时是自反的、反对称的和传递的，则称 $R$ 为 $U$ 上的一个偏序关系。

**定义 1.10** 设 $R$ 为 $U$ 上的一个二元关系。如果 $R$ 同时是自反的和对称的，则称 $R$ 为相容的二元关系。

**定义 1.11** 设 $R,S$ 为 $U$ 上的两个二元关系。定义 $R\cap S$ 和 $R\cup S$ 分别为二元关系 $R$ 和 $S$ 的交与并。

**定义 1.12** 设 $R$ 为 $U$ 上的一个二元关系。定义二元关系 $R$ 的逆关系和反关系分别为

$$R^{-1}=\{\langle x,y\rangle\mid x\in U\wedge y\in U\wedge\langle y,x\rangle\in R\},$$
$$\overline{R}=\{\langle x,y\rangle\mid x\in U\wedge y\in U\wedge\langle x,y\rangle\notin R\}。$$

据此定义，$R\cup R^{-1}$ 和 $R\cap R^{-1}$ 总是对称的。$R$ 是自反的当且仅当 $R^{-1}$ 是自反

的；$R$ 是传递的当且仅当 $R^{-1}$ 是传递的；$R$ 是对称的当且仅当 $R^{-1}=R$。

**定义 1.13** 设 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 是 $n$ 个非空集合。$U_1\times U_2\times\cdots\times U_n$ 的每一个子集 $R$ 称为 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 上的一个 $n$ 元关系。特别地，当 $n=2$ 时，称 $R$ 为从 $U_1$ 到 $U_2$ 的一个二元关系；当 $U_1=U_2=\cdots=U_n=U$ 时，称 $R$ 为 $U$ 上的一个 $n$ 元关系。

仿照定义 1.4 可以推广多元关系合成的概念。

### 1.1.3 等价关系

**定义 1.14** 设 $R$ 为 $U$ 上的一个二元关系。如果 $R$ 同时是自反的、对称的和传递的，则称 $R$ 为相似的二元关系，或称 $R$ 为 $U$ 上的一个等价关系。当不涉及具体的集合时，等价关系常用符号$\equiv$表示。如果元素 $x,y\in U$ 满足 $x\equiv y$，则称 $x$ 等价于 $y$。

**例 1.4** 设 $f: X\to Y$ 是一个函数，在集合 $X$ 上定义二元关系 $E_f$ 为：$xE_fy$ 当且仅当$f(x)=f(y)$。容易验证 $E_f$ 是 $X$ 上的一个等价关系，称为由函数 $f$ 诱导出的等价关系。

**定义 1.15** 设 $R$ 为 $U$ 上的等价关系。对于每一个 $x\in U$，称$[x]_R=\{y\mid y\in U\wedge yRx\}$为元素 $x$ 的 $R$ 等价类，在不引起混淆时简记作$[x]$。所有不同的 $R$ 等价类构成的族 $U/R=\{[x]_R\mid x\in U\}$称为 $U$ 关于 $R$ 的商集，而函数 $\nu: U\to U/R, x\mapsto [x]_R$ 称为由等价关系 $R$ 诱导出的自然映射。

**定理 1.3** 设 $R$ 为 $U$ 上的等价关系，$\varnothing\subset V\subseteq U$，则 $R$ 也是 $V$ 上的等价关系，并且对于每一个 $x\in V$，$x$ 在 $V$ 上的 $R$ 等价类为$[x]_R\cap V$。这里$[x]_R$ 是 $x$ 在 $U$ 上的 $R$ 等价类。

**定理 1.4** 设 $P,Q$ 为 $U$ 上的两个等价关系。$P\subseteq Q$ 的充分必要条件是：对于任意的$x\in U$，成立$[x]_P\subseteq[x]_Q$。

**证明** 必要性。设 $P\subseteq Q$，来证每一 $x\in U$ 满足$[x]_P\subseteq[x]_Q$。对于任意的 $x\in U$，任取$y\in[x]_P$。由于 $xPy$，且 $P\subseteq Q$，因此 $xQy$，即 $y\in[x]_Q$。所以$[x]_P\subseteq[x]_Q$。

充分性。假设对于任意的 $x\in U$，成立$[x]_P\subseteq[x]_Q$，来证明 $P\subseteq Q$。设 $x,y\in U$ 满足 $xPy$，则 $y\in[x]_P\subseteq[x]_Q$，故 $xQy$。所以 $P\subseteq Q$。 ■

**定义 1.16** 设 $P,Q$ 为 $U$ 上的两个等价关系。若 $P\subset Q$，则称 $P$ 是比 $Q$ 更细的等价关系，或者说 $Q$ 是比 $P$ 更粗的等价关系；若 $P\subseteq Q$，则称 $P$ 是不比 $Q$ 更粗的等价关系，或者说 $Q$ 是不比 $P$ 更细的等价关系。

越细的等价关系越接近相等关系 $E_U$。$E_U$ 是 $U$ 上最细的等价关系，全域关系是最粗的等价关系。

**定理 1.5** 设$\equiv$为 $U$ 上的等价关系，$x,y\in U$。$x\equiv y$ 当且仅当$[x]=[y]$。当 $x\not\equiv y$ 时$[x]\cap[y]=\varnothing$。因此，两个等价类要么相等，要么不相交。

**证明** 由等价类的定义，当$[x]=[y]$时显然有 $x\equiv y$。反之，设 $x\equiv y$，来证

$[x]=[y]$。对于任意的 $z\in[x]$，由等价类的定义有 $z\equiv x$，再由等价关系的传递性知 $z\equiv y$。于是 $z\in[y]$，从而 $[x]\subseteq[y]$；同理 $[y]\subseteq[x]$。所以 $[x]=[y]$。现设 $x\not\equiv y$，来证 $[x]\cap[y]=\varnothing$。如果 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$，则存在 $z\in[x]\cap[y]$。由 $z\in[x]$ 知 $x\equiv z$；由 $z\in[y]$ 知 $z\equiv y$。由等价关系的传递性知 $x\equiv y$，与 $x\not\equiv y$ 的假设矛盾。所以当 $x\not\equiv y$ 时 $[x]\cap[y]=\varnothing$。 ■

**定理 1.6** 设 $\Pi$ 和 $\Omega$ 是 $U$ 上的两族等价关系，则

(1) $\mathrm{ind}(\Omega)=\bigcap_{R\in\Omega}R$ 是 $U$ 上的一个等价关系。

(2) 若 $\Pi\subseteq\Omega$，则 $\mathrm{ind}(\Omega)\subseteq\mathrm{ind}(\Pi)$；$\mathrm{ind}(\Pi)=\mathrm{ind}(\Omega)$ 当且仅当 $\mathrm{ind}(\Pi)\subseteq\mathrm{ind}(\Omega)$。

(3) $\mathrm{ind}(\Pi\cup\Omega)=\mathrm{ind}(\Pi)\cap\mathrm{ind}(\Omega)$；$\mathrm{ind}(\Pi\cup\Omega)=\mathrm{ind}(\Pi)$ 等价于 $\mathrm{ind}(\Pi)\subseteq\mathrm{ind}(\Omega)$。

根据定理 1.1，有 $\mathrm{ind}(\Omega)\supseteq E_U$。若 $\Omega=\varnothing$，则 $\mathrm{ind}(\Omega)$ 理解为全域关系。

**定义 1.17** 设 $\Omega$ 是 $U$ 上的一族等价关系，则称 $U$ 上的等价关系 $\mathrm{ind}(\Omega)$ 为等价关系族 $\Omega$ 的难区分关系。将 $x\in U$ 的 $\mathrm{ind}(\Omega)$ 等价类 $[x]_{\mathrm{ind}(\Omega)}$ 简记作 $[x]_\Omega$，简称 $\Omega$ 等价类；并将 $U/\mathrm{ind}(\Omega)$ 简记作 $U/\Omega$。

**定义 1.18** 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是非空集合 $U$ 的一族互不相交的非空子集。如果这族子集覆盖 $U$，即 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=U$，则称这族子集是 $U$ 的一个划分。

**定理 1.7** 设 $R$ 为 $U$ 上的一个等价关系，则 $U=\bigcup_{x\in U}[x]_R$。也就是说，$U/R$ 是 $U$ 的一个划分。

**定理 1.8** 设 $R$ 是 $U$ 上的一个等价关系，则商集 $U/R$ 是 $U$ 的一个划分。反之，设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $U$ 的一个划分，在 $U$ 上定义二元关系 $R$ 为：$xRy$ 当且仅当存在 $\alpha\in\Lambda$ 使 $x\in A_\alpha$ 且 $y\in A_\alpha$，则 $R$ 是 $U$ 上的一个等价关系，且 $U/R=\{A_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$。

定理 1.8 的证明留作习题。

**定理 1.9** 设 $R_1$ 和 $R_2$ 为 $U$ 上的两个等价关系，则 $R_1=R_2$ 当且仅当 $U/R_1=U/R_2$。

**定理 1.10** 设 $R_1$ 和 $R_2$ 为 $U$ 上的两个等价关系，则 $R_1\cap R_2=R_1$ 当且仅当 $R_1\subseteq R_2$。

**定理 1.11** 设 $\Pi,\Omega$ 是 $U$ 上的两族等价关系，则

(1) 对于任意的 $x\in U$，有 $[x]_\Omega=\bigcap_{R\in\Omega}[x]_R$，$[x]_{\Pi\cup\Omega}=[x]_\Pi\cap[x]_\Omega$。

(2) $\mathrm{ind}(\Pi)\subseteq\mathrm{ind}(\Omega)$ 当且仅当对于任意的 $x\in U$，有 $[x]_\Pi\subseteq[x]_\Omega$。

**证明** (1) 根据等价类定义有

$$\begin{aligned}[x]_\Omega&=\{y\mid y\in U\wedge\langle x,y\rangle\in\mathrm{ind}(\Omega)\}\\&=\{y\mid y\in U\wedge\forall R(R\in\Omega\rightarrow\langle x,y\rangle\in R)\}\end{aligned}$$

$$=\{y \mid y \in U \wedge \forall R(R \in \Omega \rightarrow y \in [x]_R)\}$$
$$=\bigcap_{R\in\Omega}[x]_R.$$

据此得到$[x]_{\Pi\cup\Omega}=[x]_\Pi\cap[x]_\Omega$。

(2) 根据定理1.4直接得到结果。 ■

**例 1.5** 设$U=\{x_k \mid 1\leqslant k\leqslant 9\}$，$\Omega=\{P,Q,R\}$，其中

$$U/P=\{\{x_1,x_4,x_5\},\{x_2,x_8\},\{x_3,x_9\},\{x_6,x_7\}\},$$
$$U/Q=\{\{x_1,x_3,x_5\},\{x_6,x_9\},\{x_2,x_4,x_7,x_8\}\},$$
$$U/R=\{\{x_1,x_5\},\{x_6,x_9\},\{x_2,x_7,x_8\},\{x_3,x_4\}\},$$

求$\mathrm{ind}(\{P,Q\})$和$\mathrm{ind}(\Omega)$。

**解** 根据定理1.11，分别求出各元素的$\mathrm{ind}(\{P,Q\})$和$\mathrm{ind}(\Omega)$等价类，得到

$$U/\{P,Q\}=\{\{x_1,x_5\},\{x_2,x_8\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_9\}\},$$
$$U/\Omega=\{\{x_1,x_5\},\{x_2,x_8\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_6\},\{x_7\},\{x_9\}\}。$$

## 1.2 上确界与下确界

**定义 1.19** 设$X$是一个非空实数集合。如果存在实数$\alpha$，使得所有的$x\in X$都满足$x\geqslant\alpha$，则称集合$X$是下方有界的，并称$\alpha$是$X$的一个下界；否则称集合$X$是下方无界的。如果存在实数$\beta$，使得所有的$x\in X$都满足$x\leqslant\beta$，则称集合$X$是上方有界的，并称$\beta$是$X$的一个上界；否则称集合$X$是上方无界的。如果$X$既是下方有界的，也是上方有界的，则称$X$是有界的。

**定理 1.12(确界原理)** 每一个下方有界的实数集合都有最大下界；每一个上方有界的实数集合都有最小上界。

**定义 1.20** 设$X$是一个非空实数集合。如果$X$是下方有界的，则称其最大下界为其下确界，记作$\inf X$；如果$X$是上方有界的，则称其最小上界为其上确界，记作$\sup X$。如果$X$是下方无界的，则称其下确界为$-\infty$，记作$\inf X=-\infty$；如果$X$是上方无界的，则称其上确界为$+\infty$，记作$\sup X=+\infty$。

这样一来，就可以用$\inf X>-\infty$表示$X$是下方有界的实数集合，用$\sup X<+\infty$表示$X$是上方有界的实数集合，用$\inf X>-\infty$且$\sup X<+\infty$表示$X$是有界的实数集合。

显然，对于每一个非空有界实数集合$X$，有$\inf X\leqslant\sup X$。

设$f(x)$是在实数集合$X$上有定义的一个函数。记

$$\inf_{x\in X}f(x)=\inf\{f(x)\mid x\in X\},\quad \sup_{x\in X}f(x)=\sup\{f(x)\mid x\in X\}。$$

**例 1.6** 对于三角函数，有

$$\inf_{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}}\sin x=-1,\quad \sup_{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}}\sin x=1;$$

$$\inf_{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty, \qquad \sup_{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty。$$

**定理 1.13** 设 $X$ 是一个非空实数集合，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则

(1) $\inf X=\alpha$ 当且仅当 $\alpha$ 是 $X$ 的一个下界，同时大于 $\alpha$ 的实数都不是 $X$ 的下界；

(2) $\sup X=\beta$ 当且仅当 $\beta$ 是 $X$ 的一个上界，同时小于 $\beta$ 的实数都不是 $X$ 的上界。

设 $X$ 是一个非空实数集合。如果 $X$ 有最大元素 $\max X$，则显然 $\sup X=\max X$；如果 $X$ 有最小元素 $\min X$，则显然 $\inf X=\min X$。特别地，当 $X$ 是非空有限实数集合时，有 $\inf X=\min X$，$\sup X=\max X$。一般地，有下面的定理 1.14。

**定理 1.14** 设 $X$ 是一个非空实数集合，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则

(1) $\min X=\alpha$ 当且仅当 $\alpha$ 是 $X$ 的一个下界且 $\alpha\in X$；

(2) $\max X=\beta$ 当且仅当 $\beta$ 是 $X$ 的一个上界且 $\beta\in X$。

定理 1.14 的证明留作习题。

**定理 1.15** 设 $X,Y$ 是两个非空实数集合，$X+Y=\{x+y \mid x\in X\wedge y\in Y\}$，则

(1) $\inf(X+Y)=\inf X+\inf Y$；

(2) $\sup(X+Y)=\sup X+\sup Y$。

**证明** 只证(1)。当 $\inf X=-\infty$，或 $\inf Y=-\infty$，或 $\inf X=\inf Y=-\infty$ 时，结论是显然的。以下设 $\inf X>-\infty$，$\inf Y>-\infty$。

记 $\alpha=\inf X$，$\beta=\inf Y$。由于对于所有的 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 都有 $x\geqslant\alpha$，$y\geqslant\beta$，因此 $x+y\geqslant\alpha+\beta$，即 $\alpha+\beta$ 是 $X+Y$ 的一个下界。设 $\lambda>\alpha+\beta$，则 $\mu=\lambda-(\alpha+\beta)>0$。注意到 $\alpha+\frac{\mu}{2}>\alpha$，$\beta+\frac{\mu}{2}>\beta$，由定理 1.13 知，存在 $x\in X$ 和 $y\in Y$ 分别满足 $x<\alpha+\frac{\mu}{2}$ 和 $y<\beta+\frac{\mu}{2}$。于是存在 $x+y\in X+Y$ 满足 $x+y<\alpha+\beta+\mu=\lambda$。再由定理 1.13 可知 $\inf(X+Y)=\alpha+\beta$。 ■

**推论 1.1** 设 $X$ 是一个非空实数集合，$a\in\mathbb{R}$，$a+X=\{a\}+X$，则

(1) $\inf(a+X)=a+\inf X$；

(2) $\sup(a+X)=a+\sup X$。

**定理 1.16** 设 $X$ 是一个非空有界实数集合，$-X=\{-x \mid x\in X\}$，则

(1) $\sup(-X)=-\inf X$；

(2) $\inf(-X)=-\sup X$。

**证明** 只证(1)。当 $\inf X=-\infty$ 时，结论是明显的。以下设 $\inf X>-\infty$。

记 $\alpha=\inf X$。由于对于所有的 $x\in X$ 都有 $x\geqslant\alpha$，因此 $-x\leqslant-\alpha$，即 $-\alpha$ 是 $-X$ 的一个上界。设 $\lambda<-\alpha$，则 $-\lambda>\alpha$。由定理 1.13 知，存在 $x\in X$ 满足 $x<-\lambda$。于是存在 $-x\in -X$ 满足 $-x>\lambda$。再由定理 1.13 可知 $\sup(-X)=-\alpha$。 ■

**定理 1.17** 设 $X,Y$ 是两个非空实数集合，$X-Y=\{x-y \mid x\in X\wedge y\in Y\}$，则

(1) $\inf(X-Y)=\inf X-\sup Y$；

(2) $\sup(X-Y)=\sup X-\inf Y$。

**推论 1.2** 设 $X$ 是一个非空实数集合，$a\in\mathbb{R}$，则

(1) $\inf(a-X)=a-\sup X$；

(2) $\sup(a-X)=a-\inf X$。

**定理 1.18** 设 $X$ 是一个非空实数集合，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，则

(1) $\inf X=\alpha$ 当且仅当 $\alpha$ 是 $X$ 的一个下界并且存在 $X$ 中的数列 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\alpha$；$\inf X<\alpha$ 当且仅当存在 $X$ 中的数列 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n<\alpha$；$\inf X\leqslant\alpha$ 当且仅当存在 $X$ 中的数列 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\leqslant\alpha$。

(2) $\sup X=\beta$ 当且仅当 $\beta$ 是 $X$ 的一个上界并且存在 $X$ 中的数列 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\beta$；$\sup X>\beta$ 当且仅当存在 $X$ 中的数列 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n>\beta$；$\sup X\geqslant\beta$ 当且仅当存在 $X$ 中的数列 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\geqslant\beta$。

**证明** 只证(1)。先证明 $\inf X=\alpha$ 当且仅当 $\alpha$ 是 $X$ 的一个下界并且存在 $X$ 中的数列 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\alpha$。

必要性。设 $\inf X=\alpha$，则 $\alpha$ 是 $X$ 的一个下界。对于每一个正整数 $n$，由于 $\alpha+\frac{1}{n}>\alpha$，由定理 1.13 知存在 $x_n\in X$ 满足 $\alpha\leqslant x_n<\alpha+\frac{1}{n}$。显然 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\alpha$。

充分性。设 $\alpha$ 是 $X$ 的一个下界且存在 $X$ 中的数列 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\alpha$，来证 $\inf X=\alpha$。设 $\lambda>\alpha$，由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\alpha$，因此存在正整数 $N$，使得对于所有的正整数 $n\geqslant N$，都成立 $\alpha\leqslant x_n<\alpha+(\lambda-\alpha)=\lambda$，从而也有 $x_N<\lambda$。由定理 1.13 知 $\inf X=\alpha$。

再证明 $\inf X<\alpha$ 当且仅当存在 $X$ 中的数列 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n<\alpha$。

必要性。设 $\inf X<\alpha$，则 $\alpha$ 不是 $X$ 的下界，因此存在 $x\in X$ 使 $x<\alpha$。令 $x_n=x$，则显然 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n<\alpha$。

充分性。设存在 $X$ 中的数列 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n<\alpha$，则在数列 $\{x_n\}$ 中至少存在一项 $x_N$ 使 $x_N<\alpha$。而 $x_N\in X$，因此 $\alpha$ 不是 $X$ 的下界，从而 $\inf X<\alpha$。

综合以上结论可知，$\inf X\leqslant\alpha$ 当且仅当存在 $X$ 中的数列 $\{x_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\leqslant\alpha$。■

**定理 1.19** 设 $X,Y$ 是两个非空的**非负**实数集合，$XY=\{xy \mid x\in X\wedge y\in Y\}$，则

(1) $\inf(XY)=\inf X\cdot\inf Y$；

(2) $\sup(XY)=\sup X\cdot\sup Y$。

**证明** (1) 由于 $X$ 和 $Y$ 都是非负实数集合，因此显然有 $a=\inf X\geqslant0$，$b=\inf Y\geqslant0$，并且对于每一个 $x\in X$ 和 $y\in Y$，有 $xy\geqslant ab$。根据定理 1.18，存在 $X$ 中的数列

$\{x_n\}$使 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$，存在 $Y$ 中的数列 $\{y_n\}$ 使 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=b$。因此存在 $XY$ 中的数列 $\{x_ny_n\}$使 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_ny_n=ab$。由定理 1.18 知 $\inf(XY)=ab$。

(2) 当 $\sup X=+\infty$，或 $\sup Y=+\infty$，或 $\sup X=\sup Y=+\infty$时，结论是显然的。

设 $\alpha=\sup X<+\infty$，$\beta=\sup Y<+\infty$。根据定理 1.18，$\alpha$ 是 $X$ 的一个上界并且存在 $X$ 中的数列$\{x_n\}$使 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\alpha$，$\beta$ 是 $Y$ 的一个上界并且存在 $Y$ 中的数列$\{y_n\}$使 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=\beta$。显然 $\alpha\beta$ 是 $XY$ 的一个上界并且存在 $XY$ 中的数列$\{x_ny_n\}$使 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_ny_n=\alpha\beta$。由定理 1.18 知 $\sup(XY)=\alpha\beta$。 ■

**推论 1.3** 设 $X$ 是一个非空实数集合，$a$ 是任意一个非负实数，$aX=\{ax\mid x\in X\}$，则

(1) $\inf(aX)=a\inf X$；

(2) $\sup(aX)=a\sup X$。

**定理 1.20** 设 $X,Y$ 是两个非空实数集合，则

(1) $\inf(X\cup Y)=\min\{\inf X,\inf Y\}$；

(2) $\sup(X\cup Y)=\max\{\sup X,\sup Y\}$。

**证明** (1) 当 $\inf X=-\infty$，或 $\inf Y=-\infty$，或 $\inf X=\inf Y=-\infty$时，结论是显然的。

设 $a=\inf X>-\infty$，$b=\inf Y>-\infty$。由于 $a$ 是 $X$ 的一个下界，$b$ 是 $Y$ 的一个下界，因此 $\min\{a,b\}$是 $X\cup Y$ 的一个下界。设 $\lambda>\min\{a,b\}$，则 $\lambda>a$ 或 $\lambda>b$。若 $\lambda>a$，则由定理 1.13 有 $x\in X$ 满足 $x<\lambda$，显然 $x\in X\cup Y$；若 $\lambda>a$，则由定理 1.13 有 $y\in Y$ 满足 $y<\lambda$，显然 $y\in X\cup Y$。由定理 1.13 知 $\inf(X\cup Y)=\min\{a,b\}$。

(2) 当 $\sup X=+\infty$，或 $\sup Y=+\infty$，或 $\sup X=\sup Y=+\infty$时，结论是显然的。

设 $\alpha=\sup X<+\infty$，$\beta=\sup Y<+\infty$。由于 $\alpha$ 是 $X$ 的一个上界，$\beta$ 是 $Y$ 的一个上界，因此 $\max\{\alpha,\beta\}$是 $X\cup Y$ 的一个上界。设 $\lambda<\max\{\alpha,\beta\}$，则 $\lambda<\alpha$ 或 $\lambda<\beta$。若 $\lambda<\alpha$，则由定理 1.13 有 $x\in X$ 满足 $x>\lambda$，显然 $x\in X\cup Y$；若 $\lambda<\beta$，则由定理 1.13 有 $y\in Y$ 满足 $y>\lambda$，显然 $y\in X\cup Y$。由定理 1.13 知 $\sup(X\cup Y)=\max\{\alpha,\beta\}$。 ■

**定理 1.21** 设 $X$ 是非空有界实数集合，$a\in\mathbb{R}$，则

(1) $\max\{a,\sup X\}=\sup\limits_{x\in X}\max\{a,x\}$；

(2) $\min\{a,\sup X\}=\sup\limits_{x\in X}\min\{a,x\}$；

(3) $\max\{a,\inf X\}=\inf\limits_{x\in X}\max\{a,x\}$；

(4) $\min\{a,\inf X\}=\inf\limits_{x\in X}\min\{a,x\}$。

**证明** 设 $\alpha=\inf X$，$\beta=\sup X$。以下分三种情况逐条证明各结论。

当 $\beta\leqslant a$ 时，对于所有的 $x\in X$ 都有 $x\leqslant a$。于是 $\max\{a,x\}=a$，$\min\{a,x\}=x$。所以有