现代数学基础丛书 163

偏微分方程引论

韩丕功 刘朝霞 著

科学出版社

现代数学基础丛书 163

偏微分方程引论

韩丕功 刘朝霞 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统介绍现代偏微分方程的基本理论和方法. 偏微分方程是数学学科的一个重要分支, 主要来源于物理学、化学、力学、几何学及泛函分析理论的研究, 它与其他数学分支均有广泛的联系, 而且在自然科学与工程技术中有广泛的应用. 本书内容主要包括广义函数理论, Sobolev 空间的基本性质和技巧, 二阶线性椭圆型方程、双曲型方程、抛物型方程与半群理论. 本书的特点是循序渐进, 强调基础理论的同时, 注意具体应用. 书中内容深入浅出, 文字通俗易懂, 并配有适量难易兼顾的习题.

本书可作为偏微分方程、动力系统、计算数学、控制论和泛函分析及相关理工科方向研究生的教材和教学参考书, 也可作为工程等领域的教师和科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程引论/韩丕功, 刘朝霞著. —北京：科学出版社, 2016.3

(现代数学基础丛书；163)

ISBN 978-7-03-047732-3

Ⅰ. ①偏… Ⅱ. ①韩…②刘… Ⅲ. ①偏微分方程 Ⅳ. ①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 050565 号

责任编辑: 李 欣 / 责任校对: 张凤琴

责任印制: 张 倩 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

三河骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2016 年 3 月第一次印刷 印张: 19 3/4

字数: 400 000

定价: 118.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述. 据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷. 它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨 乐

2003 年 8 月

前　言

本书系统讲述偏微分方程一般理论的主要结果和研究方法. 主要内容包括广义函数理论, 如广义函数的支集、极限、导数、广义函数的 Fourier 变换和广义函数的卷积等, 拟微分算子的概念和基本性质等, 特别是系统介绍了广义函数的严格数学定义及其基本性质和应用; 线性微分方程基本解的定义、性质; 实分析与泛函分析在 Sobolev 空间中的应用, Sobolev 空间的基本性质和基本技巧, 如逼近理论、紧嵌入理论、迹定理、函数的延拓等基本理论以及局部化、光滑化和旋转、平直等技巧; 二阶线性椭圆方程的边值问题弱解的存在性、唯一性、正则性理论等方面的主要结果, 以及差商方法、特征值问题等; 二阶线性抛物方程和二阶线性双曲方程的基本理论, 包括弱解的存在唯一性、正则性, 能量方法, Galerkin 方法, (解析) 算子半群理论及其在发展方程的应用等. 为提高读者的整体数学素质提供必要的材料, 也为部分读者进一步学习与研究偏微分方程理论做了准备.

偏微分方程是数学学科的一个重要分支, 与其他数学分支均有广泛的联系, 而且在自然科学与工程技术中有广泛的应用.

本书特别强调可读性, 强调直观对理解问题实质的重要作用. 我们尽可能用通俗易懂的语言和方法来给出系统严谨的论述和证明. 本书共分七章, 可作为读者进入一个新的理论领域的起点.

第 1 章介绍一些基本的不等式、常用的数学符号、实变函数论和泛函分析中的一些基本结论 (例如, Lebesgue 控制收敛定理、闭图像定理和弱收敛方法等) 和本书的结构安排等.

第 2 章主要介绍广义函数理论, 给出三类基本空间及相应的三类广义函数空间; 进一步介绍广义函数的基本性质, 包括支集概念、广义收敛极限、广义导数、乘子、广义卷积和广义 Fourier 变换等.

第 3 章主要研究 Sobolev 空间及其相关性质, 包括非负整数、负整数和实指数 Sobolev 空间, Sobolev (紧) 嵌入定理, 延拓定理, 迹定理等.

第 4 章介绍偏微分方程的一般理论, 包括一般概念以及基本解等, 特别是研究了 δ 广义函数的基本性质及其应用.

第 5 章考虑二阶线性椭圆型偏微分方程, 包括初边值问题的可解性和弱解的正则性等.

第 6 章研究二阶线性双曲型偏微分方程, 重点介绍能量不等式和唯一性、初边值问题解的存在性以及对称双曲组的可解性.

第 7 章研究二阶线性抛物型偏微分方程, 主要介绍弱解的定义及其能量不等式, 解析算子半群与无穷小生成元的关系, 以及算子半群理论的应用.

本书作为现代偏微分方程理论的入门书, 适合作为数学专业人员的阅读材料和研究生教材, 也可作为偏微分方程、动力系统、泛函分析、计算数学、数学物理、控制论、大气海洋物理等方向的高年级研究生、青年教师及科研人员进行深入研究的参考书. 本书在写作过程中, 参阅了国内外同一主题的一些著作, 简化了许多证明, 发现并纠正了一些错误, 相信这些对读者有所帮助. 本书的讲义, 作者在中国科学院大学为研究生讲授过多年, 并被列为中国科学院大学数字精品课程.

本书的出版, 得到中国科学院随机复杂结构与数据科学重点实验室 (No.2008DP173182), 中国科学院青年创新促进会, 中国科学院大学数字精品课程, 国家自然科学基金 (No. 11471322) 的资助. 在编写讲义和成书的过程中, 中国科学院数学与系统科学研究院和中央民族大学的很多同行和广大研究生, 都提出了许多宝贵的意见和建议, 在此一并致谢.

由于作者学识水平所限, 书中难免有不足之处, 欢迎读者予以批评指正.

作　者

2015 年 10 月于北京

符 号 表

$\mathbb{R}^1$	实数集合
$\mathbb{N}$	自然数集合
$x \in \mathbb{R}^n$	x 属于 n 维欧氏空间
x_i	向量 x 的第 i 个分量
ν_i	单位外法向量 ν 的第 i 个分量
X^*	表示 Banach 空间 X 的拓扑共轭空间
$C_c^\infty(\Omega)$	在 Ω 内具有紧支集的实值或复值的 C^∞ 函数空间
$L^p(\Omega)$	在 Ω 上可测并且 $\|u\|^p$ 可积的函数空间
$L^\infty(\Omega)$	在 Ω 上可测并且几乎处处有界的函数空间
$\\|\cdot\\|_{L^p(\Omega)}$	表示 $L^p(\Omega)$ 空间范数：$\left(\int_\Omega \|u\|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$，$1 \leqslant p < \infty$
$\\|\cdot\\|_{L^\infty(\Omega)}$	表示 $L^\infty(\Omega)$ 空间范数：$\inf\{C > 0 \mid \|u(x)\| \leqslant C$ 几乎处处成立$\}$
$X \hookrightarrow Y$	Banach 空间 X 连续嵌入到 Banach 空间 Y
S_p	Sobolev 最佳嵌入常数
∂^α	表示导数 $\dfrac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$
$W^{m,p}(\Omega)$	表示函数空间 $\{f \in L^p(\Omega),\ \partial^\alpha f \in L^p(\Omega),\ \|\alpha\| \leqslant m\}$
$H^m(\Omega)$	表示函数空间 $W^{m,2}(\Omega)$
$\\|\cdot\\|_{W^{m,p}(\Omega)}$	表示 $W^{m,p}(\Omega)$ 空间范数：$\\|u\\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{\|\alpha\| \leqslant m} \\|\partial^\alpha u\\|_{L^p(\Omega)}$
$W_0^{m,p}(\Omega)$	表示函数空间 $C_c^\infty(\Omega)$ 在范数 $\\|\cdot\\|_{W^{m,p}(\Omega)}$ 下的完备化，$W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$
$\rightharpoonup$	表示弱收敛
$\longrightarrow$	表示强收敛或几乎处处收敛

目　录

第 1 章　预 备 知 识

作为全书的预备知识, 本章主要介绍一些基础知识和常用的不等式. 为了紧缩篇幅, 这些不等式都没有给出证明, 但会指出有详细证明的参考文献. 此外, 我们假定读者了解实变函数理论和泛函分析的基本知识. 某些需要用到的结果将在各章适当的地方加以介绍.

1.1　基础知识和常用不等式

本节介绍偏微分方程理论中一些常用的不等式、Sobolev 空间的基本知识等.

1.1.1　几个常用不等式

(1) 设 $1 \leqslant p < \infty$, 则成立

$$(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p+b^p), \quad \forall a, b \geqslant 0.$$

更一般的形式: 设 $1 \leqslant p < \infty$, 对任意的 $m \in \mathbb{N}$, $a_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \cdots, m$ 成立

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^p \leqslant m^{p-1}(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_m^p).$$

(2) **Young 不等式**　设 $\varepsilon > 0, p > 1, q > 1$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 成立

$$|a||b| \leqslant \frac{\varepsilon|a|^p}{p}+\frac{\varepsilon^{-\frac{q}{p}}|b|^q}{q} \leqslant \varepsilon|a|^p+\varepsilon^{-\frac{q}{p}}|b|^q.$$

特别地, 当 $p = q = 2$ 时, 称为 Cauchy 不等式.

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geqslant 1)$ 为一可测集.

(3) **Hölder 不等式**　设 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 对任意 $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, 成立

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

特别地, 当 $p = q = 2$ 时, 称为 Schwarz 不等式.

离散的 Hölder 不等式　对于任意的正整数 m, 以及上述 p, q, 成立

$$\left|\sum_{k=1}^m a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^m |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^m |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中, 当 $p=\infty$ 时, $\left(\sum_{k=1}^{m}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\max\limits_{k}|a_k|$.

Hölder 不等式还可以推广到一般形式: 设 $1\leqslant p\leqslant p_j\leqslant\infty$, $j=1,2,\cdots,m$ 满足

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_m}=\frac{1}{p},\quad m\in\mathbb{N},$$

则对任意的 $u_j\in L^{p_j}(\Omega)$, 成立

$$\|u_1u_2\cdots u_m\|_{L^p(\Omega)}\leqslant\|u_1\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|u_2\|_{L^{p_2}(\Omega)}\cdots\|u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}.$$

(4) **内插不等式** 设 $1\leqslant q\leqslant r\leqslant p\leqslant\infty$, 且 $\theta\in[0,1]$ 满足 $\dfrac{1}{r}=\dfrac{\theta}{q}+\dfrac{1-\theta}{p}$, 则对任意 $u\in L^p(\Omega)\cap L^q(\Omega)$, 成立

$$\|u\|_{L^r(\Omega)}\leqslant\|u\|_{L^q(\Omega)}^{\theta}\|u\|_{L^p(\Omega)}^{1-\theta}.$$

(5) **Minkowski 不等式** 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 对任意 $f,g\in L^p(\Omega)$. 成立

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)}\leqslant\|f\|_{L^p(\Omega)}+\|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

离散的 Minkowski 不等式 对于任意的正整数 m, 以及上述 p, 成立

$$\left(\sum_{k=1}^{m}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{m}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{m}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

设 $I\subseteq\mathbb{R}^1$, 称 f 为 I 上的 (实值) 凸函数. 如果对任意的 $\lambda\in(0,1)$, $x,y\in I$, 成立

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

容易验证: 如果 f'' 存在, 则 $f''(t)\geqslant0$, $t\in I$. 关于凸函数, 成立如下不等式.

(6) **Jensen 不等式** 设 $u\in L^1(a,b)$, a,b 为有限实数, 以及 $f:\mathbb{R}^1\longrightarrow\mathbb{R}^1$ 为凸函数, 则下述不等式成立:

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u(y))\mathrm{d}y.$$

或简写为: $f(\overline{u})\leqslant\overline{f(u)}$. 这里 $\overline{g}=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

(7) **加权不等式** 设 $1\leqslant q<n$, $x_0\in\Omega$, 则成立

$$\int_\Omega\frac{|u(x)|^q}{|x-x_0|^q}\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{q}{n-q}\right)^q\int_\Omega|\nabla u(x)|^q\mathrm{d}x,\quad\forall\,u\in C_c^\infty(\Omega).$$

(8) **Jordan 不等式** 对任意的 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, 成立: $\dfrac{2\theta}{\pi}\leqslant\sin\theta\leqslant\theta$.

1.1.2 常用符号和定义

为了对本书中的叙述进行准确的说明, 引进一些符号和定义. 例如, $\mathbb{C}$ 表示平面复数域, $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间, $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的点, 它的范数记为: $|x|=\left(\sum\limits_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$, 两个点 x,y 的内积记为: $x\cdot y=\sum\limits_{j=1}^n x_jy_j$. $\mathbb{N}$ 表示自然数集合.

如果 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是非负整数 α_j 的一个 n 重组, 则把 α 称为一个多重指标, 且用 x^α 来表示次数为 $|\alpha|=\sum\limits_{j=1}^n\alpha_j$ 的单项式, 即 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$. 此外, 记 $\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$, 其中 $\partial_j^{\alpha_j}=\dfrac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$. 设 α,β 为两个多重指标, 如果 $\beta_j\leqslant\alpha_j$, $1\leqslant j\leqslant n$, 则称 $\beta\leqslant\alpha$, 此时不难验证: $|\alpha-\beta|+|\beta|=|\alpha|$; 还记 $\alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$.

给定一个集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, 用 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界, $\overline{\Omega}=\partial\Omega\cup\Omega$ 表示 Ω 的闭包. 对于给定的另一集合 $Q\subset\mathbb{R}^n$ 以及点 $x\in\mathbb{R}^n$, 用 $\operatorname{dist}(x,Q)$ 和 $\operatorname{dist}(\Omega,Q)$ 分别表示点 x 到集合 Q, 集合 Ω 和集合 Q 之间的距离:

$$\operatorname{dist}(x,Q)=\inf_{y\in Q}|y-x|,\quad \operatorname{dist}(\Omega,Q)=\inf_{x\in\Omega}\operatorname{dist}(x,Q).$$

对于给定的 $r>0$ 以及点 $x\in\mathbb{R}^n$, 记 $B_r(x)$ 是以 x 为球心, r 为半径的球. 始终用 C (有时也用 $C_1,C_2,\cdots$) 表示正常数, 它们在不同的地方可以不同. $L^p(\Omega)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 表示通常的 L^p 空间, 其范数的定义为

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\ (1\leqslant p<\infty);\quad \|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

1.1.3 一些基础知识

本节不加证明地罗列本书中关于实变函数与泛函分析的若干基本结论, 这些基础性的结论都能在通常的实变函数论与泛函分析教材中找到, 如可参见文献 [1],[21].

书中经常用到紧集的概念. 赋范空间 X 的子集 A 称为紧的, 如果 A 中的每个点列包含一个子序列, 该子序列在 X 中收敛到 A 中的一个元素. 紧集是闭的有界集, 但闭的有界集不一定是紧集, 除非 X 是有限维的. A 称为准紧的, 如果其闭包 $\overline{A}$(在范数拓扑下) 是紧的. A 称为弱序列紧的, 如果 A 中的每个序列包含一个子序列, 该子序列在 X 中弱收敛到 A 中的一个元素.

需要指出的是, 集合 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集, 当且仅当 K 是有界闭集. 该结论仅在有穷维距离空间上成立, 在无穷维空间上不成立.

弱紧定理 Banach 空间 X 是自反的当且仅当 X 中的闭单位球 $\overline{B_1(0)}=\{x\in X|\ \|x\|_X\leqslant1\}$ 是弱序列紧的.

Lusin 定理　假定 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, $A \subset \mathbb{R}^n$ 是一可测集合, 且 $|A| < \infty$. 如果对任意的 $x \in \mathbb{R}^n \backslash A$, $f(x) = 0$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C_c(A)$, 使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |g(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| \quad \text{并且} \quad |\{x \in \mathbb{R}^n |\ f(x) \neq g(x)\}| < \varepsilon,$$

这里 $C_c(A)$ 表示所有在 A 上的连续函数构成的线性空间, 并且对任意的 $g \in C_c(A)$, 具有性质: $\operatorname{supp} g \subset\subset A$, 其中 “ $\subset\subset$ ” 表示严格包含于; $\operatorname{supp} g = \overline{\{x \in A |\ g(x) \neq 0\}}$.

如果 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数 $s(x)$ 的值域是有限个实数, 则称 $s(x)$ 为简单函数. 下面是关于简单函数的逼近定理, 这在积分论中是一个非常有用的工具.

逼近定理　设 A 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个集合, f 为定义在 A 上的实值函数, 则存在一个简单函数列 $s_k(x)$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} s_k(x) = f(x), \quad x \in A.$$

如果 f 是有界的, 则上述点点收敛可以改为一致收敛; 如果 f 是可测函数, 上述每个 s_k 都可以选为可测函数; 如果 f 是非负的, 上述每个 $s_k(x)$ 都可以选为在每一点 $x \in A$ 上都是单调增加的.

Lebesgue 控制收敛定理　设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ 中的可测集合, $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ 是一个实值的可测函数列. 如果 f_k 逐点收敛于一个函数 f, 且存在一个 Lebesgue 非负可积函数 $g \in L^1(\Omega)$, 使得对每个 $k \in \mathbb{N}$, 以及几乎处处的 $x \in \Omega$, 都有

$$|f_k(x)| \leqslant g(x),$$

则 $f \in L^1(\Omega)$, 且成立

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x.$$

Arzelà-Ascoli 定理　设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) 中的有界开集, M 是 $C(\overline{\Omega})$ 中的子集合. 如果 M 是一致有界和等度连续的, 则 M 在 $C(\overline{\Omega})$ 中是准紧的. 这里 M 的有界性:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| \leqslant C, \quad \forall\, f \in M$$

和等度连续: 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得

$$\max_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ |x-y|<\delta}} |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall\, f \in M.$$

压缩不动点定理　设 (X, ρ) 是一个完备的距离空间, 映射 $T:\ X \longrightarrow X$. 若存在 $0 < \alpha < 1$, 使得 $\rho(Tx, Ty) \leqslant \alpha\rho(x, y)$, $\forall x, y \in X$, 则 T 在 X 上存在唯一的不动点 x_0, 即 $Tx_0 = x_0$, $x_0 \in X$.

Riesz 表示定理 设 H 是一个 Hilbert 空间, 令 H^* 是它的对偶空间. 假定 f 是 H 上的一个连续的线性泛函, 即 $f \in H^*$, 则存在唯一的 $y_f \in H$, 使得

$$f(x) = (x, y_f), \quad \forall x \in H; \quad 并且 \quad \|f\| = \|y_f\|.$$

闭图像定理 设 X, Y 为 Banach 空间, 赋予 $X \times Y$ 的范数 $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$, 使得 $X \times Y$ 成为 Banach 空间. 假定 $T : X \to Y$ 为线性算子. 定义 T 的图像为 $X \times Y$ 的子空间

$$\Gamma(T) = \{(x, T(x)) \in X \times Y \,|x \in X\}.$$

那么, 闭图像定理指 T 是连续的 (与有界等价) 当且仅当 $\Gamma(T)$ 在 $X \times Y$ 内是闭集.

共鸣定理(又称一致有界定理) 设 X 是 Banach 空间, Y 为赋范线性空间, I 为指标集, $T_\alpha(\alpha \in I)$ 是 $X \longrightarrow Y$ 的线性有界算子, 如果对于一切 $x \in X$, 数集 $\{\|T_\alpha x\| : \alpha \in I\}$ 都是有界的, 则存在一个和 α 无关的实常数 C, 使得

$$\sup_{\alpha\in I} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(X\to Y)} \leqslant C.$$

最后, 简单介绍一下弱收敛方法, 其被广泛应用于偏微分方程大初值整体弱解的建立过程中.

弱收敛定义 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) 中的开区域, $1 < q < \infty$, $q' = \dfrac{q}{q-1}$. 若存在函数 $f \in L^q(\Omega)$ 及函数序列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^q(\Omega)$ 满足: 对任意的函数 $g \in L^{q'}(\Omega)$, 成立

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x) g(x) \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x) g(x) \mathrm{d}x,$$

则称 f_k 弱收敛于 f, 记为 $f_k \rightharpoonup f \ \ (L^q(\Omega))$.

弱收敛序列的有界性 假定 $f_k \rightharpoonup f \ \ (L^q(\Omega))$, $1 < q < \infty$, 则

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leqslant \liminf_{k\longrightarrow\infty} \|f_k\|_{L^q(\Omega)}.$$

注 1 假设 $1 < q < \infty$, $f_k \rightharpoonup f \ \ (L^q(\Omega))$, 以及

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^q(\Omega)} = \|f\|_{L^q(\Omega)},$$

则

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^q(\Omega)} = 0,$$

即弱收敛 + 范数收敛 $\Longrightarrow$ 强收敛.

弱收敛定理 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ 中的开区域, $1 < q < \infty$. 假定函数序列 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^q(\Omega)$ 关于 k 是一致有界的, 即 $\sup\limits_k \|f_k\|_{L^q(\Omega)} < \infty$, 则存在子序列 $\{f_{k_j}\} \subset \{f_k\}$ 和函数 $f \in L^q(\Omega)$, 使得下述弱收敛关系成立

$$\lim_{k_j\to\infty}\int_\Omega f_{k_j}(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x, \quad \forall\, g \in L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega).$$

注 2 弱 $*$ 收敛定义. 在上述弱收敛定义中, 如果 $q = \infty$, $f \in L^\infty(\Omega)$ 及函数序列 $\{f_k\} \subset L^\infty(\Omega)$ 满足: 对任意的函数 $g \in L^1(\Omega)$, 成立

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

则称 f_k 弱 $*$ 收敛于 f, 记为 $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f(L^\infty(\Omega))$.

注 3 在上述弱收敛序列的有界性、弱收敛定理以及注 1 中, 当 $q = \infty$ 时, 结论均成立, 相应的弱收敛改为弱 $*$ 收敛.

1.2 结构安排

近几十年来, 对现代偏微分方程的研究日益受到重视, 这是因为一方面这些方程所涉及的大量问题来源于物理学、化学、力学和生物学中的众多数学模型, 具有强烈的实际应用背景. 另一方面, 在对这些问题的研究中, 对数学本身也提出了许多挑战性的问题, 从而引起越来越多的数学家、物理学家、生物学家等的关注. 本书对现代偏微分方程理论作简要的介绍, 它也是读者进入一个新的理论领域的起点.

本书共分七章, 第 2 章主要考虑广义函数, 其是古典函数概念的推广. 介绍三类广义函数的基本性质, 包括支集、极限、导数、乘子、自变量变换、卷积和 Fourier 变换等. 目前关于广义函数的研究构成了泛函分析理论中的一个重要分支, 广义函数被广泛地应用于数学、物理、力学以及分析数学的其他各个分支. 例如, 微分方程、随机过程、流形理论等, 它还被广泛应用到群的表示理论, 特别是它有力地促进了偏微分方程近三十年来的发展.

第 3 章主要介绍 Sobolev 空间及其相关性质, 包括非负整数、负整数和实指数 Sobolev 空间, Sobolev (紧) 嵌入定理, 延拓定理, 迹定理, Besov 空间及其性质.

第 4 章介绍偏微分方程的一般理论, 包括一般概念与基本解等.

第 5 章考虑二阶线性椭圆型方程, 包括边值问题的可解性和弱解的正则性等.

第 6 章研究二阶线性双曲型方程, 重点介绍能量不等式和唯一性、初边值问题解的存在性以及对称双曲组的可解性.

第 7 章研究二阶线性抛物型方程, 主要介绍能量不等式、算子半群和无穷小生成元的关系、解析算子半群、分数次阶算子等.

习　题　1

1. 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 为多重指标, 试证: $\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!\leqslant|\alpha|!$.

2. 设 $0<x_0<1$, 则函数 $f(t)=\dfrac{1-x_0^t}{t}$ 关于 $t>0$ 是严格单调递减的.

3. 设 $n\geqslant 2$. 令

$$\Gamma(x,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}},\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t>0.$$

试证: 对于 $t>0$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(x,t)\mathrm{d}x=1.$$

上述函数 $\Gamma(x,t)$ 称为热方程的基本解.

4. 假定 $n\geqslant 1$, $\lambda,\mu\in(0,n)$ 满足 $\lambda+\mu>n$. 试证: 存在常数 $C=C(\lambda,\mu,n)>0$, 使得对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, 成立

$$\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\mathrm{d}y}{|x-y|^\lambda|y|^\mu}\leqslant C|x|^{-(\lambda+\mu-n)}.$$