21世纪
高等职业教育精品课示范性规划教材

# 高等数学学习指导

gaodeng shuxue xuexi zhidao


◆ 主　编　谢良金　邓通德　万　萍
◆ 副主编　方志宏　邹志红　凌巍炜



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

21世纪高等职业教育精品课示范性规划教材

# 高等数学学习指导

主　编　谢良金　邓通德　万　萍
副主编　方志宏　邹志红　凌巍炜



北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容简介

本书是与高职高专《高等数学》最新现行教材同步配套的学习指导书，是高职高专《高等数学》课程的辅助性读物。本书按21世纪高等院校应用型规划教材《高等数学》（上、下册）（邹志宏、方志宏主编）体系分章讨论，各章节由学习要求、疑难解析和典型例题分析、自测题三部分组成。

本书可作为高职高专任何一本高等数学教材的辅助用书，同时也可作为一般高等数学课程教学的教师参考用书。



**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学学习指导/谢良金，邓通德，万萍主编．—北京：北京理工大学出版社，2009. 9

ISBN 978-7-5640-2846-6

Ⅰ．高…　Ⅱ．①谢…②邓…③万…　Ⅲ．高等数学—高等学校：技术学校—教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第160717号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市南阳印刷有限公司
开　　本 / 710毫米×1000毫米　1/16
印　　张 / 7.25
字　　数 / 134千字
版　　次 / 2009年9月第1版　2009年9月第1次印刷
印　　数 / 1~4000册　　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 15.00元　　　责任印制 / 边心超

# 出版说明

科技的全面创新和现代社会的迅猛发展，反映了科学理论对新技术的指导作用以及科技对现代社会发展的推动作用。面临着这个难得的机遇和挑战，我国高等教育正进一步深化改革，进行教育理念和教学模式的转变，充分发掘学生的综合能力，构建现代教学模式，并扎实推动基础教育的改革方向。

为顺应我国教育改革方向，服务国家战略全局，本套书以提高毕业生综合素质、提高就业率为出发点，结合当今企事业单位对高校毕业生的要求，强调高校学生综合素质的全面提升；并强调以服务为宗旨，努力提升服务社会的能力和水平，实现了优质教育资源的跨区域共享。

## 图书定位：

本套教材在内容设置上不断拓展思路，推陈出新。作者依据科学的调研数据及准确的数据分析，编写出全面提升当今大学生综合素质的教材内容；强调在能力培养上突出创新性与实践性，注重学生的自主性及学生发展的全面性。这既是高素质人才培养规律的要求，也是突破教学资源瓶颈的有效举措。

## 图书特色：

- 以就业为导向，培养学生的实际应用能力。
- 以人才培养为中心，围绕学生的全面发展制订内容。
- 以内容为核心，注重形式的灵活性，以便学生易于接受。
- 以提高学生综合素质为基础，注重对学生理论知识体系的构建。

## 读者定位：

本系列教材主要面向全国高等学校在校教师以及学生。

## 丛书特色：

- 层次性强。各教材的编写严格按照由浅及深，循序渐进的原则，突出重

点、难点，以提高学生的学习效率。

- 实用性强。丛书有较强的指导性，使学生对知识有较准确的把握。
- 先进性强。丛书引进国内外先进的教学理念，使学生在对基础知识有明确了解的同时，提高自主创新能力。

北京理工大学出版社

# 前　　言

本书是与高职高专《高等数学》最新现行教材同步配套的学习指导书，是高职高专《高等数学》课程的辅助性读物。本书按21世纪高等院校应用型规划教材《高等数学》（上、下册）（邹志红、方志宏主编）体系分章讨论，各章节由以下三部分组成：

一、学习要求　这一部分指明学习这一章必须掌握的内容及各部分内容的学习目标和基本要求，列出了该章的重点和难点，同时指出学习中应注意的问题，归纳出一些基本解题方法和步骤，以便学生在解题中加以应用。

二、疑难解析和典型例题分析　这一部分围绕本章的重点和难点，选择了一些具有代表性的例题，给出求解的详细过程或多种解法，同时还给出了解题思路分析、解法指导或疑难解析等，以培养和提高学生分析问题和解决问题的能力。

三、自测题　这一部分按各章节所学基本概念、基本运算、基本内容的相关知识点，精选了难易适中的题目，供学生了解自己对本章主要内容、解题方法的理解和掌握的程度。独立完成这些题目，可以起到巩固提高所学内容的作用。

本书编者以长期从事专科数学教学的经验，在内容安排上精心设计，例题针对性强，重点难点突出，贴近学生、贴近实际。本书可作为高职高专任何一本高等数学教材的辅助用书，同时也可作为一般高等数学课程教学的教师参考用书。

本书由谢良金、邓通德、万萍任主编，方志宏、邹志红、凌巍炜任副主编。其中，邹志红、凌巍炜（上册第一、四、五章），万萍（上册第二、三章），谢良金（下册第一、三章），方志宏（下册第二章），邓通德（下册第四章）。全书由谢良金统稿、审稿。

由于编者水平所限，书中不足和错误之处在所难免，恳请广大师生和读者给予批评指正。

编　者

# 目　　录

## 《高等数学》上册

## 《高等数学》下册

# 《高等数学》上册

## 第一章　函数、极限与连续

函数是客观世界中变量与变量之间相互依赖关系的反映，是高等数学的主要研究对象. 极限是研究微积分的重要工具，并作为重要的思想方法和研究工具，贯穿于高等数学课程的始终. 连续性是运用极限的方法揭示出来的函数的重要性质. 本章主要学习函数、极限、连续的基本概念，无穷小和无穷大，极限的运算等内容. 本章内容具有基础性的地位和作用.

### 一、学习要求

(1)熟练掌握六种基本初等函数的定义、性质及其图像. 理解函数的概念和性质，会求函数的定义域；

(2)了解反函数、复合函数的概念，会分析复合函数的复合过程；

(3)理解极限的概念，掌握函数在一点处极限的定义、左右极限与函数极限的关系；

(4)理解无穷小与无穷大的概念及其相互关系，并会对无穷小进行比较；

(5)熟练掌握极限的四则运算法则及两个重要极限. 熟练掌握函数极限的各种求法；

(6)掌握函数连续的概念，会求函数的间断点并确定其类型，会判别函数的连续性；

(7)掌握闭区间上连续函数的性质、最值定理、零值定理、介值定理，并会运用介值定理推证一些简单命题；

(8)会求连续函数和分段函数的极限；

(9)了解经济函数及简单应用.

**重点**：函数、初等函数、复合函数的概念；极限的概念及其计算；连续的概念及判断.

**难点**：复合函数的分解；极限、连续的概念及求解；应用介值定理推证简单命题.

**注意**：

(1)复合函数的分解应注意分解顺序"由表及内"，分解到基本初等函数的形式或基本初等函数的四则运算形式.

(2)判断函数在某一点连续时，必须满足连续的三个条件，对于分段函数在分界点处的连续性应考虑左右极限.

(3)函数在某点是否有极限与函数在该点是否有定义无关.

(4)判断间断点的类型主要依据该点的左右极限是否存在.

## 二、疑难解析和典型例题分析

### (一)函数的概念及性质

**例 1** 判断下列各题是否正确，并指出原因.

(1)若 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f[f(x)]=x$；

(2)若 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，则 $f[g(x)]$ 为偶函数；

(3)若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为周期函数，则 $f(x)+g(x)$ 也为周期函数；

(4)设 $f(x)=2\ln x$，$g(x)=\ln x^2$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

**解** (1)不正确，事实上 $f[f(x)]=\begin{cases}x, x\neq 0;\\ \text{无定义}, x=0.\end{cases}$

(2)正确，事实上 $f[g(-x)]=f[-g(x)]=f[g(x)]$，即 $f[g(x)]$ 为偶函数.

(3)正确，事实上设 $T_1$、$T_2$ 分别为函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期，$T$ 为 $T_1$ 与 $T_2$ 的最小公倍数，则 $T$ 必为 $f(x)+g(x)$ 的周期.

(4)不正确，因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域不相同.

**例 2** 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

**解** $f[g(x)]=\dfrac{1-g(x)}{1+g(x)}=\dfrac{x-1}{x+1}\quad(x\neq 0, x\neq -1)$；

$g[f(x)]=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1+x}{1-x}\quad(x\neq 1, x\neq -1)$.

**例 3** 求函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}+\arcsin x+\sqrt{x}$； (2) $y=\dfrac{1}{\log_3(3x+1)}+\arccos\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)$.

**解** (1) $x$ 须满足

$$\begin{cases}x^2-1\neq 0\\ |x|\leqslant 1\\ x\geqslant 0\end{cases},\quad \text{即}\begin{cases}x^2\neq 1\\ -1\leqslant x\leqslant 1.\\ x\geqslant 0\end{cases}$$

所以 $0\leqslant x<1$，故函数的定义域为 $[0,1)$.

(2) $x$ 须满足

$$\begin{cases} 3x+1\neq 1 \\ 3x+1>0 \\ \left|2x+\frac{1}{2}\right|\leqslant 1 \end{cases},\quad 即\begin{cases} x\geqslant -\frac{1}{3}\text{ 且 }x\neq 0 \\ -1\leqslant 2x+\frac{1}{2}\leqslant 1 \end{cases},\quad \begin{cases} x\geqslant -\frac{1}{3}\text{ 且 }x\neq 0 \\ -\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant \frac{1}{4} \end{cases},$$

故函数的定义域为 $\left[-\frac{1}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{4}\right]$.

**例 4** 判别函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x\left[\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right]$;

(2) $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)+\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$;

(3) $f(x)=\ln x$.

**解** 利用奇偶性的定义进行判别.

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,

$$\begin{aligned} f(-x)&=(-x)\left[\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right]=(-x)\left[\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2}\right] \\ &=x\left[\frac{2^x}{2^x-1}-\frac{1}{2}\right]=x\left[1+\frac{1}{2^x-1}-\frac{1}{2}\right] \\ &=x\left[\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right]=f(x), \end{aligned}$$

所以,$f(x)$ 是偶函数.

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,

$$\begin{aligned} 因为\ f(x)&=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)+\lg(\sqrt{x^2+1}-x) \\ &=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)=\lg(x^2+1-x^2)=0, \end{aligned}$$

所以 $f(-x)=0$, $-f(x)=0$,

因此有 $f(-x)=-f(x)=0$, $f(-x)=f(x)=0$.

所以,$f(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

(3) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,定义域不是对称区间,所以函数是非奇非偶函数.

**注意**:(1)讨论函数的奇偶性都是在对称区间内说的,如果函数的定义域不是对称区间,则函数不是奇函数也不是偶函数.

(2)判别函数的奇偶性除了用定义外还可以用以下性质:

1)两偶函数之和(差)是偶函数,两奇函数之和(差)是奇函数;

2)两偶函数(或奇函数)的积或商(分母不为零)是偶函数;

3)奇函数与偶函数的积或商(分母不为零)是奇函数.

**例 5** 将下列函数分解成基本初等函数的复合.

(1) $y=e^{\arctan\sqrt{x+1}}$;

(2) $y=\sqrt{\ln\sin^2 x}$ ;

(3) $y=\cos^2\ln(2x+1)$ .

**注意**:复合函数的分解应由外到内,层层分解.

(1)函数由 $y=e^u, u=\arctan v, v=\sqrt{w}, w=x+1$ 复合而成;

(2)函数由 $y=\sqrt{u}, u=\ln v, v=w^2, w=\sin x$ 复合而成;

(3)函数由 $y=u^2, u=\cos v, v=\ln w, w=2x+1$ 复合而成.

**例 6** 生产某种产品 $x$ 件的总成本为 $C(x)=50+x+2x^2$ (万元) $(x>0)$ ,若每件产品的售价为 40 万元,试求:

(1)总利润和平均利润;

(2)求经济活动的保本点.

**分析**:总利润等于总收益与总成本的差;保本点即无盈亏点,即满足总利润函数为零的点.

**解** (1)因为总收入 $R(x)=40x$,

所以总利润 $L(x)=40x-(50+x+2x^2)=39x-50-2x^2$,

平均利润为 $\overline{L(x)}=\dfrac{L(x)}{x}=39-\dfrac{50}{x}-2x$;

(2)令 $L(x)=-2x^2+39x-50=0$ ,得 $x_1\approx 1.379\approx 1$ , $x_2\approx 18.120\approx 18$.

当 $1<x<18$ 时,有 $L(x)>0$ ,此时生产经营赢利;当 $x<1$ 或 $x>18$ 时 $L(x)<0$ ,此时生产经营亏损,而 $x=1$ 和 $x=18$ 是函数的保本点.

### (二)函数的极限

**例 7** 判断下列各题是否正确,并指出原因

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都不存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 也不存在.

(2)如果当 $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 是无界函数,则当 $x\to\infty$ 时, $f(x)$ 必为无穷大.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2x)\cos\left(\dfrac{2x-1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\dfrac{2x-1}{x^2}\right)=0.$

(4)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ , $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$ ,则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\infty-\infty=0.$

(5)当 $n\to\infty$ 时 , $\dfrac{1}{n+1}$ 、 $\dfrac{1}{n+2}$ 、 $\cdots$ 、 $\dfrac{1}{2n}$ 都是无穷小量,所以它们的和 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$ 也是无穷小量,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)=0.$

**解** (1)不正确. 如极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$ 和极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ 都不存在,但 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)+\dfrac{1}{x^2}\right]=1$ 存在.

(2)不正确. 例如当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)=x\sin x$ 是无界函数,但是,当 $x\to\infty$ 时, $f(x)=x\sin x$ 不是无穷大.

(3)不正确. 因为 $x\to 0$ 时, $\frac{2x-1}{x^2}\to\infty$ ,极限 $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)$ 不存在,不能用极限的乘法法则. 上述极限为零,这是因为 $\cos\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)$ 是有界函数,且 $x\to 0$ 时, $x^2+2x$ 是无穷小量,利用有界变量与无穷小量的乘积为无穷小量的性质可得 $\lim\limits_{x\to0}(x^2+2x)\cos\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)=0$.

(4)不正确. 例如 $\lim\limits_{x\to1}\frac{2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$ ,但 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty\neq 0$ .

(5)不正确. 因为 $n\to\infty$ ,即无穷小量的个数 $n$ 无限,所以不满足"有限个无穷小量的和是无穷小量"性质的条件.

**例 8** 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1\times3}{2^2}\times\frac{2\times4}{3^2}\times\frac{3\times5}{4^2}\times\cdots\times\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\tan x}$ .

**解** (1)因为

$$\begin{aligned}&\frac{1\times3}{2^2}\times\frac{2\times4}{3^2}\times\frac{3\times5}{4^2}\times\cdots\times\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\\&=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)\times\cdots\times\left(\frac{n}{n+1}\frac{n+2}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{n+2}{2(n+1)},\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1\times3}{2^2}\times\frac{2\times4}{3^2}\times\frac{3\times5}{4^2}\times\cdots\times\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$ .

**注**:求无限项和或积的极限,不能直接用极限的运算法则,解此类题的基本思想是通过数列求和及化简的方法,化为有限项的极限.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\tan x}\left[x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]$,

当 $x\to 0$ 时, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 的极限不存在,但因为 $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 为有界函数,而 $x$ 为无穷小量,有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小,所以 $\lim\limits_{x\to0}\left[x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]=0$ .

故
$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\tan x}=1\times0=0.$$

**注**:无穷小与有界函数的乘积仍是无穷小,有限个无穷小的乘积仍是无穷小,

有限个无穷小的和仍是无穷小，这些性质在求极限时常常用到.

极限的计算是本章的重点，下面将求极限的方法归纳如下：

(1)利用极限的四则运算法则求极限.

(2)利用函数的连续性求极限.

由于初等函数在定义域内是连续的，由函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续的定义 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 可知，$f(x_0)$ 即为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限.

(3)利用无穷小的性质求极限.

(4)“$\frac{0}{0}$”型不定式极限的求法.

1)“约零因子法”，即约去分子、分母中极限为零的因子，将所论函数转化成非不定式型再求极限；

2)利用等价无穷小的代换计算极限；

3)利用重要极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 计算函数的极限；

4)利用洛必达法则求极限.

以上方法综合起来，能更容易求出极限.

(5)“$\frac{\infty}{\infty}$”型不定式极限的求法.

1)分子、分母同除以适当无穷大，特别地，当分子、分母都是多项式时，有

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} 0, m > n \\ \frac{a_0}{b_0}, m = n(a_0, b_0 \neq 0) \\ \infty, m < n \end{cases}.$$

2)利用洛必达法则求极限.

还有许多极限问题，例如“$\infty - \infty$”、“$0 \cdot \infty$”型未定型极限问题，可以适当变形转化成为“$\frac{0}{0}$”、“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定型的极限问题.

(6)利用公式 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$，求“$1^\infty$”型未定型的极限.

(7)分段函数在分界点处的极限，要分别求出左、右极限来判断极限是否存在.

**例 9** 计算下列极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}$；

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x}$；

(3) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{1}{x-2}\right)$.

**解**：(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}}{2}=\sqrt{2}.$$

**说明**：此题是“$\dfrac{0}{0}$”型极限，可通过分母有理化约去零因子，再求极限；

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{(\sqrt{1+x+x^2}+1)\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+x)}{(\sqrt{1+x+x^2}+1)\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{2\sin 2x}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

**说明**：此题为带有三角函数的“$\dfrac{0}{0}$”型极限，注意选用 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$；

(3)当 $x\to 2$ 时，$\dfrac{x}{x^2-4}$ 和 $\dfrac{1}{x-2}$ 的极限都不存在，故不能直接用极限的运算法则，一般的处理方法是通分.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-(x+2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{x^2-4}=\infty.$$

**例 10** 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}$.

**解** (1)由于当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，$\arcsin x\sim x$，所以当 $x\to 1$ 时，$\ln(1+\sqrt[3]{x-1})\sim\sqrt[3]{x-1}$，$\arcsin 2\sqrt[3]{x-1}\sim 2\sqrt[3]{x-1}$.

于是 $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin 2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x^2-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{2\sqrt[3]{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}};$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(e^{\sin x-x}-1)}{\sin x-x}.$$

由于当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$，所以当 $x\to 0$ 时，$e^{\sin x-x}-1\sim\sin x-x$.

于是 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\sin x-x)}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}e^x=1.$$

**注**：等价无穷小的替换是计算极限时常用的方法，故要正确地使用等价无穷小

的替换.使用无穷小替换时必须注意以下两点：

(1)要准确地记忆一些等价无穷小，如当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，$\arcsin x \sim x$，$\arctan x \sim x$，$e^x - 1 \sim x$，$\ln(1+x) \sim x$ 等.

(2)使用等价无穷小替换，是把分子或分母中的因式用相应的等价无穷小来替换或是把整个分子或整个分母用相应的等价无穷小替换，如果分子或分母是几个无穷小的代数和，则不能用无穷小替换其中的某一项.

**例 11** 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2-x}{3-x})^{x+2}$.

**解** (1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1}[1+(x-1)]^{\frac{1}{x-1}} = e$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}]^{\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = e^1 = e$；

(3)**解法一** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-x-1}{3-x}\right)^{x+2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3-x}\right)^{x+2}$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{x-3} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^5$$

当 $x \to \infty$ 时，$x-3 \to \infty$，

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{x+2} = \lim\limits_{x-3\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^{x-3} \cdot \lim\limits_{x-3\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-3}\right)^5 = e$；

**解法二** 令 $\frac{2-x}{3-x} = 1+\frac{1}{t}$，则得 $t = x-3$，即 $x = t+3$，

当 $x \to \infty$ 时，$t \to \infty$，

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^{x+2} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+5} = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^5$

$$= e \cdot 1 = e.$$

### (三)函数的连续性

**例 12** 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x}, x < 0 \\ 1, x = 0 \\ e^{-x}, x > 0 \end{cases}$，在 $x = 0$ 处的连续性.

**解** 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{\sin x} = 1$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$，函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

**例 13** 求下列函数的间断点,并确定其类型.

(1) $y=\dfrac{\tan x}{x}$; (2) $f(x)=\begin{cases}x-1,x\leqslant 1\\3-x,x>1\end{cases}$.

**解** (1)函数 $y=\tan x$ 在 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 处没有定义,且 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{x}=\infty$,所以 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 是函数 $y=\dfrac{\tan x}{x}$ 的第二类间断点(属无穷间断点).

函数 $y=\dfrac{\tan x}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义,但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$,所以 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{\tan x}{x}$ 的第一类间断点,且为可去间断点.

(2)函数在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内均连续,现在讨论 $x=1$ 处的情况.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x)=2$,$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$,

即 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$,

所以 $x=1$ 是函数的第一类间断点(属跳跃间断点).

**例 14** 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{kx},x>0\\x+1,x\leqslant 0\end{cases}$,在其定义域内连续,求 $k$ 的值.

**解** 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

当 $x>0$ 时,$f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{kx}$;$x<0$ 时,$f(x)=x+1$,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内均为初等函数,故连续.

在 $x=0$ 处,$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{kx}=\dfrac{1}{k}\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{k}\ln e=\dfrac{1}{k}$,$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$,因为函数在 $x=0$ 处连续,所以极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在,

从而可得 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$,即 $\dfrac{1}{k}=1$,得 $k=1$,

此时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1=f(0)$,所以,当 $k=1$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,进而在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

**说明**:讨论分段函数在定义区间内的连续性,不仅要讨论函数在分段点处的连续性,还要讨论函数在分段点以外的区间内的连续性,否则,所讨论的问题就不完整.

**例 15** 证明方程 $e^x\cos x=0$ 在 $[0,\pi]$ 上至少有一个实数根.

**证** 设 $f(x)=e^x\cos x$,则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,由于 $f(0)=e^0\cos 0=1>0$,$f(\pi)=e^\pi\cos\pi=-e^\pi<0$,所以至少存在一点 $x_0\in(0,\pi)$,使得 $f(x_0)=e^{x_0}\cos x_0=0$,

即方程 $e^x\cos x=0$ 在 $[0,\pi]$ 上至少有一个实数根.