

“十一五”国家重点图书出版规划项目

16

□ 数学文化小丛书

李大潜 主编

# 从欧拉的数学直觉谈起

——纪念伟大数学家欧拉诞辰300周年

◎ 周明儒



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS

01-49  
1/2

“十一五”国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

# 从欧拉的数学 直觉谈起

Cong Euler de Shuxue Zhijue Tanqi

——纪念伟大数学家欧拉诞辰 300 周年

周明儒



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 图书在版编目(CIP)数据

数学文化小丛书. 第2辑: 全10册 / 李大潜主编.  
—北京: 高等教育出版社, 2013. 9  
ISBN 978-7-04-033520-0

I. ①数… II. ①李… III. ①数学—普及读物 IV.  
①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第226474号

策划编辑 李蕊      责任编辑 张耀明      封面设计 张楠  
版式设计 张岚      责任校对 胡晓琪      责任印制 朱学忠

---

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社址	北京市西城区德外大街4号	网址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
邮政编码	100120		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
印刷	北京信彩瑞禾印刷厂	网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
开本	787mm×960mm 1/32		<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
总印张	28.125	版次	2013年9月第1版
本册印张	2.25	印次	2013年11月第2次印刷
本册字数	40千字	总定价	80.00元
购书热线	010-58581118		

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究

物料号 12-2437-44

# 数学文化小丛书编委会

- 顾 问：谷超豪（复旦大学）  
项武义（美国加州大学伯克利分校）  
姜伯驹（北京大学）  
齐民友（武汉大学）  
王梓坤（北京师范大学）
- 主 编：李大潜（复旦大学）
- 副主编：王培甫（河北师范大学）  
周明儒（徐州师范大学）  
李文林（中国科学院数学与系统科学研究院）
- 编辑工作室成员：赵秀恒（河北经贸大学）  
王彦英（河北师范大学）  
张惠英（石家庄市教育科学研究所）  
杨桂华（河北经贸大学）  
周春莲（复旦大学）
- 本书责任编辑：周春莲

学习 Euler 的著作乃是认识数学的最好途径.

—— 高斯

没有什么比看到发明的源泉更重要的了. 就我看来, 它比发明本身更有趣.

—— 莱布尼茨

没有大胆的猜想, 就做不出伟大的发现.

—— 牛顿

看来, 直觉是头等重要的.

—— 爱因斯坦

逻辑用于论证, 直觉可用于发明.

—— 庞加莱

# 数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长，并相对独立，以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则，有的专题单独成册，有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书，走近数学、品味数学和理解数学，充分感受数学文化的魅力和作用，进一步打开视野、启迪心智，在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

# 目 录

一、数学史上最多产的伟大数学家	
—— 欧拉.....	2
二、欧拉的数学直觉几例 .....	18
1. 对哥德巴赫猜想和费马猜想的判断.....	18
2. 自然对数的底——常数 $e$ 是 如何发现的 .....	20
3. 寻求正整数平方的倒数之和 .....	25
4. 关于凸多面体的面、顶、棱公式.....	29
三、直觉及其在科学发展中的作用.....	33
四、数学直觉及其培养 .....	42
1. 数学直觉的意义 .....	42
2. 演绎、类比与归纳 .....	44
3. 经验与直觉.....	49
4. 让左右脑协调发展 .....	54
主要参考文献.....	59



在数学史上, 17 世纪被誉为天才的世纪, 杰出的代表是创立微积分的牛顿和莱布尼茨. 18 世纪被称为英雄的世纪, 欧洲几乎所有的数学家都对微积分表现出极大的兴趣, 对传统的批判, 对新方法的追求, 对新领域的开拓, 使他们共同谱写了一曲数学史上的“英雄交响曲”, 而其中最杰出的代表是被称为“分析的化身”、“无与伦比的算法学家”、“应用数学大师”莱昂哈德·欧拉 (Leonhard Euler, 1707 — 1783). 欧拉把自己的双目献给了数学, 把自己的一生献给了数学, 是有史以来最多产的伟大数学家. 2007 年是欧拉诞辰 300 周年, 在纪念这位伟大数学家的时候, 让我们先回顾他那非同寻常的一生.



图 1 欧拉

# 一、数学史上最多产的 伟大数学家——欧拉

1707年4月15日，欧拉出生在瑞士北部的巴塞尔城。拥有几代著名数学家的伯努利家族就居住在这里，欧拉的父亲保罗·欧拉就是大数学家雅各布·伯努利的高才生。欧拉从小特别喜欢数学，不满10岁就开始自学“代数学”，可是不想从事清贫的数学工作的父亲，希望儿子也和自己一样，长大后当一名牧师。13岁时父亲送他进巴塞尔大学学习神学，但他却被约翰·伯努利旁征博引，富有激情的数学讲座迷住了，而欧拉的数学天赋也引起了伯努利的关注。伯努利让欧拉每个星期六下午到他家，单独给他授课。名师的精心指导，使欧拉突飞猛进；而他的勤奋和才华也深深吸引了约翰的儿子丹尼尔·伯努利和尼科拉斯·伯努利，他们从此经常在一起讨论数学问题，并成为终身好友。

欧拉15岁在巴塞尔大学获得学士学位，17岁获硕士学位。但父亲要他放弃数学而专注于神学。欧拉

虽然打心底里不愿做专职神职人员，但又不好公然违抗父亲的意愿，正在左右为难的时候，约翰·伯努利劝他父亲说：“亲爱的神甫，您知道我遇到过不少才华横溢的青年人，但是要和您的儿子比起来，他们都相形见绌。如果我的眼光不错，您的儿子无疑将是瑞士未来最了不起的数学家。”“为了数学，为了孩子，我请求您重新考虑您的决定。”深孚众望的伯努利教授的话使保罗改变了初衷。

当时欧洲各国的科学院，常常把政府或一些部门提出的研究课题设置奖金公开征求解答，其中有不少与航海有关，因为航运的发展和频繁的海战，使各国政府愈来愈关注海洋的控制权。巴黎科学院1727年的征解问题就是关于海船桅杆的问题。19岁的欧拉决定检验一下自己的能力。他的论文显示了他在数学分析方面的巨大能力，但他并未见过真正的海船，结果，他的论文得到了很高评价，但只是得了个提名奖。这次牛刀初试，使他在欧洲数学界崭露头角。

在朋友们的怂恿下，欧拉向巴塞尔大学申请教授职位。虽然约翰·伯努利极力推荐，还是因资历尚浅被校方拒绝。

由于在俄国彼得堡大学任数学教授的丹尼尔·伯努利的推荐，1727年5月17日欧拉来到彼得堡，不巧俄国女皇叶卡捷琳娜一世猝然去世，12岁的沙皇彼得二世又大权旁落，经丹尼尔的不懈努力，几经周折沙皇政府才同意欧拉到科学院工作。当时的俄国到处都有告密者，稍不留心就可能惹上麻烦，流放

和处决的消息也不时传来，欧拉不敢过正常的社交生活，而完全沉浸在数学之中。1730年，小沙皇夭折，彼得大帝的侄女安娜·伊万诺夫娜成为新的女皇，科学院的情况有所改变。但是在安娜的情夫德·比隆的间接统治下，俄国遭受了历史上一段最血腥的恐怖统治。欧拉只能不声不响地专注于他的研究。

1733年，丹尼尔离开令人生畏的俄国回到瑞士，26岁的欧拉成为数学教授和圣彼得堡科学院数学部领导人。他决定在彼得堡定居，和画师格塞尔的女儿凯塞琳娜结婚。婚后夫妻生活恩爱美满，但政治形势日益恶劣，欧拉渴望回瑞士工作，无奈小生命一个接一个的出世，使他离开俄国的希望化为泡影，只有在不停的工作中寻求慰藉。

在彼得堡的14年中，欧拉在分析学、数论和力学等方面作了大量出色的工作，他运用微积分使力学摆脱了传统的几何论证方法的束缚而成为分析的数学，开创了力学的新纪元。他还应俄国政府的要求，解决了不少诸如地图学、造船业中的实际问题；为俄国学校编写初等数学教科书；监督政府的地质部门；帮助改革度量衡；设计检验税率的有效方法。欧拉的卓越工作大大促进了俄国数学的发展。

1735年，28岁的欧拉因劳累过度右眼失明了。当年，巴黎科学院就彗星轨道计算问题设立了巨额奖金，征求解答。因为彗星轨道的计算涉及多个星体间的关系，历来是一大难题，尽管欧拉对通常的方法作了重大改进，计算仍然十分困难。而欧拉一旦开始工作，要他中途停下来是不可能的，3天之后，彗星

的运行轨道计算出来了，但疲惫不堪的欧拉却突然眼前一片漆黑栽倒在地。他在床上躺了一个星期，右眼再也看不见了，但他说：“现在我将更少分心了”。

1740年，普鲁士国王腓特烈大帝登基，自称是“欧洲最伟大的国王”，期望普鲁士在各方面都雄踞欧洲之首。当时的柏林科学院由于缺乏称职的领导人而死气沉沉，彼得堡科学院却在欧拉的领导下人才辈出，成果累累，呈现出勃勃生机与活力。当腓特烈听到欧拉在俄国非常苦闷的消息后，大喜过望，立刻邀请他来柏林科学院主持工作。

欧拉高兴地接受了腓特烈大帝的邀请，1741年成为柏林科学院院士，物理数学所所长。1759年成为柏林科学院领导人。

1744年，欧拉的杰作《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》一书在柏林出版，开创了一个新的数学分支——变分法。大家都见过儿童喜爱玩的滑梯，试问当起点和终点固定时，滑梯做成什么形状才能使人滑行时间最少呢？做成直的，虽然距离最短，但速度却增加得较慢；那么什么形状最好呢？早在欧拉出生11年前，约翰·伯努利就在1696年6月号的《教师学报》上，提出这个所谓“最速降线问题”向其他数学家挑战。虽然牛顿、莱布尼茨、雅各布·伯努利以及约翰·伯努利本人先后公布了这个问题的解答，但都没有进一步深入下去。在约翰·伯努利的建议下，欧拉于1728年开始涉足这一领域。他从研究曲面（主要是地球）上的测地线问题，也就是求曲面上两点之间的最短路径问题着手，很

快找到了答案. 此后, 他进一步把最速降线问题加以推广, 并考虑了摩擦力和空气阻力, 寻找这类问题更简便的解法, 经过 16 年的不懈努力, 终于获得了成功. 虽然他所采用的不是用纯分析的方法, 而是分析和几何相结合的方法, 论证过程十分复杂, 但是最后的结果却同样简洁优美.

牛顿 (Newton, 1642 — 1727) 和莱布尼茨 (Leibniz, 1646 — 1716) 创造了微积分的基本方法, 可是从它的逻辑基础到实际应用还有大量的问题有待解决, 而为了让更多的人掌握这一工具, 需要排除从研究常量的初等数学过渡到研究变量的微积分的重重障碍. 为此, 欧拉在 20 多年间出版了微积分史上三部里程碑式的经典著作: 1748 年的《无穷小分析引论》, 1755 年的《微分学》, 以及 1768 — 1770 年间在彼得堡出版的《积分学》(共 3 卷). 这些著作包含了欧拉本人在分析领域的大量创造, 同时引进了一批标准的数学符号, 对分析表述的规范化起了重要作用, 在柯西的《分析教程》1821 年出版之前一直被当作分析课本的典范而普遍使用. 拉格朗日 (Lagrange, 1736 — 1813)、拉普拉斯 (Laplace, 1749 — 1827)、高斯 (Gauss, 1777 — 1855)、柯西 (Cauchy, 1789 — 1857)、黎曼 (Riemann, 1826 — 1866) 等大数学家都从欧拉的著作中得益, 欧拉被人们誉为“分析的化身”. 约翰·伯努利在给欧拉的一封信中这样赞许自己的学生在分析方面的青出于蓝: “我介绍高等分析时, 它还是个孩子, 而您正在将它带大成人.”

欧拉关于数论的大部分工作也是在柏林完成的.

数学家费马 (Fermat, 1601 — 1665) 提出的大量重要而有趣的命题, 大部分被欧拉证实, “费马素数” 被他否定. 不少命题他还进一步加以引申和推广, 特别是在 1743 年, 他发现了 18 世纪数论中最重要的定理——二次互反律. 后来的数学家们为探求它的含义引申出大量富有价值的成果.

在柏林的 25 年中, 欧拉的研究内容涉及行星运动、刚体运动、热力学、弹道学、人口学等诸多方面, 这些工作和他的数学研究相互推动, 特别是在微分方程、曲面微分几何以及其他数学领域, 他的研究都是开创性的. 由于他的卓越领导, 濒临绝境的柏林科学院获得新生, 成为欧洲最有影响的科学院之一. 他还为普鲁士政府解决了诸如铸币、城市水道、运河、保险金和养老金制度等一系列重大的实际问题.

腓特烈邀请欧拉除了要他为柏林科学院支撑门面外, 还要他给其侄女迪莎公主当私人教师. 欧拉不得不每天挤出两三个小时的宝贵时间为这位骄傲的公主授课. 为了让大家共同受益, 欧拉把他讲授的有关数学、力学、物理学、光学、天文学、声学、哲学及宗教等丰富多彩的内容用信的形式公开发表. 他那优美流畅的文笔使人们吃惊地发现, 欧拉的文学才能被大大地低估了. 著名的《致德国公主的信》先后用七种文字翻译出版, 成为风靡一时的畅销书.

令欧拉始料不及的是, 在柏林的生活甚至比在彼得堡时还要难受. 喜欢别人阿谀奉承的腓特烈看不上老实巴交“直愣愣”的欧拉, 甚至公然奚落欧拉

是“独眼龙”。另外，腓特烈欣赏能言善辩的人，欧拉使他渐渐失望。1764年，他决定邀请法国数学家达朗贝尔 (d' Alembert, 1717 — 1783) 来顶替他。达朗贝尔虽然和欧拉在学术上有过争论，但他耿直地告诉腓特烈：把任何其他置于欧拉之上都是一种不当的行为。达朗贝尔的婉言谢绝使腓特烈更加固执，屈辱的氛围使欧拉难以忍受，他感到孩子们在普鲁士也不会有什么出路。

而俄国从来没有放弃过欧拉，即使在柏林科学院任职期间，彼得堡科学院也照常支付他部分薪金。同样，欧拉虽然身在柏林，仍为彼得堡科学院寄去了上百篇论文，还不时对那里的事务提供咨询意见。1760年俄国人进犯勃兰登堡边境期间，欧拉在夏洛滕堡的一个农场遭到抢劫，俄国将军声称他“不是对科学宣战”，给予了欧拉大大多于实际损失的赔偿。当伊丽莎白女皇听说后，除了对欧拉的损失给予丰厚的赔偿外，还加了一笔可观的款项。

1762年叶卡捷琳娜二世即位，俄国科学家的工作条件有了相当大的改善，她热情邀请欧拉重返彼得堡工作。虽然欧拉知道自己仅剩的左眼经不起彼得堡严寒的侵袭，但柏林的气氛已经使他无法忍受，1766年5月，59岁的欧拉携多病的凯塞琳娜和一大群子女，又一次长途跋涉来到彼得堡，受到了异常隆重的欢迎。叶卡捷琳娜二世用王室成员的规格礼待这位大数学家，专门为欧拉准备了一幢雅致而舒适的住宅，全新的家具，配备了八名仆役，还委派一名御用厨师来管理膳食。



欧拉迫不及待地投入了工作。可是，刺骨的严寒和紧张劳累的工作使他患有白内障的左眼视力迅速恶化。拉格朗日、达朗贝尔等著名学者纷纷写信慰问欧拉，希望他注意休息。可是工作就是他的生命，如果停止计算，活着还有什么意义？他用加倍的努力，来回答命运对他的挑战。在他意识到自己的左眼也难保时，就开始练习闭上眼睛进行书写。为了恢复左眼的视力，1771年欧拉作了一次白内障手术，也许是由于医生的粗心大意，术后出现感染，欧拉完全失明了。开始他仍能自己工作，但几个月后欧拉的字迹变得难以辨认，他的儿子阿尔贝担当起誊写员的角色。在生命的最后10多年里，他以惊人的毅力与黑暗作斗争，凭着超常的记忆力和非凡的心算能力，继续他的研究，通过口述让大儿子和大女儿记下了400多篇数学论文，这些高质量的论文赢得的各类奖金几乎成了他的固定收入。法国物理学家阿拉哥(Arago)曾经赞叹道：“他作计算毫不费力，就像人呼吸或像雄鹰临风展翅翱翔一样。”

双目失明的他，令人难以置信地完成了曾使牛顿头痛的《月球运动理论》。在18世纪要确定船只在海上的位置是一件极其困难的事。确定纬度只要通过对恒星的观察就可以解决，难的是经度的确定需要精确地知道月球相对于一个标准位置(17世纪后半期已经确定为英国的格林威治)的方位，假如方位角相差一分，那么在经度上就会相差半度。可是，计算月球的方位牵涉太阳、地球和月球三者之间的关系，这种“三体问题”是数理天文学中最困难的