



何平论文选集
Heping Lunwen Xuanji

模糊、非优与可信研究

何 平◎著

On the Fuzzy, Non-optimum and Trusted



科学技术文献出版社
SCIENTIFIC AND TECHNICAL DOCUMENTATION PRESS



何平论文选集
Heping Lunwen Xuanji

模糊、非优与可信研究

何 平◎著



科学技术文献出版社
SCIENTIFIC AND TECHNICAL DOCUMENTATION PRESS

· 北 京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

模糊、非优与可信研究/何平著. —北京:科学技术文献出版社,2015. 11
ISBN 978 - 7 - 5189 - 0807 - 3

I. ①模… II. ①何… III. ①系统科学—文集 IV. ①N94 - 53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 260722 号

模糊、非优与可信研究

策划编辑:曹沧晔 责任编辑:曹沧晔 责任校对:赵 瑗 责任出版:张志平

出 版 者 科学技术文献出版社

地 址 北京市复兴路 15 号 邮编 100038

编 务 部 (010)58882938, 58882087(传真)

发 行 部 (010)58882868, 58882874(传真)

邮 购 部 (010)58882873

官方网址 www.stdp.com.cn

发 行 者 科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销

印 刷 者 北京天正元印务有限公司

版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷

开 本 710 × 1000 1/16

字 数 458 千

印 张 25.5

书 号 ISBN 978 - 7 - 5189 - 0807 - 3

定 价 88.00 元



版权所有 违法必究

购买本社图书,凡字迹不清、缺页、倒页、脱页者,本社发行部负责调换

序

当我们回想起当年大连日报“华沙请记住这个中国人”，重温中国青年报“数学王国的探索者”的文章时，一个名字会映入许多人的脑海，他就是曾获辽宁省突出贡献专家、专业技术拔尖人才、大连市优秀专家、首批大连市有突出贡献的专家，享受国务院政府特殊津贴专家，在模糊信息处理、决策理论与应用研究中取得开创性成果，做出突出贡献的辽宁警察学院教授、专业技术一级警监何平。

作为一位学者型教师，30多年来他一直辛勤耕耘在模糊、非优和可信计算的研究领域。其突出特点可以用两个字加以概括，即“专”与“博”。也就是说，他不仅具有坚实与深入的专业研究水平，还具备宽广的知识面和多学科应用能力。从他的研究领域和取得的成果来看，他是一个注重理论与应用相互融合的数学家、管理学家和教育家。

从本论文集的研究内容可以看出，不论在哪一个研究阶段，始终围绕着“模糊、非优与可信”。模糊理论引进我国已有30多年，不难发现，何平在模糊理论与应用方面的研究历程也走过了30年，他是我国较早从事模糊数学研究的学者之一，也是在实际应用中获得成功的模糊理论研究者。

2002年他首次提出了模糊犯罪熵的概念，从感知与数据协同分析研究角度，建立了犯罪研究的定量分析框架，这一研究成果在第24届国际数学家大会上发表，引起了参会者的关注。在此后的研究中，他运用模糊推理技术建立了犯罪案件计算机自动推理框架，提出了侦查推理过程的模糊模式反演原则，初步设计了一种犯罪侦查自动推理系统。并且将侦查过程中的知识、经验和直觉设定为一个侦查多智能体，设计出一种在计算机上进行案件直觉学习的系统，将它定义为基于人工直觉的犯罪模式发现系统，从理论上为人类期待的破案推理机构建了雏形。

针对传统优化理论在实际应用中所存在的缺欠，他提出了与传统优化理论相对的理论与方法，即系统非优分析方法（或称为系统非优学）。该学术思想认为，

任何事物具有优的同时必定有非优的存在,只是以往我们回避了这一问题。从仅仅依靠优化模型进行决策的教训与失败中也证实了这一点。系统非优学将讨论的问题设定在非优范畴内,从定量和定性相结合的角度描述了事物由非优到优的实现过程。该理论与方法已经在企业管理、金融分析、网络安全、灾害预警系统等领域都有了较好的应用,具有较大的学术价值和应用前景。

在科学研究中,何平教授没有忘记著名数学家华罗庚教授一贯倡导的精神,“从事应用数学研究者要将服务于国民经济建设作为一项主要任务”。从20世纪90年代开始他就将模糊数学和系统非优学应用于社会、企业生产与管理的实际需要中。90年代初,在大连化学工业公司采用系统非优学方法,建立了企业液体罐车运输管理优化模型,通过研究获得了较大的经济效益,据财务部门统计,按照所建立的优化管理系统,每年可增加经济效益150余万元。

2001年,为解决传统电加热元件热效率问题,市场上一时兴起采用电热膜加热元件,取代传统电加热方式。但是,电热膜加热元件的人工制作质量是决定该元件能否被市场接受的关键。针对热加工领域的难题,采用可拓模糊逻辑,经过大量的生产工艺试验,设计出一种自动敷膜算法和生产线模糊控制系统,解决了长期以来电热膜热加工技术上的难题,为纳米电热膜元件产业化提供了技术支持。

30年来,何平教授没有离开教学第一线,他一直将教育与教学研究作为不可忽视的研究领域,并且利用自己的专业特点从事高等教育创新研究。在教育系统管理、教学评价以及教学实践等方面发表了大量的研究论文。2013年他提出了可拓教育学的概念,初步建立了高等教育可拓学的研究体系,该研究成果在2013年世界教育大会上做了专题报告。

从事学术研究以来,何平教授发表和出版了大量的学术论文和著作,这些论文和著作涉及了数学、计算机科学、管理科学、信息科学、犯罪学和教育学等研究领域。本文集是从这些研究领域中选择了有代表性的论文,其目的是对何平教授研究工作的介绍,更为重要的是,为从事学术研究的年轻人提供一个学术发展路径指引。

正如何平教授所说的,“学术研究的目的不仅仅是知识发现与传承,更为重要的是要在模糊、非优的认知过程中实现可信的目标”。

汪培庄

目 录

CONTENTS

系统科学与数学研究	1
判别二次系统有界分界线环的例子	2
具有与两坐标轴均相切的椭圆的 Kolmogorov 三次系统 E_3^2 轨线的拓扑分类	6
一些具有常收获率和常投放率的三种群 Volterra 模型的相图分析	18
二次系统的二重极限和以无限大分界线环分支出两个极限环的例子	26
创立了系统非优学	32
模糊非优系统理论与方法	33
“系统非优理论”的现实源泉及应用展望	46
“非优”判别指导系统	52
系统非优分析理论及方法	58
基于属性分类的介优决策方法	70
基于非优信息分析的最大次优决策	78
风险控制系统的非优分析方法	105
序元分析理论与可拓熵	123
基于模糊时态推理的网络非优行为诊断模型	141
犯罪侦查 Fuzzy 推理机的构建	156
犯罪研究中模糊数学的运用及其现实意义	157
Fuzzy 关系模式映射反演与犯罪侦查自动推理	190
基于直觉概念空间的交互学习系统设计	200
基于 CILS 犯罪侦查专家系统的设计	220

基于知识映射直觉反演的人工直觉系统研究	240
基于直觉可信分析的犹豫性度量	269
经济建设领域中的应用与贡献	281
纳米电热膜热处理中的 Fuzzy 数值模拟	282
铁路液体自备罐车数量最佳选择及分析决策	292
具有稀土催化特性的陶瓷电热膜加热元件寿命指标的定量分析	309
纳米电热膜敷膜过程的模糊可拓控制技术	316
教育领域的研究与探索	325
课堂教学质量 Fuzzy 综合评判的方法	326
高等教育可拓学及其在中国的实践研究	333
中国公共安全科技问题的发展战略研究	346
基于大学术的高校人才培养研究	357
高等教育的可信理论与实践研究	370
主要论文和著作目录	386
后 记	397

系统科学与数学研究

由于大学所学专业是数学,同时对非线性系统的数学理论具有浓厚的兴趣,特别是在微分方程解的性质以及动态系统的数学描述方面具有强烈的研究欲望。恰恰是这种早期的研究思维和数学描述能力,为后来研究领域的创新奠定了可信的基础。在这一研究领域经历了10年(1985—1995),发表论文四十余篇,如下介绍了几篇具有代表性的论文。



在大连管理干部学院从事系统科学领域方面的研究
(1985年7月至1992年7月)

判别二次系统有界分界线环的例子

设二次系统

$$\dot{x} = -y + \delta x + k^2 + mxy + ny, \quad \dot{y} = x(1 + ax + by),$$

在 $O(0,0)$ 外围存在一个极限环, 它随 δ 按适当方向单调变化而扩大, 如果它最后变成了有限分界线环, 那么如何判别此分界线环的类型. 对于一般的二次系统, 这是一个极困难的问题. 但是要举出可以判别的二次系统的例子却是做得到的. 下面是几个可以进行这种判别的例子.

例 1 从文[1]可推知系统

$$(I) \begin{cases} \dot{x} = -\frac{3}{1}x - 8y + \frac{13}{180}x^2 + \frac{16}{9}xy + \frac{64}{15}y^2 + \delta_1 x + \delta_2 x\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{360}x + \frac{11}{45}y\right) \\ \dot{y} = x\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{360}x + \frac{11}{45}y\right) \end{cases}$$

有以下结论:

(1) 系统(I) $\delta_2 = 0$ 原点外围的极限环当 δ_1 单调减少时, 必扩大而变成如图 1 所示的含一个鞍点和一个鞍结点的异宿轨线.

(2) 系统(I) $-1 < \delta_2 < 0$ 原点外围的极限环当 δ_1 单调减少时, 必扩大而变成如图 2 所示的含一个鞍点的异宿轨线.

(3) 系统(I) $-1 < \delta_2 < 1$ 原点外围的极限环当 δ_1 单调减少时, 必扩大而变成如图 3 所示的含两个鞍点的异宿轨线.

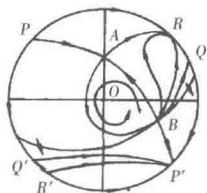


图 1

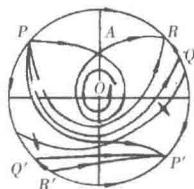


图 2

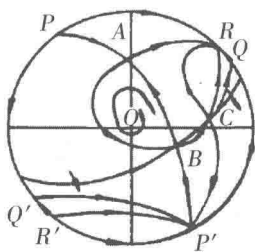


图 3

例 2 从文[2]可推知系统

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y - \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{505}{6\sqrt{3}}x^2 + 27xy + 3\sqrt{3}y^2 + \delta_1 x + \delta_2 (1 - 36x - \frac{7}{\sqrt{3}}y) \\ \dot{y} = x(1 - 36x - \frac{7}{\sqrt{3}}y) \end{array} \right\}$$

有以下结论:

(1) 系统 $(II)_{\delta_2=0}$ 原点外围的极限环当 δ_1 单调减少时, 必扩大而变成如图 4 所示的含一个鞍点和一个鞍结点的 $(II)_{0 < \delta_2 \ll 1}$ 无返回映射分界线环.

(2) 系统 $(II)_{-1 < \delta_2 < 0}$ 原点外围的极限环当 δ_1 单调减少时, 必扩大而变成如图 5 所示的只含一个鞍点的同宿轨线.

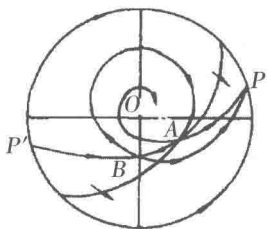


图 4

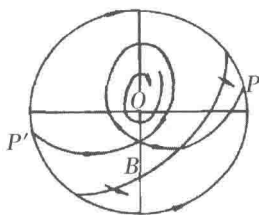


图 5

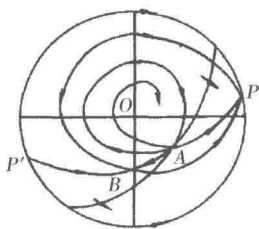


图 6

(3) 系统 $(II)_{-1 < \delta_2 \ll 1}$ 原点外围的极限环当 δ_1 单调减少时, 必扩大而变成如图

6 所示的只含一个鞍点的无返回映射分界线环.

例3 从文[3]可推知系统

$$(III) \begin{cases} x = -y + \frac{3}{5}x - \frac{3}{4}x^2 - xy + \delta_1 x + \delta_2 x(1 + \frac{4}{4}x + \frac{3}{4}y), \\ y = x(1 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y), \end{cases}$$

有以下结论:

(1) 系统(III) $_{\delta_2=0}$ 原点外围的极限环当 δ_1 单调增大时,必扩大而变成如图7所示的含一个鞍点的无返回映射分界线环.

(2) 系统(III) $_{-1 \leq \delta_2 < 0}$ 原点外围的极限环当 δ_1 单调增大时,必扩大而变成如图8所示的只含一个鞍结点的同宿轨线.

(3) 系统(III) $_{0 < \delta_2 \leq 1}$ 原点外围的极限环当 δ_1 单调增大时,必扩大而变成如图9所示的只含一个鞍点的同宿轨线.

以上三个例子的证明是类似的,所以只证明例1.

证明

(1) 由文[1]可知系统

$x' = 2xy + 2(x^2 + x)$, $y' = -(y^2 - 2x - 1) + k_2(x^2 - x - 1) + xy$, 存在弓形分界线环, 当 $k_2 = \frac{1}{2}$ 时, 分界线环上奇点 $(0, 1)$ 是初等鞍点, $(0, -1)$ 是鞍结点. 对此系统作变换 $x' = 10x - 2y + 2$, $y' = \frac{5}{8} + y + \frac{7}{8}$. 仍记 x', y' 为 x, y 得系统(I) $_{\delta_1=0, \delta_2=0}$, 其相图如图1所示, 显然结论(1)成立.

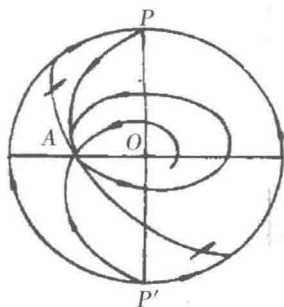


图7

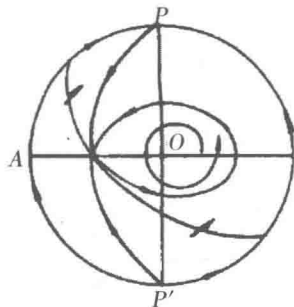


图8

(2) 系统(I) $_{-1 \leq \delta_2 < 0, \delta_1=0}$ 的全局相图如图10所示. 这说明系统(I) $_{-1 \leq \delta_2 < 0}$ 在 δ_1 减少过程中, 尚未减到零以前, 原点外围极限环已变成过一个鞍点的分界线环

了,如图 2 所示. 故结论(2)也成立.

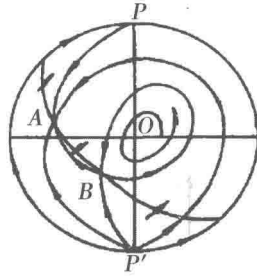


图 9

(3) 系统 $(I)_{0 < \delta_2 \ll 1, \delta_1 = 0}$ 的全局相图如图 11 所示, 原点外围极限环当 δ_1 减少到零时尚未消除, 当 δ_1 从零继续减少时, 鞍结点 B 分裂成一个鞍点 B 和一个结点 C, 当 δ_1 减少到某值时, 鞍点 A 和 B 的分界线必将重和, 相图变成图 3. 故结论(3)成立. 证毕.

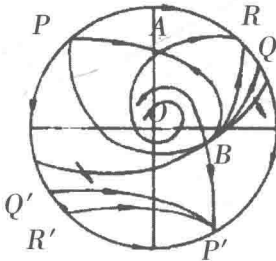


图 10

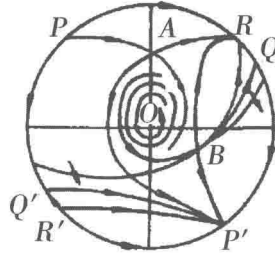


图 11

参考文献

- [1] 沈伯骞. 二次系统存在三次曲线弓形分界线环的充要条件. 纯粹数学与应用数学, 1990, 6(2): 94 - 96.
- [2] 沈伯骞. 二次系统的三次曲线极限线环和分界线环的存在性问题. 数学年刊, 1991, 12(3): 382 - 389.
- [3] 沈伯骞. 二次系统的椭圆分界线环. 应用数学学报, 1992, 15(2): 174 - 183.

具有与两坐标轴均相切的椭圆的 Kolmogorov 三次系统 E_3^2 轨线的拓扑分类

Topological Classification of The Trajectories of
Kolmogorov Cubic System E_3^2 With Elliptic Solution
which Contact Both Axes

Abstract: In this paper we have studied the phase portrait of the kolmogorov cubic system E_3^2 with an elliptic solution which contacts both the axes. We have proved that there are altogether eight types of the topological structure of this system. Besides, if we consider this system as a mathematical model, among these eight types of topological structure of the system, only one type has practical significance.

Article [1] discussed that the kolmogorov cubic system with an elliptic solution can only possibly have periodic region, but can not have any limit cycles. Article [2] discussed that the kolmogorov cubic system with an elliptic solution which contacts both the axes can possibly have limit cycles. Article [2] only made this system with a weak focus by means of an example with a practical system and proved the existence of the limit cycles by using the Hopf bifurcation.

But about the topological structure of the trajectories of this type of system, we know nothing at all. Actually for the kolmogorov cubic system which connects closely with practice, the more important thing is to study the phase portrait of this system. As it is very difficult to study the phase portrait of general kolmogorov cubic system, according to the principle from particularity to generality, we begin to discuss only the phase portrait of the particular kolmogorov cubic as in the following.

$$x = x(a_1 + a_2x + a_3y)$$

$$y = y(b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2), E_3^2.$$

We will prove that there are altogether eight types of the topological structure of these systems. After a scale transformation, the elliptic equation contacting with two axes changes to the simpler form.

$$F(x, y) = x - 2\alpha xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \quad (1)$$

Here $|\alpha| < 1$. When $\alpha = 0$, the ellipse becomes a circle. It is located in the first quadrant.

Theorem 1 The sufficient and necessary condition of the existence of elliptic solution (1) ($\alpha \neq 0$) of the system E_3^2 is that the system can be expressed in the following form.

$$\begin{cases} x = [(\frac{\alpha+1}{\alpha}k_1 - k_6) - (\frac{\alpha+1}{\alpha}k_1 - k_3)x + (\frac{\alpha+1}{\alpha}k_1 - k_6)y] = p(x, y) \\ y = y[(k_2 - \frac{1}{\alpha}k_1 + k_6) - (-2k_2 - \frac{3\alpha+1}{\alpha}k_1 + k_6)x + (-2k_2 - \frac{1-\alpha}{\alpha}k_1 - k_6)y \\ + (k_1 + k_2)x - 2\alpha(k_1 + k_2)xy + (k_1 + k_2)y^2] = Q(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

Proof Form article [2] we know that the sufficient and necessary condition of the existence of elliptic solution (1) of system.

$$\begin{cases} x = x(a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2) \\ y = y(b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2) \end{cases}$$

is that the system can be expressed in the following form.

$$\begin{cases} x = x[k_1(x^2 - 2\alpha xy + y^2 - 2x - 2y + 1) - k_3y(-2\alpha x + 2y - 2) \\ - k(x-1)(-2\alpha x + 2y - 2) + 2k_5y(x - 2y - 2 - \alpha) - k_6(-x + y + 1)] \\ y = y[k_2(x^2 - 2\alpha xy + y^2 - 2x - 2y + 1) + k_3x(2x - 2\alpha y - 2) \\ + k_5(y-1)(2x - 2\alpha y - 2) - 2k_4x(y - \alpha x - 2 - \alpha) - k_6(-x + y - 1)] \end{cases} \quad (3)$$

Such that $a_4 = k_1 + 2\alpha k_4 = 0$, $a_5 = -2\alpha k_1 + 2\alpha k_3 - 2k_4 + 2k_5 = 0$ and $a_6 = k_1 - 2k_3 - 2\alpha k_5 = 0$. Because $\alpha \neq 0$, then $k_4 = -\frac{1}{2\alpha}k_1$, $k_3 = k_1$, $k_5 = -\frac{1}{2\alpha}k_1$.

Substitute to system (3), we obtain system (2) immediately.

We can suppose $k_1 + k_2 \neq 0$. If $k_1 + k_2 = 0$, then system (2) will degenerate into a quadratic system. If $k_1 + k_2 > 0$, by a transformation $t \rightarrow -t$, it can be changed to $k_1 + k_2 < 0$. Hence we can suppose $k_1 + k_2 < 0$ in system (2).

Corollary 1 System (2) has not more than six finite singularities, their coordinates

are

$$O(0,0), A(1,0), B(0,1), E(0, \frac{k_2 - \frac{1}{\alpha}k_1 + k_6}{k_1 + k_2}), C(x_1, y_1), D(x_2, y_2),$$

here

$$y_{1(2)} = \frac{(3-\alpha)(k_1+k_2) \pm \sqrt{(3-\alpha)^2(k_1+k_2)^2 - 4(1-\alpha)(k_1+k_2)(2k_2 + \frac{\alpha-1}{\alpha}k_1+k_6)}}{2(1-\alpha)(k_1+k_2)}$$

The proof is omitted.

Corollary 2 System (2) has two infinite singularities. Their coordinates are $P(1, 0, 0)$. $S(0, 1, 0)$, $S(0, 1, 0)$ must be an unstable node. As for the $P(1, 0, 0)$: if $\frac{\alpha+1}{\alpha}k_1 - k_6 < 0$, then the $P(1, 0, 0)$ is a (right stable) node (left) saddle point; if $\frac{\alpha+1}{\alpha}k_1 - k_6 > 0$, then the $P(1, 0, 0)$ is a (right) saddle (left stable) node.

Proof After a transformation $x = \frac{1}{z}$, $y = \frac{u}{z}$ for system (2), we obtain

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{1}{z^2} \left[\frac{\alpha+1}{\alpha}k_1 - k_6 \right] z^2 - \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}k_1 - k_6 \right) z^3 - \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}k_1 - k_6 \right) z^2 u \\ \dot{u} = \frac{1}{z^2} \left[(k_1 + k_2)u - 2(k_1 + k_2)zu - 2\alpha(k_1 + k_2)u^2 \right. \\ \left. + (k_2 - \frac{\alpha+2}{\alpha}k_1 + 2k_6)z^2u - 2(k_1 + k_2)zu^2 + (k_1 + k_2)u^3 \right] \end{cases} \quad (4)$$

If use the transformation $x = \frac{v}{z}$, $y = \frac{1}{z}$ for system (2), we obtain

$$\begin{cases} \dot{z} = \frac{1}{z^2} \left[-(k_1 + k_2)z - (-2k_2 + \frac{1-\alpha}{\alpha}k_1 - k_6)z^2 + 2\alpha(k_1 + k_2)zv \right. \\ \left. - (k_2 - \frac{1}{\alpha}k_1 + k_2)z^3 - (-2k_2 - \frac{3\alpha+1}{\alpha}k_1 + k_6)z^2u - (k_1 + k_2)zv^2 \right] \\ \dot{v} = \frac{1}{z^2} \left[-(k_1 + k_2)v + 2(k_1 + k_2)zv + 2\alpha(k_1 + k_2)v^2 \right. \\ \left. + (k_2 - \frac{\alpha+2}{\alpha}k_1 + 2k_6)z^2v + 2(k_1 + k_2)zv^2 - (k_1 + k_2)v^3 \right] \end{cases} \quad (5)$$

Because $\alpha^2 - 1 < 0$, system (2) has only two infinite singularities $P(1, 0, 0)$ and $S(0, 1, 0)$. Observing system (4) and (5), we can know at once that the properties of P and S as in Corollary 2 are correct.

In order to study the location and properties of finite singularities, we discuss the four different conditions separately.

(1) Point E is located at Y axis and above the B(1,0), which is $\frac{k_2 - \frac{1}{\alpha}k_1 + k_6}{k_1 + k_2} > 1$,

namely $k_6 - \frac{\alpha+1}{\alpha}k_1 < 0$.

Corollary 3 Suppose $k_1 + k_2 < 0, k_6 - \frac{\alpha+1}{\alpha}k_1 < 0$, Again

1) if $\Delta = (1+\alpha)^2(k_1+k_2)^2 - 4(1-\alpha)(k_1+k_2)(k_6 - \frac{\alpha+1}{\alpha}k_1) > 0$,

namely

$$(1+\alpha)^2(k_1+k_2)^2 - 4(1-\alpha)(k_6 - \frac{\alpha+1}{\alpha}k_1) < 0,$$

then the phase portrait of system (2) is indicated in Fig. 1(1);

2) if $\Delta < 0$, namely

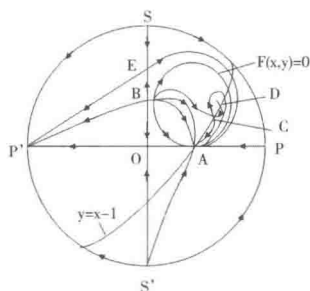
$$(1+\alpha)^2(k_1+k_2)^2 - 4(1-\alpha)(k_6 - \frac{\alpha+1}{\alpha}k_1) = 0,$$

then the phase portrait of system (2) is Fig. 1(2);

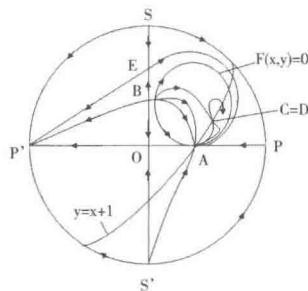
3) if $\Delta < 0$, namely

$$(1+\alpha)^2(k_1+k_2)^2 - 4(1-\alpha)(k_2 - \frac{\alpha+1}{\alpha}k_1) > 0,$$

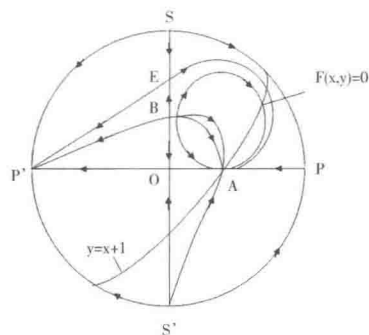
then the phase portrait of system (2) is Fig. 1(3).



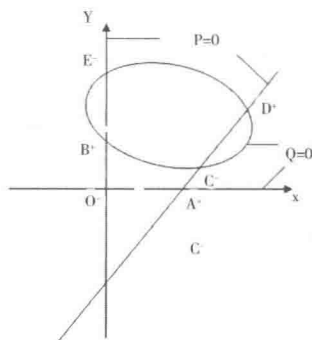
(1)



(2)



(3)



(4)

Fig. 1.

Proof We had known that E is located at Y axis, and above B(1,0). We will consider the location about C(x_1, y_1) and D(x_2, y_2). When $k_6 - \frac{\alpha+1}{\alpha}k_1 < 0$, because $4(1-\alpha)(k_1+k_2)(k_6 - \frac{\alpha+1}{\alpha}k_1) > 0$ $y_2 > y_1 > 0$, namely C and D which locate on $y = x - 1$, they are in the first quadrant. Further we deduce that $0 < y_1 < y_2 < \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$, where $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ is a ordinate of the intersection of the straight line $y = x - 1$ and ellipse (1), so C and D are located inside ellipse(1) and the C is located between A and D.

We discuss the properties of these finite singularities. Fram system(2), we know that the $P(x, y) = 0$ are two straight lines $x = 0$ and $y = x - 1$; while the $Q(x, y) = 0$ is a straight line $y = 0$ and an ellipse. When $\Delta > 0$, the ellipse pass through these four singularities B. C. D. E. as shown in figure1(4). According to article [3], we know that the index of O. E. C. is -1 , and the index of A. B. D. is $+1$. It is easy to know that they are elementary singularities, so the Fig. 1(1) is correct, except that the stability of the point D remains to be distinguished.

As for the point D, we have $(P_x + Q_y)_D = \frac{\alpha+1}{\alpha}k_1 - k_6 > 0$, Therefore D is an unstable focus (node) point. When $\Delta = 0$, the point C and D coincide and become one point. Now, for the system (2) we obtain the matrix.