

普通高等教育“十三五”规划教材
全国高等医药院校规划教材

医药高等数学 学习辅导

第4版

杨松涛 钱微微 主编



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材
全国高等医药院校规划教材

医药高等数学 学习辅导

第4版

杨松涛 钱微微 主编
周永治 主审

科学出版社

北京

· 版权所有 侵权必究 ·

举报电话:010-64030229;010-64034315;13501151303(打假办)

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十三五”规划教材、全国高等医药院校规划教材《医药高等数学》(第5版)的配套教材,也是本书的第4版。全书分10章,包括一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、微分方程与无穷级数等。《医药高等数学》侧重于理论,本书侧重于理论知识的归纳总结、各类各层次习题的分析与解法,它有利于学生对高等数学的概念与理论的理解,有利于培养学生归纳总结、分析解决问题的能力,有利于学生对运算和方法的掌握,也有利于沟通教与学两个教学环节。

本书可供高等医药院校各专业层次的学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

医药高等数学学习辅导 / 杨松涛,钱微微主编. —4版. —北京:科学出版社,2015

普通高等教育“十三五”规划教材·全国高等医药院校规划教材

ISBN 978-7-03-046170-4

I. 医… II. ①杨… ②钱… III. 医用数学-高等数学-医学院校-教学参考资料 IV. ①R311 ②013

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第258204号

责任编辑:刘 亚 曹丽英 / 责任校对:张怡君

责任印制:肖 兴 / 封面设计:大器设计工作室

版权所有,违者必究。未经本社许可,数字图书馆不得使用

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年9月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2016年1月第 四 版 印张:10 1/4

2016年1月第二十一印刷 字数:236 000

定价:24.90元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《医药高等数学学习辅导》(第4版)

编写人员

主 编 杨松涛 钱微微

副主编 傅 爽 王蕴华 钟志强 曹 敏

邵建华 黄 翔 胡灵芝 黄 浩

主 审 周永治

编 委 (按姓氏笔画排序)

马 利 湖北中医药大学

王 力 天津中医药大学

王蕴华 天津中医药大学

付文娇 湖北中医药大学

许华萍 浙江中医药大学

杨松涛 安徽中医药大学

李孝生 贵阳中医学院

沈晓婧 南京中医药大学

张忠文 甘肃中医学院

陈丽君 湖北中医药大学

陈素玲 山东中医药大学

邵建华 上海中医药大学

易 颖 广州中医药大学

赵聪俐 天津中医药大学

赵文峰 河南中医药大学

胡灵芝 陕西中医药大学

钟志强 南京中医药大学

钱微微 浙江中医药大学

黄爱武 湖南中医药大学

黄 浩 福建中医药大学

黄 翔 安徽中医药大学

曹 敏 贵阳中医学院

覃 洁 广西中医药大学

傅 爽 山东中医药大学

第 4 版编写说明

《医药高等数学》、《医药数理统计》、《医药数学实验》是全国 19 所中医院校联合编写的由科学出版社 2001 年 4 月出版的数学系列教材。相继,2004 年 8 月《医药高等数学》、《医药数理统计》第 2 版出版,同时由《医药数学实验》转换的《医药高等数学学习辅导》、《医药数理统计学习辅导》第 1 版出版(辅导教材比配套的理论教材推迟一版);2009 年 5 月出版第 3 版理论教材与第 2 版辅导教材;2012 年 5 月出版第 4 版理论教材与第 3 版辅导教材(2012 年的教材为“十二五”规划教材)。本套教材自 2001 年出版以来,发行面广,发行量大,在中医药院校受到广大师生的欢迎。编写组根据科学出版社对普通高等教育规划教材的具体要求,对前版教材进行全面的分析、总结,认真进行修改、补充,编写成“十三五”规划教材(第 5 版的《医药高等数学》、《医药数理统计》与第 4 版的《医药高等数学学习辅导》、《医药数理统计学习辅导》)。本配套教材将更适应医药院校的医药类、管理类、信息类、人文类等专业的需要,定于 2016 年 1 月由科学出版社正式出版。

《医药高等数学学习辅导》(4 版)是《医药高等数学》(5 版)的配套教材,相应地也有 10 章。每章包括三大部分:一、内容提要与基本要求;二、习题解答(该章习题的解答过程);三、增补习题解答(增补一些有代表性有适当难度的习题)。书的最后编入一些院校有代表性的试卷。本辅导教材有利于学生对高等数学的概念与理论的理解,有利于对运算和方法的掌握,帮助学生在学好高等数学的同时培养自己分析解决问题的能力,也有利于教师的教学工作。

参加本教材编写的有以下院校:贵阳中医学院、广西中医药大学、广州中医药大学、湖南中医药大学、湖北中医药大学、福建中医药大学、浙江中医药大学、上海中医药大学、南京中医药大学、安徽中医药大学、天津中医药大学、山东中医药大学、甘肃中医学院、河南中医药大学、陕西中医药大学。

本教材编写过程中得到许多同行专家的关心与支持,在此一并表示感谢。

本教材尚有不足之处,恳请读者与同行批评指正。

编者
2015 年 11 月

目 录

第 4 版编写说明	
第一章 函数与极限	(1)
第二章 导数与微分	(12)
第三章 导数的应用	(23)
第四章 不定积分	(35)
第五章 定积分及其应用	(51)
第六章 空间解析几何	(63)
第七章 多元函数微分学	(75)
第八章 多元函数积分学	(89)
第九章 微分方程	(106)
第十章 无穷级数	(126)
医药高等数学试题及答案	(144)

一、内容提要与基本要求

本章介绍了函数的概念、性质与表示法;数列的极限、函数的极限;函数的增量;函数的连续性.函数是高等数学中研究的主要对象,极限方法是高等数学的主要方法.极限是从量变认识质变,从近似认识精确,从有限认识无限的一种数学方法.本章必须掌握下面几个方面的内容:

1. 正确理解函数的概念、性质,会求函数的定义域,能将复合函数分解为若干简单函数.
2. 正确理解函数的极限,能用 ϵ - δ 定义刻画函数的极限,理解 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在与 $f(x)$ 在 x_0 是否有定义无关,了解极限的一些性质.
3. 熟练掌握极限运算法则,正确理解并熟练应用两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = e$.
4. 了解无穷小量、无穷大量,掌握函数的极限与无穷小量的关系.
5. 正确理解函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点处连续的概念,会判断函数的连续性与间断点,了解初等函数的连续性,掌握闭区间上连续函数的性质.

二、习题一解答

1. 判断下列各对函数是否相同,并说明理由:

- (1) $y = x + 1$ 与 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$; (2) $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$;
- (3) $y = f(x)$ 与 $x = f(y)$; (4) $y = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ 与 $y = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$;
- (5) $y = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$ 与 $y = x \cdot \sqrt[3]{x - 1}$; (6) $y = a^x$ 与 $y = e^{x \cdot \ln a}$.

解 (1) 不同. $y = x + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

(2) 不同. $y = \ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $y = 2 \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

(3) 相同. 定义域和对应关系都相同.

(4) 不同. 对应关系不同.

(5) 相同. 定义域和对应关系都相同.

(6) 相同. 定义域和对应关系都相同.

2. 设 $f(x) = \frac{x}{x+1}$, 求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $[f(x)]^2$, $f[f(x)]$, $f\{f[\dots f(x)]\}$.

解 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{5}$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x+1}$, $[f(x)]^2 = \frac{x^2}{(x+1)^2}$.

由于

$$f[f(x)] = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{x}{2x+1},$$

又

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1} = \frac{x}{3x+1},$$

假定对 $n=k$ 均有

$$\overbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}^{k \uparrow f} = \frac{x}{kx+1},$$

对于 $n=k+1$,

$$\overbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}^{k+1 \uparrow f} = \frac{\frac{x}{kx+1}}{\frac{x}{kx+1} + 1} = \frac{x}{(k+1)x+1},$$

故对于所有的 n , 均有

$$\overbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}^{n \uparrow f} = \frac{x}{nx+1}.$$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & -\infty < x \leq 0, \\ -2^x, & 0 < x < +\infty, \end{cases}$ 求 $f(-1), f(0), f(1), f[f(-1)], f[f(0)], f[f(1)]$.

解 $f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = -2, f[f(-1)] = 1, f[f(0)] = -2, f[f(1)] = -3$.

4. 求下列函数的反函数及其定义域:

(1) $y = \sqrt{1-x^2} \quad (0 \leq x \leq 1);$

(2) $y = 2\sin 3x \quad x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right];$

(3) $y = \frac{2^x}{2^x+1};$

(4) $y = a \ln(bx-c);$

(5) $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0).$

解 (1) $y = \sqrt{1-x^2} \quad (0 \leq x \leq 1).$

(2) $y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2} \quad (-2 \leq x \leq 2).$

(3) $y = \log_2 \frac{x}{1-x} \quad (0 < x < 1).$

(4) $y = \frac{1}{b}(c + e^{\frac{x}{a}}) \quad (-\infty < x < +\infty).$

(5) $y = \frac{b-dx}{cx-a} \quad \left(x \neq \frac{a}{c}\right).$

5. 求下列各题中所给函数构成的复合函数, 再指出其定义域:

(1) $y = e^u, u = \sin x;$

(2) $y = \sqrt{u-1}, u = \lg x;$

(3) $y = u^2, u = \cos v, v = \frac{x-1}{x^2-5x+6};$

(4) $y = a^u, u = \arctan v, v = \sqrt[3]{w}, w = t^2 - 1;$

(5) $y = \arcsin u, u = 1 + e^x$

解 (1) $y = e^{\sin x} \quad (-\infty < x < +\infty).$

(2) $y = \sqrt{\lg x - 1} \quad (x \geq 10).$

(3) $y = \cos^2 \frac{x-1}{x^2-5x+6} \quad (-\infty < x < 2) \cup (2 < x < 3) \cup (3 < x < +\infty).$

(4) $y = a^{\arctan \sqrt[3]{x^2-1}} \quad (-\infty < x < +\infty).$

(5) 由于无论 x 取什么值, $u = 1 + e^x > 1$, 此时 u 值对 $y = \arcsin u$ 没有意义. 因此, $y = \arcsin u$ 与 $u = 1 + e^x$ 不能复合成复合函数.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0, \end{cases} g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -x^2, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f[g(x)], g[f(x)], f[f(x)], g[g(x)]$.

解 $f[g(x)] = 0, g[f(x)] = g(x), f[f(x)] = f(x), g[g(x)] = 0.$

7. 下列函数中, 哪些是复合函数? 如是, 它们是怎样合成的?

$$(1) y = \arccos(5 + x^3);$$

$$(2) y = x^3 \cdot 3^x;$$

$$(3) y = \cos^3\left(\frac{x^2+1}{2}\right);$$

$$(4) y = \lg\sqrt{\frac{x-1}{x+1}};$$

$$(5) y = \frac{x}{3} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x;$$

$$(6) y = \ln \sin \sqrt{3x^2 + \frac{\pi}{4}}.$$

解 (1) 是. $y = \arccos u$, $u = 5 + x^3$.

$$(3) \text{ 是. } y = u^3, u = \cos v, v = \frac{x^2+1}{2}.$$

$$(4) \text{ 是. } y = \lg u, u = \sqrt{v}, v = \frac{x-1}{x+1}.$$

$$(6) \text{ 是. } y = \ln u, u = \sin v, v = \sqrt{w}, w = 3x^2 + \frac{\pi}{4}.$$

(2)(5) 题的函数不是复合函数.

* 8. 根据极限定义证明(打“*”的是可选题, 以下各章同)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2} \text{ (用“}\epsilon\text{-}N\text{”语言证明);}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2} \text{ (用“}\epsilon\text{-}X\text{”语言证明);}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} (5x+2) = 12 \text{ (用“}\epsilon\text{-}\delta\text{”语言证明).}$$

证 (1) 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 $N = \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$. 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{n} < \epsilon,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

(2) 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在正数 $X = \sqrt[3]{\frac{1}{2\epsilon}}$. 当 $|x| > X$ 时,

$$\left| \frac{1+x^3}{2x^3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2x^3} \right| = \frac{1}{2|x|^3} < \frac{1}{2X^3} = \epsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}.$$

(3) 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在正数 $\delta = \frac{\epsilon}{5}$. 当 $0 < |x-2| < \delta$ 时,

$$|5x+2-12| = 5|x-2| < 5\delta = \epsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5x+2) = 12.$$

9. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 - 5x + 2);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2+1}{x^4-3x^2+1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3}{x-2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-3};$$

$$(6) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h};$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - (x+1)}{\sqrt{x+1} - 1};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x} - 2};$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \text{ (} m, n \text{ 为自然数);}$$

$$(10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+n}};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2+1)^2}{x^2+3};$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3(x-3)^2}{x^5+4};$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-6x+5}{x^3-8x^2+1};$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax} - 1}{e^{ax} + 1} \text{ (} a > 0 \text{);}$$

$$(15) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right);$$

$$(16) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right);$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x).$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 - 5x + 2) = 3 \lim_{x \rightarrow -1} x^3 - 5 \lim_{x \rightarrow -1} x + 2 = 4.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2+1}{x^4-3x^2+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x^2+1)}{\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} (x^4-3x^2+1)} = \frac{3}{-1} = -3.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3}{x-2} = \infty \quad (\text{因为} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-3} = 0).$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = 4.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt{3})(\sqrt[4]{x}+\sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$$(6) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2+3xh+h^2)h}{h} = 3x^2.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-(x+1)}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}(1-\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}-1} = -\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} = -1.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x^2-2^2})(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{4}{3}.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\dots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1} = \frac{m}{n} \quad (m, n \text{ 为自然数}).$$

$$(10) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 2.$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2+1)^2}{x^2+3} = \infty.$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3(x-3)^2}{x^5+4} = 8.$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-6x+5}{x^3-8x^2+1} = 0.$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{e^{ax}}}{1+\frac{1}{e^{ax}}} = 1 \quad (a > 0).$$

$$(15) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

$$(16) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x+1-3}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} = -1.$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

10. 下列函数在给定条件下,哪些是无穷小?哪些是无穷大?

$$(1) \frac{1+2x^2}{x} \quad (x \rightarrow 0);$$

$$(2) \frac{\sin x}{x} \quad (x \rightarrow \infty);$$

$$(3) \lg x \quad (x \rightarrow 0^+);$$

$$(4) 2x+5 \quad (x \rightarrow -\infty);$$

(5) $\frac{x+1}{x^2-4}$ ($x \rightarrow 2$);

(6) $1 - \cos 2t$ ($t \rightarrow 0$).

解 (2), (6) 为无穷小; (1), (3), (4), (5) 为无穷大.

11. x^2 , $\frac{x^2-1}{x^3}$, e^{-x} 何时是无穷大? 何时是无穷小?解 $x \rightarrow \infty$ 时, $x^2 \rightarrow \infty$, $\frac{x^2-1}{x^3} \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $e^{-x} \rightarrow 0$; $x \rightarrow -\infty$ 时, $e^{-x} \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow \pm 1$ 时, $\frac{x^2-1}{x^3} \rightarrow 0$; $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 \rightarrow 0$, $\frac{x^2-1}{x^3} \rightarrow \infty$.12. $x \rightarrow 1$ 时, 下列函数中哪个是 $1-x$ 的高阶无穷小? 哪个是 $1-x$ 的等价无穷小?

(1) $(1-x)^{\frac{3}{2}}$; (2) $\frac{1-x}{1+x}$; (3) $2(1-\sqrt{x})$.

解 (1) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\frac{1}{2}} = 0$, 所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ 较 $1-x$ 为高阶无穷小.(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$, 所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $\frac{1-x}{1+x}$ 与 $1-x$ 是同阶无穷小.(3) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(1-\sqrt{x})}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{1+\sqrt{x}} = 1$, 所以当 $x \rightarrow 1$ 时, $2(1-\sqrt{x})$ 与 $1-x$ 等价, 即 $2(1-\sqrt{x}) \sim (1-x)$.

13. 设有函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+a)^2 - a^2}{x}, & x < 0, \\ x-2, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2}, & x > 1. \end{cases}$$

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;(2) a 为何值时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在;(3) 求 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.解 (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+a)^2 - a^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2ax}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2a) = -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2} = 1.$$

(2) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-2) = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+a)^2 - a^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2a) = 2a,$$

所以

 $a = -1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在.

(3) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+2)} = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) = -1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1.$$

14. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 试确定 a, b 的值.

解
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x - b + 1}{x+1}$$

因为极限存在,所以 $1-a=0$, 即 $a=1$, 从而

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(1+b)x - b + 1}{x+1} = -(1+b).$$

由给定条件知 $-(1+b)=0$, 所以 $b=-1$.

15. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$;

(6) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$;

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{a}{2^n} (a \neq 0)$;

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2 \sin x}{x + \sin x}$;

(9) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt{\sin \frac{1}{x^2}}$;

(10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x$;

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}}$;

(12) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \tan x)^{\cot x}$;

(13) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$;

(14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{x+2}$.

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x}{\frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4x} = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{3}{4}$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{\cos 3x} \cdot 3x}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x} = \frac{3}{5}$.

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$.

(4) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$, 而 $\sin \frac{1}{x}$ 为有界函数, 即 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

(5) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = 1$.

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2$.

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{a}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} \cdot a = a (a \neq 0)$.

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2 \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{3}{2}$.

(9) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sqrt{\sin \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\sqrt{\frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}} = -1$.

(10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k = e^k$.

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \tan x)^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + 2 \tan x)^{\frac{1}{2 \tan x}}]^2 = e^2.$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{[1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1}}\}^{-1} = e^{-1}.$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3 = e^3.$$

* 16. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} \quad (n, m \text{ 为正整数});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}; \quad (4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}; \quad (5) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\sin(\Delta x)};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + f(x) \sin x} - 1}{e^x - 1} = A \quad (A \text{ 为常数}), \text{ 求 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

$$\text{解 } (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{x^m} = \begin{cases} 0, & n > m, \\ 1, & n = m, \\ \infty, & n < m. \end{cases}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin^2 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x \cos x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$(4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

$$(5) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \Delta x)}{\sin(\Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

$$(6) \text{ 因为 } e^x - 1 \sim x (x \rightarrow 0), \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x (x \rightarrow 0), \sin x \sim x (x \rightarrow 0)$$

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + f(x) \sin x} - 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} f(x) \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} f(x) \cdot x}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A.$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2A$.

17. 判断下列函数在 $x=0$ 处的连续性:

$$(1) f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & x > 0; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2+1, & x > 0. \end{cases}$$

解 (1) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

又

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0),$$

所以

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 因此, $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

(3) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+1) = 1,$$

所以

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 因此, $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

18. 确定下列函数的间断点, 并指出它们属于哪类间断点, 如属可去间断点, 则补充函数的定义使其连续:

(1) $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right);$

(2) $y = \frac{x}{\sin x};$

(3) $y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2};$

(4) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}};$

$$(5) y = \begin{cases} x^2-1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 2^x, & x > 0; \end{cases}$$

(6) $y = \cos \frac{1}{x}.$

解 (1) $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (k 为整数) 为无穷间断点, 属第二类间断点.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x}{\sin x} = \infty$ ($k \neq 0$), $k=0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, 所以 $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷间断点, 属第二类间断点; $x=0$ 为可去间断点, 属第一类间断点.

可补充定义 $y = \begin{cases} \frac{x}{\sin x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 则此时 y 在 $x=0$ 点连续.

(3) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2} = \infty,$$

所以 $x=2$ 为无穷间断点, 属第二类间断点; $x=1$ 为可去间断点, 属第一类间断点

可补充定义 $y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}, & x \neq 1, \\ -2, & x = 1, \end{cases}$ 则 y 在 $x=1$ 点连续.

(4) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, 所以 $x=0$ 为可去间断点, 属第一类间断点.

可补充定义 $y = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ e, & x = 0, \end{cases}$ 则 y 在 $x=0$ 点连续.

(5) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2-1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1$, 所以 $x=0$ 为函数的跳跃间断点, 属第一类间断点.

断点.

(6) 因为当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数值在 -1 与 1 之间变动无限多次, 所以 $x=0$ 为函数的振荡间断点, 属第二类间断点.

19. 确定常数 A 的值, 使下列函数在指定点处连续:

(1) $f(x) = \begin{cases} Ax^3, & x \geq 1, \\ 2x-1, & x < 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处;

(2) $f(x) = \begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处;

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin Ax}{x}, & x \neq 0, \\ 5, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处.

解 (1) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} Ax^3 = A, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-1) = 1,$$

要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 则应满足

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1), \text{ 即}$$

$$A=1=A \cdot 1,$$

所以, $A=1$.

因此, 当 $A=1$ 时, $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

(2) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{-1},$$

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则应满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0), \text{ 即 } e^{-1} = A.$$

因此当 $A=e^{-1}$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(3) 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin Ax}{x} = A,$$

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则应满足

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0), \text{ 即 } A=5.$$

因此当 $A=5$ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

20. 根据初等函数的连续性, 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \sin x;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) \tan \frac{\pi x}{4};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x};$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \{n[\ln(n+1) - \ln n]\}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln \sin x = \ln \sin \frac{\pi}{2} = 0.$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) \tan \frac{\pi x}{4} = (1^2 + 1) \tan \frac{\pi \cdot 1}{4} = 2.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+ax)^{\frac{1}{x}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e^a = a.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) = \ln 1 = 0.$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \{n[\ln(n+1) - \ln n]\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \ln \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = \ln e = 1.$$

21. 证明方程 $x^{2^x} = 1$ 至少有一个小于 1 的正根.

证 令 $f(x) = x^{2^x} - 1$, 则 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$. 又因为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 所以由根的存在定理得至少存在一点 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 0$, 即方程 $x^{2^x} = 1$ 至少有一根介于 0 和 1 之间.

22. 求证在区间 $(0, 2)$ 内至少有一点 x_0 , 使得 $e^{x_0} - 2 = x_0$ 成立.

证 令 $f(x) = e^x - 2 - x$, 则 $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = e^2 - 4 > 0$. 又因为 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 所以由根的存在定理得至少存在一点 $x_0 \in (0, 2)$, 使得 $f(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} - 2 - x_0 = 0$. 故在区间 $(0, 2)$ 内至少有一点 x_0 , 使得 $e^{x_0} - 2 = x_0$ 成立.

三、增补习题解答

$$1. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 1-2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 10x-12, & x > 2, \end{cases} \text{ 求 } f(x) \text{ 的反函数 } g(x) \text{ 的表达式.}$$

解 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, 函数 $y = 1 - 2x^2$ 的值域为 $(-\infty, -1)$, 其反函数为 $y = -\sqrt{\frac{1-x}{2}}$;

当 $x \in [-1, 2]$ 时, 函数 $y = x^3$ 的值域为 $[-1, 8]$, 其反函数为 $y = \sqrt[3]{x}$;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, 函数 $y = 10x - 12$ 的值域为 $(8, +\infty)$, 其反函数为 $y = \frac{1}{10}(x + 12)$,

所以

$$g(x) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1-x}{2}}, & x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, & -1 \leq x \leq 8, \\ \frac{1}{10}(x+12), & x > 8. \end{cases}$$

2. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x})$.

解 由于

$$\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x} = -2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \cdot \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2},$$

又因为

$$\left| -2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \right| \leq 2,$$

故 $2 \sin \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$ 为有界函数, 而

$$0 \leq \left| \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right| < \left| \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right| = \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty),$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} = 0,$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}) = 0.$$

3. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}$.

解 由于 $\left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2} = \left(1 + \frac{3}{x^2-2} \right)^{x^2}$, 令 $\frac{x^2-2}{3} = u$, 则 $x^2 = 3u+2$, 于是

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2} = \left(1 + \frac{1}{u} \right)^{3u+2},$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u} \right)^{3u} \cdot \left(1 + \frac{1}{u} \right)^2 \right] = e^3.$$

4. 适当选取 a , 使函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a+x, & x \geq 0 \end{cases}$ 是连续函数.

解 显然, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = e^x$ 是连续的; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = a+x$ 也是连续的. 只需考察分界点 $x = 0$ 处连续性. 因为在 $x = 0$ 左、右两侧, 函数表达式不同, 要分别考察 $x = 0$ 处左、右极限.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a+x) = a.$$

因此, 取 $a = 1$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 1.$$

$f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 于是 $f(x)$ 处处连续.

5. 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$.

解 将所讨论的序列适当放大和缩小.

因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

又因为

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

从本题可看出,无穷多个无穷小量相加,其和为 1.可见,无限项的和与有限项的和有本质的差别.

6. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,且 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 对任意的 $x, y \in (-\infty, +\infty)$ 都成立,试证 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数.

解 由已知有对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$,有 $f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0)$,所以有 $f(0)=0$.又因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续,所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = f(0) = 0$.

所以对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 均有

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x+\Delta x) - f(x)] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x) + f(\Delta x) - f(x)] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\Delta x) = 0. \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在点 x 连续.

又由 x 的任意性知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是连续的.