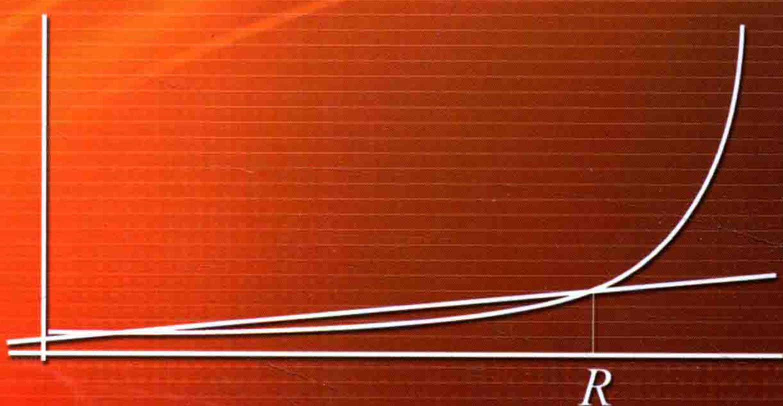
现代精算风险理论

——基于R（第二版）

Modern Actuarial Risk Theory

Using R Second Edition

〔荷〕R.卡尔斯
M.胡法兹
〔比〕J.达呐 著
M.狄尼特
魏丽 周明 译



科学出版社

现代精算风险理论
——基于 R
（第二版）

〔荷〕 R. 卡尔斯
M. 胡法兹
〔比〕 J. 达呐
M. 狄尼特 著
魏 丽 周 明 译

科 学 出 版 社
北 京

图字：01-2015-4360 号

内 容 简 介

本书对非寿险数学做了全面详尽的概述，内容包括效用理论和保险、个体风险模型、聚合风险模型、破产理论、保费原则和风险度量、奖惩系统、风险排序、信度理论、广义线性模型、IBNR 技术和关于广义线性模型的进一步讨论. 书中收录了丰富的例题，章末附有习题，并强调通过 R 软件来实现这些方法. 书中的内容和方法也适用于非寿险的研究，精算领域其他分支学科的研究，以及在精算实务中的应用研究.

本书可作为精算学、概率统计及有很强保险背景的定量金融、经济学专业本科高年级学生和研究生的教材，也可供有关科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

现代精算风险理论：基于 R/（荷）卡尔斯(Kaas, R.)等著；魏丽，周明译. —2 版. —北京：科学出版社，2016.3

书名原文：Modern Actuarial Risk Theory: Using R

ISBN 978-7-03-047115-4

Ⅰ. ①现… Ⅱ. ①卡… ②魏… ③周… Ⅲ. ①保险–计算方法 Ⅳ. ①F840.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 012098 号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：张凤琴
责任印制：霍 兵 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 3 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2016 年 3 月第 二 版 印张：23 1/2
2016 年 3 月第四次印刷 字数：473 000

定价：69.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第一版英文版序

温故而知新.

——孔子, 公元前 551– 公元前 479

风险理论已被公认是精算学教育的重要部分, 这一点我们从北美精算师协会 (SoA) 列出的教学大纲以及精算咨询委员会的推荐意见中可见一斑. 因此, 该领域迫切需要一本涉猎广泛、内容丰厚的教科书.

欣闻这本关于风险理论的新书问世, 非常高兴, 该书在多个方面具有开创性意义. 用溜冰或者健身的行话来说, 该书由两部分构成: 第一部分相当于基础动作要领, 是必须掌握的部分, 而第二部分是可选动作部分, 读者可以根据自身情况自由选择. 第一部分包括第 1~4 章, 它们与 SoA 指定学习的官方材料相当, 从而便于准备精算师考试的学生使用该书. 该书的其余章节写作较为自由, 如第 7 章风险排序, 是作者潜心研究的领域. 另外, 值得一提的是第 9 章和第 11 章, 据我所知, 这是风险理论领域第一本介绍广义线性模型的教材.

纵观全书, 通篇体现着作者为使该书便于教学使用所作的努力, 清晰的语言和大量的习题便是佐证. 为此, 我强烈推荐该书作为教科书使用.

我为新作的问世向作者表示热烈的祝贺, 同时也代表广大师生向他们表示衷心的感谢, 感谢他们为把该书翻译成英文而付出的辛勤劳动. 我确信, 该书作为教材一定能受到师生的青睐并得到广泛使用.

Hans U. Gerber

2001 年于洛桑

第二版前言

> 我刚上任时, 只有高能物理学家听说过所谓的万维网, 而现在, 连我的猫都有自己的主页.
>
> ——比尔 · 克林顿 (Bill Clinton), 1996

本书对非寿险数学进行了全面而详尽的概述, 它最初是为阿姆斯特丹 (Amsterdam) 大学和鲁汶 (Leuven) 大学的精算学教学而写, 但现在已经被其他多所大学以及荷兰精算学会组织的非学历精算教育项目所使用. 本书为精算学的进一步深入理论研究提供了一个衔接, 书中提到的方法不仅可以用于非寿险研究, 而且对精算科学的其他分支同样有效, 当然, 也包括对精算实务的应用研究.

除了标准的理论, 本书还包含与精算实务息息相关的研究方法, 例如, 机动车辆保险单的评级、保费原则和风险度量以及 IBNR 模型等. 同时, 广义线性模型作为重要的精算统计工具也被囊括其中, 这些模型提供了超越普通线性模型和回归模型的额外性能, 从而成为计量经济学家更喜欢使用的统计工具. 此外, 我们还对信度理论给出了简短的介绍. 书中另一个能够激起风险理论专家浓厚兴趣的专题是关于风险排序的研究. 本书反映了精算风险理论研究领域的现状, 书中展示的许多成果来自于该领域最近发表的文献.

在本书第二版中, 我们旨在借用 R 软件使理论更直接地用于实践, 它提供了语言 S 的实施方案, 而不是 S-PLUS, 它不只是一套统计程序, 而是一个完整的面向对象的编程语言. 其他软件可能会提供类似的功能, 但 R 的巨大优势在于它是开放的资源, 因此每个人都可以免费使用, 这就是为什么我们感觉嵌入 R 对于本书的使用者是正当的理由. 在互联网上, 有很多关于如何使用 R 的文档. 在附录中, 我们也给了一些使用 R 的例子, 在整体介绍后, 为解释它是如何工作的, 我们研究了一个风险管理的问题, 即基于一个简单的模型和近三年的股票价格, 尝试预测股票价格的未来走势; 再接下来, 我们展示了像在精算实践中很可能遇到的如何使用 R 生成伪随机数据集等问题.

模型和研究范式

在大部分寿险模型中, 时间是不可或缺的因素, 通常, 从期初的保费缴纳到后来相应的养老金领取之间的时间跨度有几十年. 而在非寿险当中, 时间因素就显得不那么突出了, 但是使用的统计模型更加复杂. 第 1~5 章的内容是非寿险精算学

的基础部分, 第 6~11 章简明扼要地介绍了传统上被认为属于非寿险精算学的其他话题.

1. 期望效用模型

期望效用模型可以很好地解释保险人的存在, 在期望效用模型中, 被保险人是风险厌恶的理性决策者, 根据詹森 (Jensen) 不等式, 为了财务安全他们愿意支付高于自身赔付额期望值的保费. 这是一个在不确定性情况下采取的决策机制, 人们不是通过直接比较赔付额期望值的大小来进行决策, 而是按照赔付额的期望效用值进行决策.

2. 个体风险模型

不管是个体风险模型还是随后的聚合风险模型, 关于保险合同风险组合的总赔付额通常用一个随机变量来表示. 例如, 我们想计算"一定的资本足以支付这些赔付款"这样一个事件的概率, 或者计算该风险组合在 99.5% 置信水平下的在险价值 (VaR), 即总赔付额累积分布函数 99.5% 的分位点. 总赔付额建模为各保单赔付额之和, 各保单赔付额用独立的随机变量表示, 但通常它们既不能建模为纯离散型随机变量, 也不能建模为纯连续型随机变量. 为此, 我们将使用一个涉及黎曼–斯蒂尔切斯 (Riemann-Stieltjes)积分和微分的记号涵盖上述两种情况.

尽管个体风险模型是最符合现实可能性的, 但由于我们可获得的是被取整后的数据且有时不具有密度函数, 该模型并非总能够很方便地使用. 该模型最直接可用的方法是卷积, 但卷积通常是很难处理的, 反而使用一些像矩母函数 (moment generating function)这样的变换常常会有利于问题的解决. 快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT)技术给出了一个利用特征函数 (characteristic function)快速计算其分布的便捷方法, 它可以很容易地在 R 中实现.

我们还介绍了通过拟合分布函数各阶矩进行逼近的近似方法. 由于中心极限定理 (Central Limit Theorem, CLT)只用到前两阶矩, 这对于逼近那些重要的具有较厚右尾的分布是不够精确的. 因此, 我们也介绍了用三阶矩逼近的方法: 平移伽玛近似 (translated gamma approximation)和正态幂阶近似 (Normal Power, NP).

3. 聚合风险模型

聚合风险模型常常被用于近似个体风险模型. 在聚合风险模型中, 保险组合被看成是随时间不断产生赔付的一个过程, 赔付额用一列独立同分布的随机变量表示, 并且它们与相应时间段内的赔付次数随机变量独立, 这样总赔付额就是一个由这些独立同分布的赔付额随机变量相加构成的随机和. 通常, 假设赔付次数是一个具有特定均值的泊松 (Poisson) 变量, 即具有泊松分布的随机变量, 或者是负二项变量, 即赔付次数服从负二项分布的随机变量. 至于单个赔付额的累积分布函数, 常用各保单赔付额的累积分布函数的平均值来代替. 这些假设使得模型具有良好的性质, 易于处理和计算. 我们在书中给出了一些计算总赔付额累积分布函数的技巧,

包括 Panjer 递推公式等.

有时候将赔付严重程度的分布用参数损失分布代替会很方便, 例如, 可以使用伽玛分布或者对数正态分布. 本书提供了许多这样的分布, 并展示了如何通过数据来估计这些分布的参数. 此外, 我们还演示了如何从这些分布产生伪随机样本, 尽管这不是 R 提供的标准工具.

4. *破产模型*

破产模型描述了保险人经营的稳健性. 初始资本为 u 的保险人, 假设收取的年保费固定不变, 那么其资本将随着时间线性增长, 但是当有一次赔付发生, 其资本就会跳跃式减少. 如果在某个时刻, 其资本变成负值, 我们就说该保险人破产了. 在年保费和赔付过程保持不变的情况下, 破产事件是否发生成为衡量保险人资产和负债是否匹配的一个很好的指标. 如果其资产不足以支撑负债, 那么保险人就要采取一些措施进行调整, 比如增加再保险比例、提高保费或者增加初始资本等.

只有当赔付额分布是指数分布的混合或线性组合时, 才有计算破产概率的解析方法. 当赔付额服从离散型分布且没有太多支撑点时, 可以编制一些程序来计算, 而且, 我们还可以给出破产概率上、下界的精确估计. 更多时候, 我们关心的是破产概率的 Lundberg 指数上界 e^{-Ru} 而不是破产概率本身, 其中, R 称为调节系数, 由赔付额分布和保费的安全附加确定.

关于破产概率的计算总是假设风险组合永远不变, 并且, 仅仅考虑保险风险, 不考虑金融风险. 因此, 我们不必要求很高的精度, 小数点后一位就够了. 尽管有人说生存概率是风险理论的研究目标, 但是对于学术界经典的破产理论, 许多精算实务工作者却觉得这对他们来说没有意义. 尽管如此, 我们仍然建议至少要学习第 4 章的 §4.1~§4.3, 这包括对泊松过程的描述和一些关键的结论. 我们还给出了 Lundberg 指数上界的证明以及当赔付额服从指数分布时, 破产概率的推导.

5. *保费原则和风险度量*

假设风险变量的累积分布函数已知, 或者至少它的一些数字特征, 如期望和方差等已知, 保费原则会为该风险变量赋予一个实数值, 作为对于承担了该风险的一方的经济补偿. 注意, 我们这里仅仅考虑单纯的风险保费, 而不考虑保险人经营过程中产生的附加保费. 根据大数法则, 为了避免破产, 总保费应该至少等于总赔付额的期望值. 此外, 保险人出于风险承受能力的考虑, 往往会在保费上附加一个正的安全负荷, 由这些安全负荷形成储备金, 以备不时之需, 避免破产. 本书将讲述各种保费计算原则以及刻画保费原则的一些最重要的性质, 保费原则的选择在很大程度上依赖于这些性质的重要性, 没有一个保费原则是一致最优的.

风险度量也是对某些风险状况赋予一个实数值, 例如, 保费、无限时间破产概率、一年期破产概率、以一定的预设概率能够支付所有赔付而需要的资本、赔付额高于可用资本的数额的期望值等.

6. 奖惩系统

对于某些类型的保险, 特别是机动车辆保险, 仅仅依靠先验因素确定保费的多少是不够的. 虽然像种族和性别等风险因素用来作为保费厘定的依据是不合适的, 但是它们的作用应该被考虑进去. 此外, 还应该考虑到一些观察不到的因素的影响, 如健康状况、反应能力和事故倾向性等. 为此, 许多国家使用了经验评估系统. 在这个系统中, 一方面, 保险人凭借那些先验因素如保障类型、汽车购置价和载重量等来厘定保费, 另一方面, 保险人使用某种奖惩系统对保费进行调整, 如果保单持有人一年没有申请赔付, 那么就可以得到更多保费折扣; 如果一年有一次或者多次申请赔付, 就要缴纳更高的保费续保. 这样一来, 保费的收取便可以更准确地反映司机的驾驶能力, 这种情形可以看成马尔可夫链 (Markov chain).

奖惩系统的质量取决于在多大程度上保费与风险成比例. Loimaranta 效率等于保费的期望值对于赔付额期望值的弹性, 找到它涉及计算马尔可夫转移概率矩阵的特征向量. R 提供的工具就可以做到这一点.

7. 风险排序

作为精算师这个职业的精髓就是能够在未来的随机收益或者随机损失中表达出自己的风险偏好, 因此, 随机排序就成为他所接受教育和他所掌握技能中至关重要的部分. 有时, 对于两个损失变量 X 和 Y, 其中变量 Y 在一定意义上“大于”变量 X, 这时明智的决策者会偏好损失变量 X. 当然也有可能是仅由风险厌恶决策者构成的小群体在风险偏好上达成一致. 在这种情况下, 有可能风险变量 Y 真的大于风险变量 X, 也有可能仅仅是 Y 比 X“更扩散”一些, 但这导致 Y 不受欢迎. 当我们把“更扩散”理解为其累积分布函数具有更厚的尾时, 便得到了一种风险排序的方法, 它具有很多诱人的性质. 例如, 在零效用保费、破产概率和停止–损失 (止损) 保费意义下, 我们偏好的那个变量的复合分布仍然优于另一个变量的复合分布. 可以证明, 第 3 章的聚合风险模型较之于它要去逼近的个体风险模型更扩散一些, 因此, 很多时候, 在考虑要收取的保费、要提取的准备金以及 VaR 等问题时, 使用聚合风险模型会导致更保守的决策. 我们还可以证明, 当其他条件相同时, 风险厌恶型决策者偏好第 1 章给出的自留风险最小的止损再保险策略.

有时候, 我们需要在不完全信息下计算止损保费. 假设风险变量的均值、方差和一个相关的上界已知, 我们给出了计算最大可能的止损保费的方法.

在个体、聚合和破产模型中, 我们假设赔付额是相互独立的非负随机变量, 但有时候, 这个假设并不能满足. 例如, 一对夫妇的死亡风险之间、相邻房屋的地震风险之间是明显的相依风险. 又比如, 考虑那些产生于同一张寿险保单的连续赔付, 如果由于死亡而导致赔付停止或者开始, 亦或有随机利率的作用, 那么这些赔付变量之间也存在明显的相依关系. 我们将给出一个简短的介绍, 以阐明随机排序在这些情形中的应用. 可以证明, 如果有一组随机变量, 它们的联合分布未知, 但每一个

边缘分布已知, 并且这些变量尽可能地相依而不可能出现一个被另一个“对冲”的情况, 那么这组随机变量和的止损保费是最大的.

金融中, 我们经常需要确定不独立的对数正态随机变量和的分布, 利用风险排序理论和同单调理论可以给出这个分布的一些界.

我们还简单介绍了多变量风险排序理论. 有人可能会说, 如果两个随机变量的相关性较大, 那么由这两个随机变量组成的“变量对”就比另外一个和它们有同样边缘分布的“随机变量对”更相关, 但是另一个更加稳健的判别准则是: 联合分布函数一致地更大时, “随机变量对”更相关. 可以证明, 在这样的情形下, 这些随机变量的和在止损序下更大一些. 关于联合分布函数的界可以追溯到 20 世纪 50 年代的 Fréchet 和 40 年代的 Höffding. “随机变量对” (X, Y) 的 copula 是 $F_X(X)$ 和 $F_Y(Y)$ 的联合分布函数. 对于任意给定的边缘分布和相关系数, 利用最小和最大 copula 可以构造出相应的“随机变量对”.

8. 信度理论

同一保单下的赔付情况会由于两种不同的原因而有所差别. 一种原因是风险的客观属性, 通常用一个风险参数来表示, 如果一份保单在很长时间内没有变化, 该风险参数就代表了平均年赔付额; 另一种原因是纯随机的保单持有人的运气因素, 它导致了赔付额对风险参数的逐年偏离. 信度理论认为风险的客观属性可以通过满足一定结构的分布函数来刻画, 并且在给定风险属性的条件下, 实际赔付情况是来自于以该风险属性为均值的母体分布的一个样本. 在最小二乘意义下, 对下一年赔付情况的最佳线性预测是单一合同赔付情况与整个保险组合赔付情况的某种形式的加权平均, 这里的加权因子可以视为附着在单一理赔情况下的一个信度因子, 由此计算出的保费称为信度保费. 作为一个特例, 基于泊松–伽玛混合模型, 我们研究了机动车辆保险的一个奖惩系统.

信度理论实际上是一种贝叶斯推断方法. 事实上, 信度和下述广义线性模型都是所谓的广义线性混合模型 (GLMM) 的特例. 利用 R 中的函数 glmm 就可以处理这些模型中的参数.

9. 广义线性模型

精算统计学领域的很多问题可以归结为广义线性模型 (GLM). 除了假设误差项服从正态分布, 我们还可以假设其他类型的分布, 如泊松分布、伽玛分布、二项分布等. 此外, 观察变量 (因变量) 的期望值不一定必须是回归变量 (自变量) 的线性函数, 也可以是一些协变量的线性变换的函数. 例如, 由对数函数产生的乘积模型, 在保险的许多情形中都是适用的.

用这种方法我们可以处理 IBNR 赔付下准备金的估计问题, 详见随后的内容. 此外, 我们也可以很容易地估算来自第 i 地区、属于第 j 级费率且驾驶汽车载重量为 w 的驾驶员的保费.

在信度模型中, 组别间存在随机效应, 但是在 GLM 中, 这个效应是固定的 (尽管未知). 利用 R 中的函数 glmm 就可以处理多种形式的模型, 包括那些既有随机效应又有固定效应的模型.

10. IBNR技术

我们将导致赔付的事故已经发生但还没有进行赔付的潜在赔付称为 IBNR 赔付, 对从事精算实务的精算师来说, 一个重要的统计问题就是预测 IBNR 赔付总额. 估计这个赔付总额的大部分方法是基于所谓的流量三角形, 将赔付总额按照起始年和发展年分组. 可以证明, 许多传统的精算准备金估计方法可以归结为 GLM 在特殊情形下的极大似然估计.

我们描述了常用的链梯法预测未来损失的工作原理, 以及简言之的 Bornhuetter-Ferguson方法, 后者旨在把关于风险组合的精算知识结合起来使用. 我们还展示了这些模型如何利用 glm 函数在 R 中实现. 在同样的框架下, 链梯法的很多扩展和变形也可以很容易地被引入. England 和 Verrall 提出了用链梯法描述预测误差的方法, 这既是方差的一种解析估计, 也是获得预测分布估计的一种 bootstrapping方法. 我们同样讲述了这些方法在 R 中如何实现.

11. 关于GLM的更多内容

本书第二版几乎所有的章节都扩充了材料, 主要是关于 R 的使用, 但我们也增加了更多关于 GLM 的材料. 我们简单概括了普通线性模型的高斯–马尔可夫(Gauss-Markov)理论, 这在很多经济统计的教材中可以看到. 我们还解释了由 Nelder 和 Wedderburn 提出的算法是如何工作的, 以及该算法如何在 R 中实现. 我们还研究了 GLM 的随机分量, 说明观测变量是独立的随机变量, 且其分布函数属于指数族的某个子类. 我们熟知的正态、泊松和伽玛分布族分别具有和 μ^p, $p = 0, 1, 2$ 成比例的方差, 其中 μ 是均值 (异方差性). 所谓的 Tweedie 类包含的是方差与 μ^p, $p \in (1, 2)$ 成比例的随机变量, 如复合泊松–伽玛风险变量. 从精算的目的看, 这些均值–方差的关系是非常有趣的. 由 Dunn 和 Smyth 发展的 R 中的扩展包提供了计算累积分布函数、累积分布函数的逆函数、概率密度函数和生成这些分布的随机样本的工具, 并给出了具有 Tweedie 分布风险变量的 GLM 的估计方法.

教学方面

由于本书已经在阿姆斯特丹大学 (University of Amsterdam) 和其他地方使用了很长时间, 我们有机会储备了一系列的考试试卷, 从而形成现在书中章后丰富的习题. 同时, 书中还给出了很多例题, 使得本书很适合作为一本教科书. 加 [♠] 标记的习题有一定的难度, 初学者可以跳过去.

本书所要求的数学基础相当于定量经济学 (计量经济学或精算学) 或者数理统计学专业本科学习第一阶段的水平. 为了说明所需的水平, Bain 和 Engelhardt(1992)

就是一个很好的例子. 因此, 本书可以在这样的本科教学的最后一年使用, 或者在以下专业的硕士研究生阶段使用: 精算专业、有很强保险成分的定量金融经济学专业. 为了使得非精算专业的学生也能够使用本书, 我们略去了人寿保险数学中一些专业的记号和术语. 因此, 应用数学专业或者统计专业的学生, 如果对保险的随机方面感兴趣, 也可以学习本书. 我们在写作过程中一直努力地保持着本书在数学上的严谨性和在统计学上的灵活性. 例如, 我们按惯例使用了矩母函数这个术语, 而回避了特征函数和测度论的相关术语. 回归模型的先验分布不要求掌握, 但对本书的学习有帮助.

为了给学生的学习提供帮助, 在附录 B 中给出了很多习题的答案. 有的习题给出了最终答案以方便读者检查自己的工作, 而有的习题只给出了一些提示. 书后还提供了详细的名词索引, 以及一些可能在考试中需要用到的图表. 我们没有列出所有相关参考文献以涵盖书中用到的每一个结果, 而是着重收集了对于所研究主题能提供更多细节, 且为进一步学习提出建议的那些有益的书和论文.

我们对于精确的计算技巧和 R 所提供的可能性投入了大量的精力, 同时对一些经典的近似方法如中心极限定理 (CLT)也给予了重视. 一般地, CLT 本身在保险应用中显得过于粗糙, 但是它的微小改进, 不仅速度快, 而且还经常被证明是出奇的准确. 此外, 它们提供的参数特性的解决方案, 使人们不必在数据轻微改变后重新计算一切. 另外, 我们要强调的是"精确"的方法只有在输入的数据准确的条件下才有意义, 不准确的输入数据导致的误差的数量级通常会远远大于由使用近似方法导致的误差.

本书所使用的记号与数理统计学和非寿险数学一致. 例如, 请参阅 Bowers 等 (1986, 1997), 本书第一部分与该书非寿险部分的设计类似. 特别地, 随机变量都是大写字母, 但实际上并不是所有的大写字母都表示随机变量.

致谢

首先, 我们要特别感谢 David Vyncke 对本书第一版做出的所有工作. 此外, 还有许多人也提供了有益的帮助. 我们感谢 (排名不分先后)Hans Gerber, Elias Shiu, Angela van Heerwaarden, Dennis Dannenburg, Richard Verrall, Klaus Schmidt, Bjørn Sundt, Qihe Tang, Taizhong Hu, Shixue Cheng, Roger Laeven, Ruud Koning, Pascal Schoenmders, Julien Tomas, Katrien Antonio和 Steven Vanduffel 对本书提出的建议, 感谢 Vsevolod Malinovskii 将本书翻译成俄文, 感谢唐启鹤、胡太忠和成世学将本书的第一版翻译成中文, 感谢 Vincent Goulet 帮助我们处理了一些 R 的问题, 我们也感谢无数的使用者、学生和教师提出的宝贵建议. J. 达呐和 M. 胡法兹感谢富通金融与精算风险管理基金的支持.

万维网支持

本书的作者非常乐意和本书的使用者保持联系, 分享信息和资源. 我们在网页 http://www1.fee.uva.nl/ke/act/people/kaas/ModernART.htm 上展示了使用至今本书发现的所有拼写错误列表, 我们还说明了教师如何获取习题答案以及本书在阿姆斯特丹大学的课堂上使用的幻灯片. 为节省使用者大量的打字时间和减少拼写错误, 该网站还提供了书中例题所使用的 R 语言的命令.

作　者

2009 年 3 月 22 日

目　录

在星系中有 10^{11} 颗星星, 这曾经是一个巨大的数字, 但是也只不过上千亿, 还不如国家的赤字! 过去, 我们习惯称它们为天文数字; 现在, 我们应该称它们为经济数学.

——理查德 · 费曼 (Richard Feynman, 1918–1988)

第1章　效用理论和保险

科学不是为了解释现象，更不只是为了说明一些事情，科学的主要任务是建立模型. 所谓模型是指附加一定言语解释、描述所观察现象的数学结构. 评判这种数学结构唯一准确的理由是它的有效性.

—— 约翰 · 冯 · 诺伊曼 (John von Neumann, 1903–1957)

§1.1　引　　言

保险业存在的原因是人们愿意支付一定价格来获取保障. 效用理论解释了为什么被保险人乐意支付高于*纯保费*(承保损失的数学期望) 的保费. 效用理论假设决策者用一个函数值 $u(w)$($u(\cdot)$ 称为*效用函数*)而不是其财富 w 本身来衡量其财富水平，尽管通常他们自己都没有意识到这一点. 为了在随机损失 X 和 Y 之间做出选择，决策者会比较期望效用$\mathrm{E}[u(w-X)]$ 与 $\mathrm{E}[u(w-Y)]$ 的大小，并选择具有较高期望效用的那个损失. 利用这个模型，财富水平为 w 的被保险人就可以确定其为随机损失 X 而准备支付的最高保费P^+，这可通过求解均衡方程 $\mathrm{E}[u(w-X)] = u(w-P)$ 而得出. 在均衡状态下，被保险人认为其投保与否的效用是无差别的. 这个模型也适用于保险合同的另一方，保险人通过其自身的效用函数和可能的附加费用，确定一个最低保费P^-. 如果被保险人的最高保费P^+ 超过保险人的最低保费P^-，那么当保费介于 P^- 与 P^+ 之间时，被保险人和保险人双方效用都增加了.

尽管精确地确定一个人的效用函数不太可能，但是我们可以给出它的一些合理的性质. 例如，更多的财富通常意味着更高的效用水平，因此 $u(\cdot)$ 应该是一个非减函数. 同时，理性决策者是*风险厌恶型*的这一假设也合乎逻辑，这就意味着，在确定损失和具有相同期望的随机损失之间，他们更加偏好于确定损失. 我们将给出具有这样性质的一些效用函数族，并研究其优缺点.

假设被保险人可以在一份具有固定*免赔额*的保单和一份与之具有相同期望赔付额、相同保费的保单之间做出选择，可以证明，对被保险人来说，前者是更好的选择. 如果再保险人承保了保险人所有的风险组合，那么具有固定的最大自留风险额的再保险称为*停止–损失 (止损) 再保险*. 根据风险排序理论，这种类型的再保险对