初中数学精讲

陈德前　编著

江苏教育出版社

三年级代数

CHUZHONG SHUXUE JINGJIANG

初中数学精讲
三年级代数

陈德前　编著

江苏教育出版社

初中数学精讲·三年级代数
陈德前　编著
责任编辑　喻　纬

出版发行：江　苏　教　育　出　版　社
（马家街 31 号，邮政编码：210009）
经　　销：江　苏　省　新　华　书　店
照　　排：南京理工大学激光照排公司
印　　刷：扬　中　市　印　刷　厂

开本 787×1092 毫米　1/32　印张 7.75　字数 169,900
1997 年 9 月第 1 版　1997 年 9 月第 1 次印刷
印数 1—65,200 册

ISBN 7—5343—3061—0

G·2782　　定价：6.50 元

说　明

学校学习阶段，是影响人的一生发展的重要阶段，在校学习能够遇到良师，是一生中的幸运．但这种幸运只可能降临到少数人身上．因此，将优秀教师的教学精华精心整理成书、广泛传播，为广大中学生提供“幸遇良师”的新机会，便成为我们多年的夙愿．经过多年筹备之后推出的新系列《初中数学精讲》，就是循着这样的思路策划成功的．

《初中数学精讲》的作者既有丰富的教学经验，又勤于笔耕，发表过大量著述．最为难能可贵的是，他们至今仍然坚持奋战在初中数学教学第一线，他们是在教学实践中经过千锤百炼、具有真才实学的名师．

《初中数学精讲》是作者的教学精华（特别是新授课教学精华）的浓缩．书中的内容讲解部分，不求面面俱到，而着力于剖析教材的重点、难点和关键；例题的解答与分析力求将“三基”（基础知识、基本技能技巧、基本思想方法）教学与解题训练融为一体，书中的习题经过精心的筛选与配置，由易到难层次分明，举一反三以少胜多．

《初中数学精讲》全套六册：

《一年级分册》，可与现行初中课本代数第一册（上）、代数第一册（下）和几何第一册配套使用；

《二年级代数》，可与现行初中课本代数第二册配套使用；

《二年级几何》，可与现行初中课本几何第二册配套使用；

《三年级代数》，可与现行初中课本代数第三册配套使用；

《三年级几何》，可与现行初中课本几何第三册配套使用；

《复习强化》，主要供初中三年级下学期数学复习阶段使用，也可供各年级代数、几何单元复习时使用.

这套书可供初中学生，自学初中数学者，中学数学教师、教研员、初中数学家庭教师，师范院校数学系师生阅读. 这套书出版后，将不断进行滚动式修订，确保常出常新. 因此，衷心欢迎广大读者对书中的不足之处提出批评、建议.

1997 年 10 月

目 录

第十二章 一元二次方程

第十三章　函数及其图象

第十四章　统 计 初 步

第十二章 一元二次方程

一元二次方程是中学数学中的重要内容，它既有承前启后的作用，又有比较广泛的应用. 通过一元二次方程的学习，可以巩固、加深对实数、代数式、一次方程等知识的理解和掌握，并为今后学习打下必要的基础. 此外，初中数学中一些主要的运算技巧、解题方法以及常用的一些数学思想方法，如"换元法"、"配方法"等，在本章中都有比较多的体现和应用；又如在处理多元方程组和高次方程时，通过"消元法"、"因式分解法"等，体现了"消元"和"降次"的思想方法. 同学们在学习中既要重视基础知识、基本技能的掌握，更要重视思想方法的运用.

本章主要讲一元二次方程的概念、解法与应用，一元二次方程根的判别式、根与系数的关系，可化为一元二次方程的分式方程、无理方程、简单的高次方程以及简单的二元二次方程组的解法.

一 一元二次方程

12.1 一元二次方程的定义、项、系数

1. 一元二次方程的定义与一般形式

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程.

对于这个概念，应理解如下几点：(1)方程两边都是关于未知数的整式；(2)方程只含有一个未知数；(3)在满足(1)、(2)的前提下，方程经整理可化为 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$ 的一般形式. 因此，凡指方程 $ax^2+bx+c=0$ 是一元二次方程，必有 $a\neq0$；反之，只有当 $a\neq0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0$ 才是一元二次方程.

例 1 下列关于 x、y 的方程是一元二次方程吗？为什么？

(1) $2x^2-\frac{1}{x}=0$；(2) $(x+3)(x-1)=x^2$；

(3) $(2x+1)(2x-1)=0$；(4) $x^2+y-4=0$；

(5) $x^2-mx(2x-m-1)=x$；

(6) $\frac{a^2}{b}x^2-(a-b)x+\frac{2b^2}{a}=0$.

解 (1)不是，因为 $\frac{1}{x}$ 不是关于 x 的整式；

(2)不是，因为整理后的方程为 $2x-3=0$；

(3)是，因为整理后的方程为 $4x^2-1=0$；

(4)不是，因为方程中含有两个未知数；

(5)整理后的方程是 $(1-2m)x^2+(m^2+m-1)x=0$，当 $m\neq\frac{1}{2}$ 时它是一元二次方程；当 $m=\frac{1}{2}$ 时它为 $-\frac{1}{4}x=0$，是一元一次方程；

(6)方程的左边虽是分式，但对未知数 x 来说是整式，且只含有一个未知数，又 a、b 不为零，x^2 的系数 $\frac{a^2}{b}\neq0$，故它是一元二次方程.

说明 在理解一元二次方程的概念时要防止这样几种错误：①方程中含有二次项就认为是一元二次方程，如本例中的(1)、(2)、(4). ②方程形式上没有二次项就认为不是一元二次

方程，如本例中的(3). ③把分式方程误认为一元二次方程，如本例中的(1). 只有对整式方程才可按未知数的最高次数进行分类. ④字母系数方程忽视讨论，如本例中的(5)、(6).

2. 一元二次方程中的项与系数

在 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 中，ax^2 叫做二次项，a 叫做二次项系数；bx 叫做一次项，b 叫做一次项系数；c 叫做常数项. a是不为零的实数(当a为零时方程就不是二次方程了)，b、c可以是任意实数(包括零)，因此一元二次方程有下列几种形式：

$ax^2+bx+c=0\ (abc\neq 0)$;

$ax^2+bx=0\ (a\neq 0, b\neq 0, c=0)$;

$ax^2+c=0\ (a\neq 0, c\neq 0, b=0)$;

$ax^2=0\ (a\neq 0, b=c=0)$.

前者称为完全一元二次方程，后三者由于缺少一次项，或常数项，或两项都缺，因此称为不完全一元二次方程.

例 2 把方程$(x+1)^2-2(x-1)^2=6x-5$ 化成一般形式，写出它的二次项系数、一次项系数及常数项.

('95 宁夏区银南地区)*

解 去括号得：$x^2+2x+1-2x^2+4x-2=6x-5$，移项合并同类项得：$x^2-4=0$.

二次项系数为 1，一次项系数为 0，常数项为 -4.

说明 解答这类问题要注意：(1)要先把已知的方程化成

---

* 近年来各地的中考数学试卷中，出现了许多好题，新颖地、巧妙地考查学生对初中数学中的基本知识、基本技能技巧和基本思想方法的掌握情况. 这些好题，丰富了初中数学教学内容，引起初中师生的浓厚兴趣. 本书也精选了最近几年各地中考数学试卷中的一些好题，并尽可能地注明出处. "'95 宁夏区银南地区"表示例 2 是 1995 年宁夏回族自治区银南地区的中考数学试题.

一元二次方程的一般形式(为解题方便,通常使二次项系数为正);(2)在指出各项系数时,对带有负号的千万不要把负号丢掉;(3)如果缺少某一项,可以看作该项的系数为0,如 $x^2-4=0$ 缺一次项,即一次项系数为0.

练　习

1. 选择:

(1)下列方程中,是一元二次方程的是 (　　)

(A) $3x^2+\frac{1}{x}+1=0$.

(B) $ax^2+bx+c=0$.

(C) $(x-2)(x+4)=x^2$.

(D) $x^2(x+1)+x(x^2+3x-1)=2x^3+3x^2+4x-4$.

(2)要使方程 $(a-3)x^2+(b-1)x+c=0$ 是一元二次方程,则 (　　)

(A) $a\neq0$.　　(B) $a\neq3$.

(C) $a\neq3,b\neq1$.　　(D) $a\neq3,b\neq1,c\neq0$.

2. 判断:

把方程 $x^2+9x=6$ 化成一般形式为 $x^2+9x-6=0$. (　　)

(A)对.　　(B)不对.　　('96 武汉市)

3. 把下列方程化成一元二次方程的一般形式,指出二次项系数、一次项系数及常数项:

(1) $5=(2x-3)(3-2x)$;

(2) $(x+2)^2-4=3x^2$;

(3) $(7x+1)(7x-1)+1=0$;

(4) $a(1-x^2)+c(1+x^2)=2bx$ $(c-a\neq0)$.

12.2　一元二次方程的解法

解一元二次方程的基本思想是降低未知数的次数，转化为一元一次方程来求解. 常用的解法有四种：

1. 直接开平方法

直接开平方法是由平方根的定义引出的，它与“数的开方”有密切的联系. 用直接开平方法可解下列类型的一元二次方程：

$x^2=b\ (b\geqslant 0)$，$(x+a)^2=b\ (b\geqslant 0)$.

注意　由于负数没有平方根，所以上列两式中的 $b\geqslant 0$. 当 $b<0$ 时，方程无实数根.

例 1　解下列方程：

(1)$x^2-3=0$；　　　　(2)$x^2+16=0$；

(3)$4(x+2)^2-9=0$.

解　(1)$\because\ x^2=3$，$\therefore\ x_1=\sqrt{3}$，$x_2=-\sqrt{3}$；

(2)移项得 $x^2=-16$，$\therefore$　方程无实数根；

(3)移项得 $4(x+2)^2=9$，

两边同除以 4 得$(x+2)^2=\dfrac{9}{4}$，

$\therefore\ x+2=\dfrac{3}{2}$或 $x+2=-\dfrac{3}{2}$，

$\therefore\ x_1=-\dfrac{1}{2}$，$x_2=-\dfrac{7}{2}$.

说明　当方程中仅存在常数项和一个含有未知数式子的平方时，可将这两项分别置于等号两端，通过两边开平方来解. 如果题中给出的方程不具备用直接开平方法解的形式，应先进行转化.

例 2　关于 x 的一元二次方程 $3x^2+k=0$ 有实数根，则

(　　)

(A)$k>0$.　(B)$k<0$.　(C)$k\geqslant 0$.　(D)$k\leqslant 0$.

('96 福州市)

解　移项得 $3x^2=-k$,

$\because$　$3x^2\geqslant 0$,$\therefore$　$-k\geqslant 0$,即　$k\leqslant 0$,

$\therefore$　应选择(D).

说明　方程 $ax^2+c=0$ $(a\neq 0)$有实数根的条件是 $ac\leqslant 0$.

2. 配方法

用配方法解一元二次方程的基本思想是,将方程化归为可用直接开平方法求解的方程.

例 3　解方程:$2x^2+16x+18=0$.

解　方程两边同除以 2 并把常数项移到等号右边,得

$x^2+8x=-9$,

为使左边成为一次二项式的平方,对照和的平方公式$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ 的形式,必须在方程的两边各加上一个常数,这个常数应等于一次项系数一半的平方,得

$x^2+8x+\left(\dfrac{8}{2}\right)^2=-9+\left(\dfrac{8}{2}\right)^2$,

即$(x+4)^2=7$,

解这个方程得 $x_1=-4+\sqrt{7}$,$x_2=-4-\sqrt{7}$.

说明　用配方法解一元二次方程的一般步骤是:

①二次项系数不为 1 时,先用二次项的系数去除方程的两边,把二次项系数化为 1;

②移项:把常数项移到方程的右边;

③配方:方程两边各加上一次项系数一半的平方;

④求解:把方程化成$(x+a)^2=b$ 的形式,然后用直接开平方法来解.

用配方法解一元二次方程比较麻烦，一般较少用到. 但是，一元二次方程的求根公式就是用配方法导出的，在以后的学习中也会经常用到配方法，因此，应当将配方法作为一种重要的数学方法来掌握.

例 4 用配方法解方程 $x^2-2x-m=0$. （'96 新疆区）

解 移项得 $x^2-2x=m$，

配方得 $x^2-2x+1=m+1$，

即 $(x-1)^2=m+1$.

$\therefore$ 当 $m\geqslant -1$ 时，方程有实数根 $x_1=1+\sqrt{m+1}$，$x_2=1-\sqrt{m+1}$；当 $m<-1$ 时，方程无实数根.

说明 当方程中含有字母系数时，要注意对根的情况的讨论.

3. 公式法

用配方法来解一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$，在 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时可以推导出一元二次方程的求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 建议同学们将此作为练习.

应用一元二次方程的求根公式时，应当注意：

①用求根公式解一元二次方程，需要在确定 a、b、c 的数值（或表示式）后，对代数式 $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 进行求值（或化简）. 因此，确定 a、b、c 是关键. 为避免错误，应该先把方程化为一般形式，a、b、c 是负数时，一定要带着符号计算.

②$b^2-4ac\geqslant 0$ 是公式的一部分，这就是说，在运用求根公式求解前，先求 b^2-4ac，当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时，方程有实数根，可以继续把根求出来；当 $b^2-4ac<0$ 时，方程没有实数根，这时，就不必再代入公式了.

例 5 解关于 x 的方程：

(1) $(x+1)(x-2)=3$；

(2) $3x^2-2\sqrt{2}x+1=0$；

(3) $m^2x^2+n^2=2mnx\ (m\neq 0)$；

(4) $ax^2+3x-a=0\ (a\neq 0)$.

解 (1)原方程即 $x^2-x-5=0$，

这里 $a=1, b=-1, c=-5$，

$b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-5)=21$，

$\therefore\quad x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{21}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$，

$\therefore\ x_1=\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}, x_2=\dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$.

(2)这里 $a=3, b=-2\sqrt{2}, c=1$，

$b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times3\times1=-4<0$，

$\therefore$ 原方程无实数根.

(3)原方程即 $m^2x^2-2mnx+n^2=0$，

这里 $a=m^2, b=-2mn, c=n^2$，

$b^2-4ac=(-2mn)^2-4m^2n^2=0$，

$\therefore\quad x=\dfrac{2mn\pm0}{2m^2}$，即 $x_1=x_2=\dfrac{n}{m}$.

说明 这个方程有两个相等的实数根，一定要写成 $x_1=x_2=\dfrac{n}{m}$，不能写成一个根 $x=\dfrac{n}{m}$.

(4)这里二次项系数、一次项系数、常数项分别为 a、3、$-a$，由求根公式得

$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+4a^2}}{2a}$.

说明 在确定各项系数时，切不可写成 $a=a, b=3$，

$c=-a$,求根时也不要写成 $b^2-4ac=9+4a^2$ 的形式.

4. 因式分解法

用因式分解法解一元二次方程的步骤是:

(1)将方程化为一般形式;

(2)将方程左边的代数式分解为两个一次式的乘积;

(3)使每一个一次因式等于零,得到两个一元一次方程;

(4)两个一元一次方程的根就是原方程的两根.

用因式分解法解一元二次方程,对二次三项式施行因式分解是关键.对二次三项式施行因式分解,方法灵活多样、技巧性强,特别是用十字相乘法分解,简捷明快.综合应用因式分解的知识解一元二次方程,能减少计算量,具有迅速、准确的特点.

例 6 解下列关于 x 的方程:

(1) $-0.2x^2+\frac{1}{4}x+0.3=0$;

(2) $4(x+3)^2-9(x-5)^2=0$;

(3) $x^2+x=6+\sqrt{6}$; (4) $(2x-1)(x+3)=4$;

(5) $m^2x^2+n^2=2mnx\ (m\neq 0)$;

(6) $(k^2-k-2)x^2-(5k-1)x+6=0\ (k\neq -1, k\neq 2)$.

('96 江苏省扬州市)

解 (1)原方程可化为 $4x^2-5x-6=0$,

$(x-2)(4x+3)=0$, $\therefore\ x_1=2, x_2=-\frac{3}{4}$.

(2)方程左边分解因式得

$[2(x+3)-3(x-5)][2(x+3)+3(x-5)]=0$,

$\therefore\ x_1=21, x_2=\frac{9}{5}$.

(3)移项分组分解得 $(x^2-6)+(x-\sqrt{6})=0$,

$\therefore \quad (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}+1)=0,$

$\therefore \quad x_1=\sqrt{6}, x_2=-1-\sqrt{6}.$

(4)原方程可化为 $2x^2+5x-7=0$，

$\therefore \quad (2x+7)(x-1)=0,$

$\therefore \quad x_1=-\dfrac{7}{2}, x_2=1.$

(5)原方程可化为 $m^2x^2-2mnx+n^2=0$，

$\therefore \quad (mx-n)^2=0, \therefore \quad x_1=x_2=\dfrac{n}{m}.$

(6)方程左边分解因式得

$[(k+1)x-2][(k-2)x-3]=0,$

$\therefore \quad x_1=\dfrac{2}{k+1}, x_2=\dfrac{3}{k-2}.$

说明 (1)系数是分数或小数的方程，一般要化成最简整系数方程，且使二次项系数为正.

(2)要灵活选用因式分解的四种基本方法：提取公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法.

(3)含有字母系数的一元二次方程，应尽量用因式分解法来解，这样往往更简捷，在分解时要充分利用题设中的附加条件.

(4)一般地，对于方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$，若 $a+b+c=0$，则必有一根为 1，另一根为 $\dfrac{c}{a}$；若 $a-b+c=0$，则必有一根为 -1，另一根为 $-\dfrac{c}{a}$. 反之也成立(请同学们自己证明).

例 7 解方程：

(1) $(3x-2)^2=2(3x-2)$； ('95 济南市)

(2) $(2x-3)^2+12=8(2x-3)$.

解 (1)原方程即 $(3x-2)^2-2(3x-2)=0$，