$= \cos x + i \sin x$ $\frac{1}{2}(\sqrt{5}\pm 1)$

$i \sin x$

$ix = \cos x + i \sin x$ $\frac{1}{2}(\sqrt{5}\pm 1)$

梁进 编著

数学与名画

科学出版社

数学与名画

梁 进 编著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书从数学的角度赏析世界名画，从名画的品评中发现数学的艺术魅力。从文艺复兴时期名画的数学结构，到印象派时期的数学概念，从达·芬奇的数学探索，到塞尚的数学空间，还有其他众多著名画家的数学元素，特别是埃舍尔画作的数学内涵，作者将带领读者一一分析，慢慢欣赏。本书特点鲜明，具有丰富的数学内涵和人文素材。

本书可作为高等学校通识类课程教材，也可作为大学生、大学教师以及对数学文化感兴趣的其他人士的科普读物。

图书在版编目（CIP）数据

数学与名画 / 梁进编著. —北京：科学出版社，2016.2
ISBN 978-7-03-046880-2

Ⅰ.①数… Ⅱ.①梁… Ⅲ.数学－关系－绘画－鉴赏－世界
Ⅳ.①J205.1 ②O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 004330 号

责任编辑：胡海霞 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016年2月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2016年2月第一次印刷 印张：9
字数：181 000

定价：59.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

序——用数学的眼睛看画

梁进老师是主要研究应用数学的，长于偏微分方程——万物演化的基本法则大多是通过这样的方程来描绘的，也醉心于艺术欣赏，曾“淌过”世界各地的博物馆，见过无数名画，发掘了众多名画中潜藏的数学元素和精神，于是在科学网发表了“世界名画中的数学”的系列博文[①]，赢得众多读者的喜爱，然后便有了该书。这当然是一本与众不同的名画欣赏读物，它一定会引领更多的读者用新的眼光去看绘画，乃至看艺术、看自然、看人生。因为在数学的舞台上，我们和世间万物都是在不断变换着、演化着——当然，遵从一定的偏微分方程的——“点、线、面”，呈现出一幅幅不同风格和流派的图画。我想该书带给读者最大的启发是，改变对数学的偏见、对科学的偏见以及对思维的偏见，让科学与艺术重新融合在头脑里。

时下流行“像艺术家一样思考”，似乎不是因为艺术家创造“美”——后现代派也创造“丑”，就让他们自己玩儿吧——而是因为他们“创造”了特殊的思维方式，令人眼红了。遗憾的是，人们闹着学艺术家的思维时，冷落了同样具有创造性思维的数学家兄弟。这也难怪，不知从什么年月起，有些人就将艺术思维与科学思维分开了，将感性与理性对立了。这种“二分法”既夸张又荒唐，不但离间了科学和艺术，也让“理工男”与“文艺女”变成星河两岸的牛郎和织女，盈盈一水间，相望却无言。结果，我们的头脑越来越“残缺”了。我们阅读该书，也许会惊奇地发现一个平凡的事实：科学与艺术从来是相通的，“最抽象”的数学与“最具象”的绘画，有时简直像孪生兄弟。

5000多年前，古埃及奥西里斯神庙的“生命之花”就是“一群”圆圈的组合，像几何习题的插图。简单几何图形的重复、变形及其显现的对称和韵律，

① 网址：http://blog.sciencenet.cn/u/liangjin.

是几千年来不变的艺术"基元"。如果说绘画来源之一是自然物象，那么来源之二就是几何，绘画在不知不觉中成了数学的小兄弟。在文艺复兴时期，绘画更是自觉地融合科学精神。我们在达·芬奇的手稿里可以看到时代的风尚："先学科学，然后在那科学的指引下实践（First study science, then follow the practice that born of that science）。"他认为，绘画是科学活动，而且是最高级的活动。他的笔记手稿满是光线、阴影、透视、色彩，还有人体结构和"清流激湍"，几乎都是带插图的科学启蒙课本。

有趣的是，当科学风尚改变时，绘画风格似乎在跟着转变。二者虽然无直接的因果关系，却从不同侧面代表了时代的文化生态。史学家常说时代思潮和时代文艺，如王国维说"凡一代有一代之文学"，同样可以说时代科学和时代数学。如果说古典时代科学与艺术的自然融合是因为那时的科学与文艺还不够"百花齐放"，那么近代文艺风尚与科学风尚的呼应，就足以令人惊奇和惊喜了：从安格尔与德拉克洛瓦的线条——色彩之争，到莫奈的光影、塞尚的色块和毕加索的立体，都呼应着科学的风尚。如果说古典绘画抱着欧几里得几何的时空，那么立体画派更倾向于非欧几何，更像拓扑学（参见立体派画家Albert Gleiser和Jean Metzinger的《立体主义》）。当康定斯基让"色彩与形态"摆脱物象时，物理学也在从实验模型走向几何化（如相对论和规范场论），实现了哈代（华罗庚在剑桥的老师）所说的，数学家和画家一样，都创造"模式"。数学的概念和符号犹如画家的线条和色彩，数学的结构犹如绘画的场景，而艺术"美"也就成为数学"真"的一个标准。这令人想起大诗人济慈因古希腊陶瓮而发的感叹："美即是真，真即是美（Beauty is truth, truth beauty）。"大数学家外尔说，"我的工作总需要将真与美统一起来，当我不得不选择其一时，我通常选择美"。控制论创始人、自称"昔日神童"的维纳也在自传里表达过他的艺术式的数学体验：数学家最好的回报就是能爱上他发现的东西，犹如塞浦路斯国王爱上他自己塑造的雕像Pygmalion一样。

所以，数学对绘画，不是旁观者看画展，而是"会心人别有怀抱"，能发现画家或者自己都感觉到了却并不明白的东西。我们看埃舍尔的画，会惊讶其抽象的几何结构和空间变换以及难以言表的逻辑怪圈，竟能那么活泼地呈现出来。然而埃舍尔的数学并不好，从来就没及格过。但他"莫名其妙就理解了数学"，似乎自己是数学家"失散多年的兄弟"（见恩斯特《魔镜：埃舍尔的不可能世界》）。在不懂数学的埃舍尔的绘画里，我们还能看到相对论、黎曼几何和量子场论的"形象"——绘画在无意间生出数学，当然需要用数学的眼睛去看它；另外，数学法则本来就"存在于"自然世界和精神世界，绘画表现自然和自然

激发的心情，当然也必然会隐藏数学。绘画过滤和抽象了世界，数学不过是再抽象一回罢了。越是抽象，越能虚怀若谷地包容万象。

诗人画家王维画“雪中芭蕉”，曾引出科学家沈括的高见：“书画之妙，当以神会，难可以形器求也。”（《梦溪笔谈》卷十七）所谓“神会”，就是不能“心为形役”，而应以模式、韵律和精神去契合画的精神，而不是拿自然的物象去比较画面的形象。西方古典绘画是具象的，我们的写意山水也是具象的，即使缺一点“神会”，也能看出几分模样；现代绘画没那么多“象”可以触摸了，必须换一种眼光去看。正如梁进老师在解读康定斯基的抽象画时说的：我们需要从作品的“结构”看出它的“函数空间”。也就是说，当我们用数学图像去看画，能自然把握它的元素、结构和韵律。例如，我们看蒙德里安的“蓝色组合”，那些杂乱的大大小小、深深浅浅、重重叠叠的色块，并不代表什么具象的东西，却很好地刻画了一种统计分布，不管什么类型的统计，我们觉悟出统计分布就好了，它是可以存在于任何地方的……。

从某种意义上说，数学就是脱离了物质世界的“抽象画”，它的形式和精神也就是绘画的形式和精神。正如康定斯基说的，“数是各类艺术最终的抽象表现”。我们用数学的眼睛来看绘画，只不过是与失散的兄弟重逢，尽管他们越来越陌生了。

2015年2月12日于成都

前　言

横看成岭侧成峰，远近高低各不同。
不识庐山真面目，只缘身在此山中。
——苏轼《题西林壁》

在许多人的印象中，艺术家疯疯癫癫，数学家痴痴呆呆，艺术和数学貌似风马牛不相及，即便有点什么关系，也是简单的黄金分割的画面分布，或者数学公式的直接美感。然而，数学和艺术都是人类智慧的结晶，在哲学的高度殊途同归。艺术是形象思维的高度抽象，数学是逻辑思维的高度抽象，数学研究数和形，所以也包含形象逻辑，艺术也讲究逻辑，所以也包含逻辑形象。有时候，数学的深刻思想会在似乎无数学训练的艺术家的画面上诠释，艺术的精彩理念也会在远离艺术的数学家的推演中淋漓宣泄。

我长期从事数学研究，并不以为自己对艺术有很深的造诣。对于世界名画，也只是喜欢，并且欣赏它们时多少带点数学的眼光。本书开始于一次数学文化会议。为了会议的报告，我选择了“世界名画背后的数学”这样一个主题。作为准备而写了一些文章，我尝试着将部分内容在科学网博客上发表。没想到这个系列受到了很大欢迎。读者认为，我以一个独特的、过去很少人注意的角度去欣赏艺术，所以有点意思。两年来，我陆陆续续发表了几十篇相关博文，而且以此为主题分别在《中国科学报》和《上海教育》上写专栏，也都得到了很好的反响。感谢科学出版社对这些内容的价值给予肯定，并支持将其出版成书，希望本书可以从新的观点解读世界名画，让人们特别是有理工背景的人也能以自己的素养欣赏世界顶尖的艺术。在本书中，特别强调这些名画及其流派形成的年代和背景，我认为社会的思潮和科技的成就对艺术发展有着至关重要的影响，反过来也是对的。然而，艺术的水很深，我深感自己只是在浅水滩玩耍的

孩子，想用自己手中的并不强大的数学勺舀上一瓢，偶得沧海一粟，希望借此抛砖引玉，吸引更多有兴趣的读者去探究这数学与艺术的美妙。

本书分为五章，我们分别沿着社会历史发展的脉络，从科学觉醒的年代，即文艺复兴开始，然后是工业革命对绘画的影响，通过欣赏相应时期的流派，如印象派、现代派及其他各派别具有代表性的艺术家的一些作品，从数学的角度加以解读，并顺便介绍相关的数学家和数学学科及其发展。对照科学和艺术的发展，我试图找到这些艺术流派形成的数学理念和科学背景。本书不是在谈艺术史，所以选择的画家和画作虽然都很有名，但并不全面，主要的考量是基于数学角度而不是基于艺术地位。我特别列出一章，专门谈数学艺术家埃舍尔，因为他的作品就是艺术与数学融合的象征，这使得他在艺术界很另类。最后，谈谈中国画，中国画走的是和西洋画不同的路，其中数学的痕迹较轻，但很多内涵也是和数学思想相通的。在本书里，对于画家的头像尽量采用其自画像，因为这些自画像更能体现他们的个性。

本书的读者对象需具有一定的数学基础，为了将读者群推广到青少年，我尽量避免使用过于难懂的数学语言，而设法让深奥的数学思想通俗地通过艺术作品解释清楚。如果读者对于个别高深的数学名词和数学公式的含义不理解，可以跳过去，不会影响继续阅读，而那些不太懂的数学名词就留作自己的悬念，待进一步的学习和理解。

梁　进

2015年2月

目　录

引　子

大弦嘈嘈如急雨，小弦切切如私语。

嘈嘈切切错杂弹，大珠小珠落玉盘。

——白居易《琵琶行》

丹·布朗的畅销小说《达·芬奇密码》(*The Da Vinci Code*)一开始是这样一个场景：法国巴黎卢浮宫博物馆的馆长被人暗杀，以四肢张开的形式躺在卢浮宫里，他的身边留下了一串数字：13-3-2-21-1-1-8-5和两行文字：O, Draconian, devil!（啊，严酷的魔王！）以及Oh, Lame Saint!（哦，瘸腿的圣徒！）这串数字正是具有黄金分割数列之称的斐波那契（Fibonacci，1170 ～ 1250）数列的前八项，其打乱的排列，暗示两段文字的排列应该重排。重排的结果是：Leonardo da Vinci!（列昂纳多·达·芬奇！）和The Mona Lisa!（蒙娜丽莎！）。就这样，那本书开始了故事的破谜之旅。名画家达·芬奇、名画《蒙娜丽莎》、名数列斐波那契数列和名比例黄金分割也就这样联系起来了。那什么是黄金分割呢?

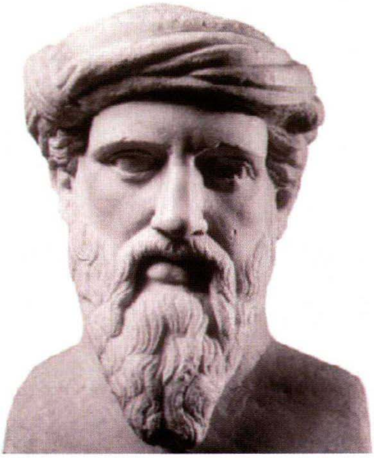
图0.1　毕达哥拉斯

我们数学艺术之旅的起点就是从黄金分割开始的。黄金分割是指将整体分为两部分，较大部分与整体部分的比值等于较小部分与较大部分的比值。这个比例被公认为是最能引起美感的比例，因此被称为黄金分割。传说有一天古希腊数学家毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前569 ～ 前495）（图0.1）在街上听到铁匠铺里的铁匠打铁的声音非常好听。善于动脑筋的他仔细倾听研究，发现了铁匠打铁的节奏比律。这个比例后被人们称为黄金分割比例，也被认为最早是由毕达哥拉斯发现的，并在音乐中有广泛应用。图0.2所示的中世纪留下的木刻就试图想说明这一点。后来，古希腊数学家欧多克索斯（Eudoxus，公元前408 ～前355）第一次对这个比例进行了系统研究，其研究结果后来被写进欧几里得（Euclid，公元前325 ～前265）的《几何原本》，成为最早有关黄金分割的论著。这个比例后来更被天文学家开普勒（Kepler，1571 ～ 1630）称为神圣比例。

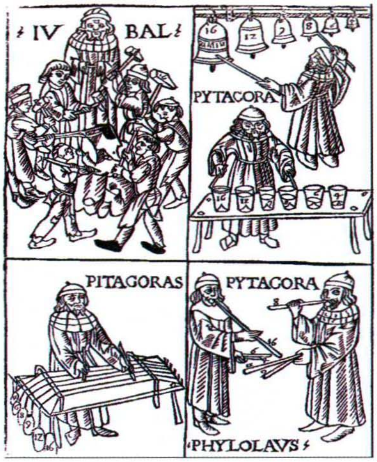

图0.2　中世纪木刻

对于一个简单线段分割的例子，我们容易用数学式子表示：

$$\frac{\text{整体长度}}{\text{较长分段的长度}}=\frac{\text{较长分段的长度}}{\text{较短分段的长度}}。$$

如果用a表示较长分段的长度，b表示较短分段的长度，注意到整体长度为$a+b$，如图0.3所示。

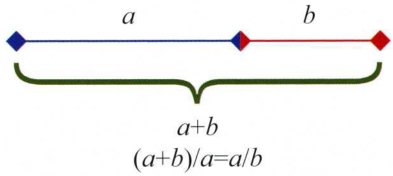

图0.3　黄金分割比例示意图

那么从上面的式子可以推出较长分段与较短分段的比值满足

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}-1=0,$$

而用一元二次方程的求解方法，易得解

$$\frac{a}{b}=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2};$$

同样地，较短分段与较长分段的比值满足

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{b}{a}-1=0,$$

易解得以上方程的根为

$$\frac{b}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},$$

即互为倒数的两个解的根互为反号，而且两个正根之差的绝对值为1。它们是无理数，小数点后面相同，有无穷多位，近似数是0.618，即两个根的绝对值的近似数分别为1.618和0.618。这就是黄金分割比例值的来历。它还有更奇妙的表达方式，如连分式

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{1+\ddots}+1}+1}+1,\qquad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{1-\ddots}-1}-1}-1,$$

以及连根式

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}},\quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots}}}}。$$

事实上，前后两个连分式可以表示成数列

$$\{a_n\},\quad \{b_n\},\quad a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1,\quad b_{n+1}=\frac{1}{b_n}-1,$$

而前后两个连根式也可表示成数列

$$\{c_n\},\quad \{d_n\},\quad c_{n+1}=\sqrt{1+c_n},\quad d_{n+1}=\sqrt{1-d_n},$$

对四个递推式的两端取极限，如果极限存在（它们的确存在），记为$L_a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$L_c=\lim\limits_{n\to\infty}c_n$，则它们都满足同样的方程

$$L^2-L-1=0,$$

而$L_b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，$L_d=\lim\limits_{n\to\infty}d_n$都满足方程

$$L^2+L-1=0,$$

这就是前面提及$\frac{a}{b}$和$\frac{b}{a}$分别满足的方程，它们的正根分别是$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$和$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$。

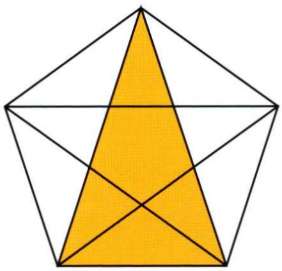

图0.4　正五边形里的黄金三角形

一个等腰三角形，如果两个底角是72°，即弧度为$\frac{2\pi}{5}$，则我们称它为黄金三角形（见图0.4中边长为1的正五边形里的棕色三角形，其底为1，其腰为L）。这个三角形的底腰比为$\frac{1}{L}=2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\approx0.618$。事实上，由正五边形里最大的白色三角形，可以得到$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{L}{2}$。再由倍角公式，可以得到$L$满足方程

$$L^3-2L^2+1=0。$$

显然，$L\neq1$，上面的等式两边除以$L-1$，我们又得到了上式的正根为$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$的一元二次方程，所以，黄金三角形的腰和底的比为$L\approx1.618$，底和腰的比为$\frac{1}{L}\approx0.618$。而这样的三角形在正五边形和正五角形里都可以找到。

意大利数学家斐波那契发现了由递推定义的每项等于前两项之和的著名的斐波那契数列（图0.5）：

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,
987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, ⋯

图0.5　斐波那契

这个神奇的数列相邻两项后前相除所得的商随着项数的增大将趋近于$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。斐波那契数列因此被称为黄金分割数列。事实上，由斐波那契数列的定义，若a_n是这个数列的第n项，则它满足

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

等式两边对n取极限，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$存在，那么$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{1}{L}$，上式就可以再次推出前面我们得到的黄金分割所满足的那个神秘的一元二次方程

$$L^2-L-1=0。$$

从而得到L就是黄金分割数。斐波那契数列是自然数的数列，通项公式却是含无理数的公式：

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

上式可以这样求解：记上面关于L的方程的两个根分别为L_1, L_2，则对方程两端反复同乘同一个根，就有

$$L_i^{n+1}=L_i^n+L_i^{n-1},\quad i=1, 2,$$

作两个根的线性组合

$$G=aL_1^n+bL_2^n,$$

有

$$G_{n+1}=aL_1^{n+1}+bL_2^{n+1}=a(L_1^n+L_1^{n-1})+b(L_2^n+L_2^{n-1})$$
$$=(aL_1^n+bL_2^n)+(aL_1^{n-1}+bL_2^{n-1})=G_n+G_{n-1},$$

所以G_n是斐波那契数列，特别地，当n=1,2时，得到

$$\begin{cases} aL_1+bL_2=1, \\ aL_1^2+bL_2^2=1, \end{cases}$$

解得

$$a=-b=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

也就得到了上面的通项公式。

斐波那契数列有一个兔子版本：斐波那契养着一只神奇的兔子，这种兔子一个月后长大，再过一个月就会产下一只小兔，如果这些兔子既不死亡，也不转手，以后每个月他有多少只兔子？容易推算，如果记F_n为第n个月的兔子数，则其满足

$$F_1=F_2=1,\quad F_{n+1}=F_n+F_{n-1},\quad n\geqslant 2,$$

这神奇的兔子正是按照斐波那契数列增长的。当然，如果斐波那契离开这个世界时不把这些兔子带走，那么，现在的天下将是兔子的天下。

还有我国著名的二项式展开系数的杨辉三角形（也称为贾宪三角形）。

如果沿图0.6所示的斜角线顺序将数字加起来，得到的第一排的红色数列也是斐波那契数列。

1	1	2	3	5	8	13	21	34	…
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	39	84	126	126	84	36	9	1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

图0.6　杨辉三角形示意图

在平面上按斐波那契数展开，得到一个矩形称为黄金矩形，沿着黄金矩

形的对角走，得到了一条漂亮的螺线，这个螺线称为对数螺线（也称为等角螺线），发现它的是法国数学家笛卡儿（Descartes，1596 ～ 1650），瑞士著名的数学世家伯努利家族的雅各布 • 伯努利（Jakob Bernoulli，1654 ～ 1705）一直研究它，太喜欢这条螺线了，甚至要求将这条螺线刻到他的墓碑（图0.7）上，并附言“纵使改变，依然故我”（eadem mutata resurgo），尽管后来工匠悲剧性地误刻了阿基米德螺线（图0.8）。

图0.7　雅各布 • 伯努利的墓碑

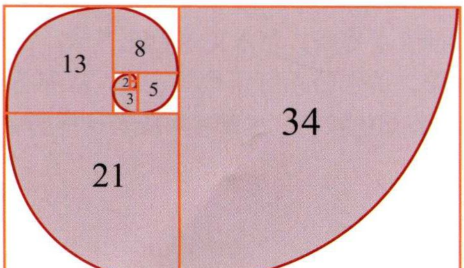

图0.8　黄金分割与对数螺线示意图

黄金分割在自然界被大量发现，比如许多树叶如枫叶的长宽比、很多昆虫如蝴蝶的身长和翅宽比、螺旋如鹦鹉螺的扩张比等（图0.9的葵花花籽的排比），在古建筑中如雅典的巴特农神殿和埃及的金字塔也遵循着黄金分割原则。当然，我们将要欣赏的世界名画也不例外。

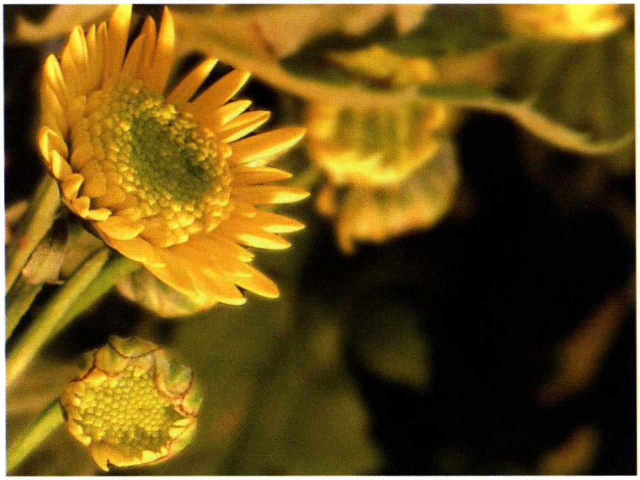

图0.9　向日葵花盘里的对数螺线

如果说含无理数的黄金分割是处在数学萌芽期（公元前600年以前）经历了第一次数学危机（无理数的出现）的古希腊数学家对艺术的贡献，那么随后数学的发展又经历了初等数学时期（公元前600年～17世纪中叶），该阶段相对于文化黑暗的中世纪；变量数学时期（17世纪中叶～19世纪20年代），数学由静而变，经历了第二次危机（微积分的产生），而其间也发生了文艺复兴和工业革命，绘画艺术在此期间有了革命性的发展，从科学因素的融入到主观情绪的宣泄，绘画的各种流派精彩纷呈；近代数学时期（19世纪20年代～第二次世界大战），数学经历了第三次危机（罗素悖论），此时资本主义社会的主体已基本形成，讲究个性的艺术越走越抽象；现代数学时期（20世纪40年代以来），计算机的广泛应用让数学插上了翅膀，艺术更是百花齐放。在历史发展过程中，数学经历了从具体到抽象，从平面几何到非欧几何，从静态到动态，从确定到随机；与此同时，艺术的发展也按自己的脚步呼应着这样的变化。