卓越工程技术人才培养特色教材

XIANXING DAISHU
XITIKE JIAOCHENG

线性代数习题课教程

主　编　孟祥瑞　顾文亚　吴亚娟　许志奋

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

卓越工程技术人才培养特色教材

线性代数习题课教程

主　编　孟祥瑞　顾文亚　吴亚娟　许志奋

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题课教程 / 孟祥瑞等主编. — 镇江 : 江苏大学出版社,2015.8
ISBN 978-7-81130-971-3

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①孟… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—题解 Ⅳ. ①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 196003 号

线性代数习题课教程

主　　编/孟祥瑞　顾文亚　吴亚娟　许志奋
责任编辑/吴昌兴　郑晨晖
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编: 212003)
电　　话/0511-84446464(传真)
网　　址/http://press.ujs.edu.cn
排　　版/镇江华翔票证印务有限公司
印　　刷/句容市排印厂
经　　销/江苏省新华书店
开　　本/718 mm×1 000 mm　1/16
印　　张/16
字　　数/296 千字
版　　次/2015 年 8 月第 1 版　2015 年 8 月第 1 次印刷
书　　号/ISBN 978-7-81130-971-3
定　　价/30.00 元

江苏省卓越工程技术人才培养特色教材建设

指导委员会

序

深化高等工程教育改革、提高工程技术人才培养质量，是增强自主创新能力、促进经济转型升级、全面提升地区竞争力的迫切要求。近年来，江苏高等工程教育飞速发展，全省46所普通本科院校中开设工学专业的学校有45所，工学专业在校生约占全省普通本科院校在校生总数的40%，为“十一五”末江苏成功跻身全国第一工业大省做出了积极贡献。

“十二五”时期是江苏加快经济转型升级、发展创新型经济、全面建设更高水平小康社会的关键阶段。教育部“卓越工程师教育培养计划”启动实施以来，江苏认真贯彻教育部文件精神，结合地方高等教育实际，着力优化高等工程教育体系，深化高等工程教学改革，努力培养造就一大批创新能力强、适应江苏社会经济发展需要的卓越工程技术后备人才。

教材建设是人才培养的基础工作和重要抓手。培养高素质的工程技术人才，需要遵循工程技术教育规律，建设一套理念先进、针对性强、富有特色的优秀教材。随着知识社会和信息时代的到来，知识综合、学科交叉趋势增强，教学的开放性与多样性更加突出，加之图书出版行业体制机制也发生了深刻变化，迫切需要教育行政部门、高

等学校、行业企业、出版部门和社会各界通力合作,协同作战,在新一轮高等工程教育改革发展中抢占制高点。

2010年以来,江苏大学出版社积极开展市场分析和行业调研,先后多次组织全省相关高校专家、企业代表就应用型本科人才培养和教材建设工作进行深入研讨。经各方充分协商,拟定了"江苏省卓越工程技术人才培养特色教材"开发建设的实施意见,明确了教材开发总体思路,确立了编写原则:

一是注重定位准确,科学区分。教材应符合相应高等工程教育的办学定位和人才培养目标,恰当地把握研究型工程人才、设计型工程人才及技能型工程人才的区分度,增强教材的针对性。

二是注重理念先进,贴近业界。吸收先进的学术研究与技术开发成果,适应经济转型升级需求,适应社会用人单位管理、技术革新的需要,具有较强的领先性。

三是注重三位一体,能力为重。紧扣人才培养的知识、能力、素质要求,着力培养学生的工程职业道德和人文科学素养、创新意识和工程实践能力、国际视野和沟通协作能力。

四是注重应用为本,强化实践。充分体现用人单位对教学内容、教学实践设计、工艺流程的要求以及对人才综合素质的要求,着力解决以往教材中应用性缺失、实践环节薄弱、与用人单位要求脱节等问题,将学生创新教育、创业实践与社会需求充分衔接起来。

五是注重紧扣主线,整体优化。把培养学生工程技术能力作为主线,系统考虑、整体构建教材体系和特色,包括

合理设置课件、习题库、实践课题，以及在教学、实践环节中合理设置基础、拓展、复合应用之间的比例结构等。

该套教材组建了阵容强大的编写专家及审稿专家队伍，汇集了国家教学指导委员会委员、学科带头人、教学一线名师、人力资源专家、大型企业高级工程师等。编写和审稿队伍主要由长期从事教育教学改革实践工作的资深教师、对工程技术人才培养研究颇有建树的教育管理专家组成。在编写、审定教材时，他们紧扣指导思想和编写原则，深入探讨、科学创新、严谨细致、字斟句酌，倾注了大量的心血，为教材质量提供了重要保障。

该套教材在课程设置上基本涵盖了卓越工程技术人才培养所涉及的有关专业的公共基础课、专业基础课、专业课、专业特色课等；在编写出版上采取突出重点、以点带面、有序推进的策略，成熟一本出版一本。希望大家在教材的编写和使用过程中，积极提出意见和建议，集思广益，不断改进，以期经过不懈努力，形成一套参与度与认可度高、覆盖面广、特色鲜明、有强大生命力的优秀教材。

江苏省教育厅副厅长 丁晓昌

2012 年 8 月

前 言

线性代数是高等院校非数学专业理工类、经管类专业的一门重要基础课程，是学习后继课程及进行科学理论研究与实践的数学基础，也是全国硕士研究生入学统一考试数学一、数学二、数学三的必考科目之一，其重要性不言而喻。线性代数具有较强的逻辑性和抽象性，但是现阶段国内高等院校实际课堂教学的课时一般较少，为更好地帮助学生学习线性代数课程，编者精心组织编写了本书。

本书是按照教育部提出的高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的精神，根据教育部高教司颁布的本科非数学专业理工类、经济管理类《线性代数课程教学基本要求》，参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试理、工、经管类数学考试大纲，并汲取近年来南京信息工程大学线性代数课程教学改革实践的经验，借鉴国内外同类院校教学改革的经验编写而成的。编写本书的目的主要有两个：一是帮助读者快速掌握课程知识，顺利通过学校组织的考试；二是借助精心选取的例题和历年考研真题，为有志攻读研究生的读者打下基础。

本书的特色有以下几方面：

知识网络 以图表形式简单列出每章的知识框架，对本章的基本概念、定理、公式与结论一目了然，便于总体把握。

教学大纲要求 根据教育部高教司颁布的本科非数学专业理工类、经济管理类《线性代数课程教学基本要求》，对每章节各个知识点以了解、理解、掌握分类，读者学习时对各个知识点的重要性可以做到心中有数。

重点、难点 梳理容易混淆的概念，突出重点、难点，总结常用的、重要的解题方法与技巧，以便读者加深对基本概念的理解。

内容提要 按照体系详细归纳了每节的概念、定理、性质与结论，特别注重性质之间联系的总结，在关键的概念、原理和性质后面都进行了注解，条理清晰，便于对知识体系全面、透彻地理解、掌握。

典型例题 本部分题目是考察对基本概念、基本理论和基本计算的掌握，归纳了常见的题型和解题技巧，给出了规范、详尽的解答，力求简明扼要，有些

题目给出了多种解法。通过这些题目的练习，读者将逐步掌握线性代数的基本内容。

习题拓展 对于学有余力的读者或者有志攻读研究生的读者，本部分习题可以加深概念、定理和理论的理解和应用，通过本部分题目的研究、练习，读者可以深入理解线性代数的知识。

考研真题 选取了近十余年的硕士研究生入学考试数学一、数学二、数学三历年真题，这些题目大多数是知识的综合应用，通过对这些题目的研究、练习，读者将逐步建立灵活应用所学知识分析问题、解决问题的能力。

本书由孟祥瑞、顾文亚、吴亚娟、许志奋等编写，由孟祥瑞统稿。刘红爱、咸亚丽、刘慧、常瑾瑾等都提出了宝贵的修改意见。南京信息工程大学硕士生导师王顺凤教授仔细审阅了全部书稿，提出了宝贵的修改意见。

江苏大学出版社为本书的编写和出版付出了极大的辛劳，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者的水平所限，书中不妥之处在所难免，敬请广大读者、各位专家和同行批评指正。

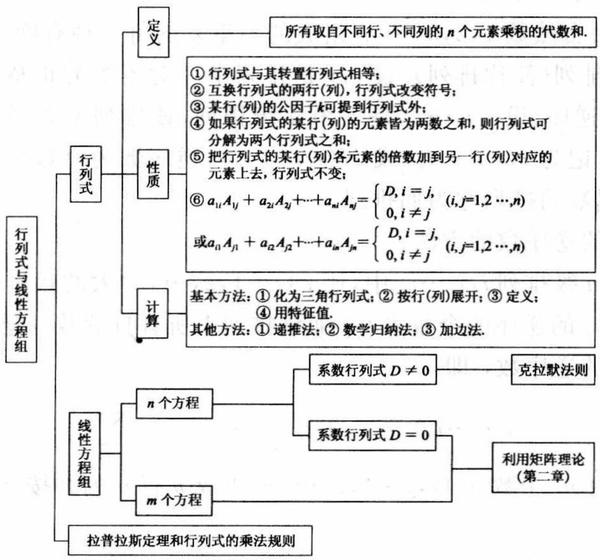
目 录

第一章

行列式

行列式是线性代数中的一个基本概念，它不仅是讨论线性方程组理论的有力工具，而且在求逆矩阵、求矩阵的秩、判断向量组的线性相关性、求矩阵的特征值及判断二次型的有定性等方面都应用到.

知识网络



教学大纲要求

(1) 会求 n 级排列的逆序数；

(2) 理解 n 阶行列式的定义；

(3) 掌握行列式的性质，并且会正确使用行列式的有关性质进行化简、计算行列式；

(4) 掌握行列式按行(列)展开定理;

(5) 掌握克拉默法则,并判定线性方程组解的存在性、唯一性及求方程组的解;

(6) 了解拉普拉斯定理和行列式的乘法规则.

重点、难点

应用行列式的性质和按行(列)展开定理计算行列式是本章的重点.要求熟练、正确地计算低阶行列式,会计算部分特殊形式的 n 阶行列式.

n 阶行列式的定义、行列式的计算方法和技巧是本章的难点.行列式的计算方法除了利用行列式的性质化为三角行列式和按行(列)展开公式使行列式降阶的基本方法外,还有根据行列式的不同特点采取的特殊的方法,如递推法、数学归纳法、加变法(升阶法),以及利用范德蒙行列式的结论等.

内容提要

1. 行列式的定义

定义 1 由自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的不重复的每一种有确定次序的排列,称为一个 n 级排列(简称排列).设 i,j 是排列中一对不等的正整数,若 $i>j$,则称 (i,j) 为一对逆序.设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是一个 n 级排列,该排列所含逆序总数称为该排列的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 或 $N(i_1i_2\cdots i_n)$,逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

计算排列的逆序数的方法:

设在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,比 $i_t(t=1,2,\cdots,n)$ 大的且排在 i_t 前面的数共有 t_i 个,则 i_t 的逆序的个数为 t_i,而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数,即

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i.$$

定义 2 由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列并按一定规则进行运算,记作

$$D=|a_{ij}|_{n\times n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

称为 n 阶行列式,这里数 a_{ij} 称为行列式的元素,$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.运算规则为所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积

$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的代数和，各项的符号是：当该项各元素的行标按自然顺序排列后，若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号；奇排列则取负号. 其中$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对所有$n$级排列$j_1j_2\cdots j_n$求和.

注意:① n阶行列式是$n!$项的代数和，且冠以正号的项和冠以负号的项(不算元素本身所带的符号)各占一半.

② $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的符号为$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$(不算元素本身所带的符号).

③ 一阶行列式$|a|=a$,不要与绝对值记号相混淆.

④ 二阶、三阶行列式满足对角线法则,但四阶及以上阶行列式不满足对角线法则.

2. 行列式的性质

(1) 把行列式转化为特殊行列式的性质

定义 3　将行列式D的行与列互换后得到的新行列式,称为D的转置行列式,记为D^{T}或D',即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\text{则 } D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式与其转置行列式相等,即$D=D^{\mathrm{T}}$.

注意:由性质1知,行列式中的行与列具有相同的地位,行具有的性质,它的列也同样具有.

性质 2　交换行列式两行(列),行列式改变符号.

交换第i,j行(列)记号为$r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$.

推论　若行列式中有两行(列)的对应元素相同,则此行列式为零.

性质 3　用数k乘行列式的某一行(列),等于用数k乘此行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD.$$

第i行(列)乘以k,记为$r_i\times k(c_i\times k)$.

推论 1　行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的

外面.

推论 2 行列式中若有两行(列)元素对应成比例,则此行列式为零.

性质 4 行列式的某行(列)的元素皆为两数之和时,行列式可分解为两个行列式.例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)对应的元素上,行列式不变.

例如,以数 k 乘第 j 行加到第 i 行记作 r_i+kr_j,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i+kr_j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i\neq j).$$

(以数 k 乘第 j 列加到第 i 列,记作 c_i+kc_j)

(2) 行列式按行(列)展开的性质

定义 4 把行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 所在的第 i 行元素和第 j 列元素去掉,剩下的 $n-1$ 行和 $n-1$ 列元素按照元素原来的排列次序构成的$n-1$ 阶行列式,称为 D 中元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij},即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

性质 6 行列式等于它的任一行(列)元素与其对应的代数余子式乘积之和;行列式的某行(列)元素与另一行(列)元素的代数余子式乘积之和为零,即设 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$,A_{ij} 是元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 关于 D 的代数余子式,则

① $a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D,当\ i=j,\\0,当\ i\neq j\end{cases}(i,j=1,2,\cdots,n)$;

② $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D,当\ i=j,\\0,当\ i\neq j\end{cases}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

注意:设 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$,A_{ij} 为 a_{ij} 关于 D 的代数余子式,则

① $b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+\cdots+b_nA_{in}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{(i-1)1}&a_{(i-1)2}&\cdots&a_{(i-1)n}\\b_1&b_2&\cdots&b_n\\a_{(i+1)1}&a_{(i+1)2}&\cdots&a_{(i+1)n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$;

② $c_1A_{1j}+c_2A_{2j}+\cdots+c_nA_{nj}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1(j-1)}&c_1&a_{1(j+1)}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&\cdots&a_{2(j-1)}&c_2&a_{2(j+1)}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n(j-1)}&c_n&a_{n(j+1)}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$.

3. 重要公式

① 对角行列式:$\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

② 上三角行列式:$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

③ 下三角行列式:$\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

④ 副对角行列式：$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2(n-1)} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$.

⑤ 范德蒙行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$.

⑥ 分块上三角行列式：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为方阵.

⑦ 分块下三角行列式：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为方阵.

⑧ 分块副对角行列式：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{m+n}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵.

⑨ 分块对角行列式：$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|$，其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵.

⑩ 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，λ 为常数，则 $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$.

⑪ 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

⑫ 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

4. 克拉默(Cramer)法则

定义 5 含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

称为 n 元线性方程组. 当其右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零时，线性方程组(1)称为非齐次线性方程组；当 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为零时，即