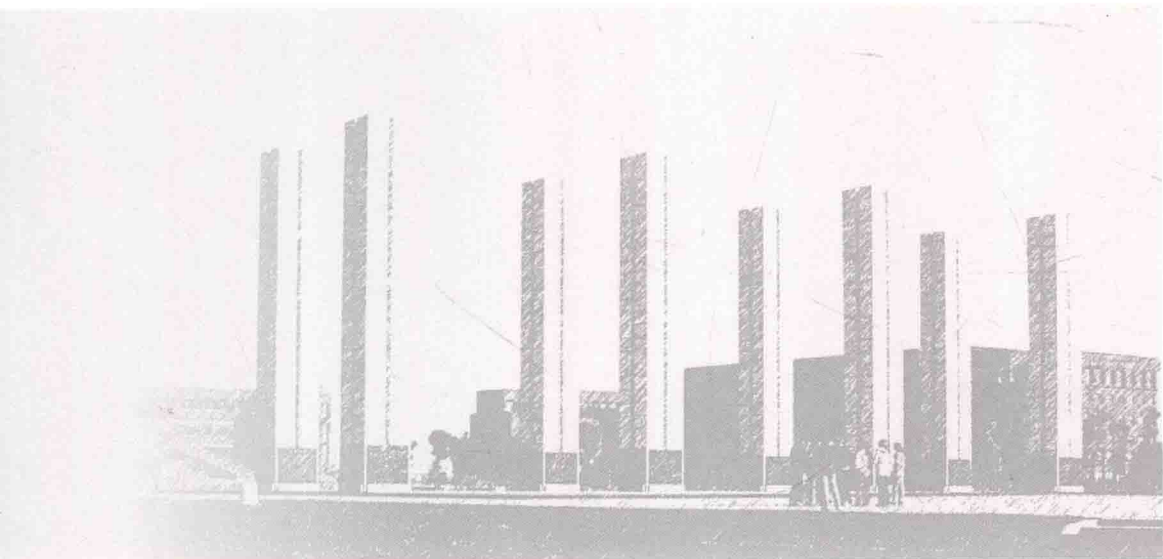


高斯的内蕴微分几何学与非欧几何学思想之比较研究

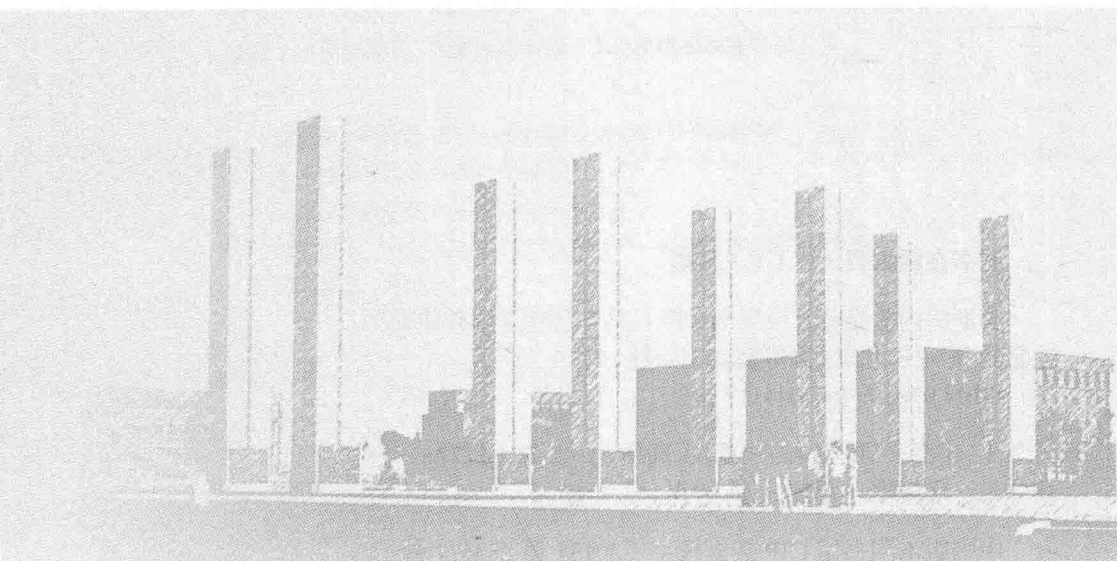


陈惠勇 著

A COMPARATIVE RESEARCH ON THE
THOUGHT OF GAUSSIAN INTRINSIC
DIFFERENTIAL GEOMETRY AND
NON-EUCLIDEAN GEOMETRY

高等教育出版社

高斯的内蕴微分几何学与非欧几何学思想之比较研究



陈惠勇 著

A COMPARATIVE RESEARCH ON THE
THOUGHT OF GAUSSIAN INTRINSIC
DIFFERENTIAL GEOMETRY AND
NON-EUCLIDEAN GEOMETRY

高等教育出版社·北京

图书在版编目(CIP)数据

高斯的内蕴微分几何学与非欧几何学思想之比较研究 /
陈惠勇著. -- 北京: 高等教育出版社, 2015. 12
ISBN 978-7-04-044117-8

I. ①高… II. ①陈… III. ①高斯, J. C. F. (1777~
1855) - 几何学 - 思想 - 研究 IV. ①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 253577 号

策划编辑	李华英	责任编辑	李华英	封面设计	李卫青	版式设计	于婕
插图绘制	邓超	责任校对	高歌	责任印制	毛斯璐		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	三河市骏杰印刷有限公司	网上订购	http://www.landrace.com
开 本	787 mm × 1092 mm 1/16		http://www.landrace.com.cn
印 张	12	版 次	2015年12月第 1 版
字 数	180千字	印 次	2015年12月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 44117-00



约翰·卡尔·弗里德里希·高斯
(Johann Carl Friedrich Gauss)
1777年4月30日—1855年2月23日

第 1 章 绪论	1
1.1 研究目的和方法	1
1.2 研究综述	2
1.3 问题的提出	12
参考文献	13
第 2 章 高斯内蕴微分几何学的渊源	15
2.1 高斯以前的微分几何学	16
2.2 高斯内蕴微分几何学的起源	18
2.3 小结	26
参考文献	27
第 3 章 高斯的非欧几何学研究	29
3.1 背景	29
3.2 高斯以前的非欧几何学研究	30
3.3 高斯的非欧几何学研究	34
3.4 高斯的非欧几何学研究之核心问题	41
3.5 非欧几何学的历史疑问	43
参考文献	45
第 4 章 高斯内蕴微分几何学的创立	47
4.1 哥本哈根获奖论文及其对内蕴微分几何学的贡献	47
4.2 内蕴微分几何学的重大发现	53
4.3 关于“绝妙定理”的证明	56
4.4 高斯的手稿——未完成的论文（1825 年）	58
4.5 提交给皇家学会的报告和《关于曲面的一般研究》的发表	61
参考文献	63
第 5 章 高斯内蕴微分几何学的基本思想——《关于曲面的一般研究》之研究	65
5.1 曲面论的预备知识（第 1~3 节）	66
5.2 曲面的参数表示（第 4~5 节）	68
5.3 高斯映射与高斯曲率和全曲率（第 6 节）	70
5.4 高斯方程与高斯的“绝妙定理”（第 7~12 节）	72
5.5 内蕴微分几何学的计划（第 13 节）	75
5.6 测地线与高斯引理（第 14~16 节）	77

5.7 角度的变分与列维 - 奇维塔平行移动 (第 17 ~ 18 节)	79
5.8 高斯 - 博内定理 (第 19 ~ 20 节)	81
5.9 角度比较定理与面积比较定理 (第 21 ~ 29 节)	85
5.10 小结	90
参考文献	91
第 6 章 高斯的内蕴几何学思想及其意义	93
6.1 直线与测地线	93
6.2 平行公设的否定与弯曲空间概念的产生	95
6.3 第一基本形式与弯曲空间的度量	97
6.4 曲面的内蕴度量与曲面在空间的形状	99
参考文献	102
第 7 章 高斯非欧几何学思想的实现途径与高斯的内蕴微分几何学	105
7.1 高斯的内蕴微分几何学思想与黎曼的几何学构想	106
7.2 常数 (绝对长度单位) 高斯曲率曲面与非欧几何学的实现	108
7.3 量地与测天——高斯非欧几何学的验证	112
7.4 高斯非欧几何学研究的核心问题之解决	115
参考文献	117
第 8 章 高斯 - 博内定理的历史发展及其意义	119
8.1 经典的高斯 - 博内定理与冯·迪克的贡献	119
8.2 高斯 - 博内定理在高维的推广与证明——从霍普夫到陈省身	121
8.3 高斯 - 博内定理与现代数学的关联一瞥	124
参考文献	126
附录 1 高斯论保形表示——将给定凸曲面投影到另一给定曲面而使最小部分保持相似的一般方法 (哥本哈根, 1822 年)	129
附录 2 关于曲面的一般研究	141
结束语	181
致谢	183

第 1 章 绪论

1827 年 10 月 8 日,德国数学家、物理学家和天文学家约翰·卡尔·弗里德里希·高斯(Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 年 4 月 30 日—1855 年 2 月 23 日)向哥廷根皇家学会提交了一篇历史性的论文《关于曲面的一般研究》(disquisitiones generales circa superficies curves)及论文的摘要(该论文的摘要刊登于 *Gottingische Gelehrte Anzeigen* 1827 年第 177 期 1761—1768 页)([1]),高斯在这一伟大的著作中精辟地阐述了微分几何学的一系列全新的重要概念和重要定理,以及展开内蕴微分几何学的重要计划,建立了由曲面的第一基本形式所决定的几何学——内蕴微分几何学,从而开创了微分几何学的新时代.

高斯的这项工作,实际上创立了数学研究的一个崭新的领域,并且直接导致了黎曼(G. F. Bernhard Riemann, 1826—1866)的工作以及广义相对论的数学基础.高斯在这里发展了曲面的理论:高斯曲率(或总曲率)在等距变换下不变性的原理(高斯的绝妙定理)、保形映射的微分(高斯映射)、测地三角形的角度以及小测地三角形的内角和定理(高斯-博内定理)等.正是在这个意义上,我们说高斯奠定了微分几何学的基础,标志着微分几何学作为一门独立的学科诞生了.

然而,比他这篇关于三维空间中曲面的微分几何学的决定性论述所作出的贡献更为重要的是,高斯提出了一个全新的概念,即一张曲面本身就是一个空间.因而,高斯把欧氏几何推广到曲面上“弯曲”的几何学.这个概念(流形概念的肇始)后来被黎曼所推广,正是高斯的工作激励着黎曼 1854 年的《关于几何基础的假设》的产生,黎曼几何学就此诞生,从而在非欧几何学的研究中开辟了新的远景([2]).黎曼几何学经过后继者一个多世纪的工作,已经成为 20 世纪几何学的主流.因此,高斯在这一工作中所隐含的实际上正是后来为鲍耶、罗巴切夫斯基和黎曼所正式发展的非欧几何学.

1.1 研究目的和方法

众所周知,在高斯创立内蕴微分几何学的时期,他已经发现了非欧

几何学. 因此,在几何学发展的历史上,一个历史性的疑问一直以来在数学史家的头脑中挥之不去,那就是:为什么高斯没有发表他的非欧几何学研究? 对此众说纷纭. 笔者也带着同样的疑问,并将高斯的几何学思想(内蕴微分几何学思想与非欧几何学思想)视为一个完整的思想体系,力求从高斯创立内蕴微分几何学的整个背景中去寻求一个比较合理的历史解释. 这是笔者关于高斯几何学思想的一个基本认识,也是本研究的基本出发点.

由此,很自然地提出以下的问题:高斯的“弯曲”的空间观念是如何产生的? 他是如何突破当时占统治地位的康德(Immanuel Kant, 1724—1804)的空间哲学观念的束缚,并最终获得其哲学观念的变革的? 他又是在怎样的数学思想背景下创立内蕴微分几何学的? 他正在创立的内蕴微分几何学与他已经发现的非欧几何学之间有什么样的内在的逻辑联系? ……

所有这些问题,加之作者本人对于几何学方面的兴趣,这一切促使作者深入地思考并成为作者选题的直接动机. 本书运用数学史比较研究和文献分析研究方法,通过对已有文献进行分析、比较、考察和综合研究,旨在揭示出高斯的内蕴微分几何学思想和他的非欧几何学研究之间的内在联系.

1.2 研究综述

在本节中,我们将分以下几个方面考察与本课题有关的国内外研究现状和相关领域中已有的研究成果:一是考察关于高斯内蕴微分几何学方面的已有研究工作;二是考察前人关于高斯非欧几何学方面的已有研究文献;第三则要考察一般数学史或数学思想史著作关于本课题的研究;第四方面考察关于高斯的传记及生平的有关研究文献.

1.2.1 关于高斯内蕴微分几何学方面的已有研究

(1) Michael Spivak 的《微分几何综合导引》

首先我们要考察的是 Michael Spivak 的名著《微分几何综合导引》(A Comprehensive Introduction to Differential Geometry) ([3]). 该著作最早出版于 1970 年,共五大卷,它是一本关于现代微分几何学的非常有趣的书. 作者不仅论述了微分几何学的各个主要方面,而且难得的是,他对微分几何学发展的历史上两个最重要的里程碑——高斯和黎曼的奠基性的著作做了比较详细的阐述. 下面,我们分析该文献关于高

斯内蕴微分几何学思想的论述.

在第二卷第3章“空间曲面的曲率”(The curvature of surfaces in spaces)中,作者分两个部分:A 怎样读高斯;B 高斯的曲面理论.在A部分,Michael Spivak 首先指出高斯1827年的论文《关于曲面的一般研究》是微分几何学历史上最重要的工作,接着对高斯上述论文中的第1~20节的内容用现代的语言做了精要的阐述和解释.

在B部分,Spivak 用现代微分几何的观点和语言,着重论述了高斯的曲面理论.分为八个小节和一个补遗,分别是:高斯映射;高斯曲率;魏因加吞映射;第一和第二基本形式;高斯的绝妙定理;曲面的测地线;测地极坐标系中的度量;测地三角形上曲率的积分以及补遗:Bertrand公式,Puiseux公式,Diquet公式.因而,作者比较全面地阐述了高斯内蕴微分几何学的基本思想和内容.

不知是什么原因,Spivak 对高斯上述论文的第21~29节内容完全忽视了.但是,我们知道,高斯的论文《关于曲面的一般研究》的第21~29节内容,几乎占整篇著作的三分之一的篇幅.高斯为什么要费如此大的篇幅于他的“一般研究”之中?当我们把高斯的内蕴微分几何学思想与他的非欧几何学研究联系起来考察时,也许可以看出其中的奥秘所在(我们将要在后文中重点论述这种内在的联系).难道这是Spivak 的疏忽?

高斯-博内定理被高斯自己誉为“曲面理论中最精美的定理”([1]).高斯不愧是数学家之王.从微分几何学的整个发展历史来看,高斯-博内定理就像一条红线贯穿于分析、几何和拓扑之间,更是将各种非欧几何学统一为一体,使欧氏几何与非欧几何的内在联系得以揭示出来.

Michael Spivak 在其著作中不惜笔墨,系统地论述了高斯-博内定理及其发展的极其广泛的内容.在第三卷第6章“高斯-博内定理和相关课题”,Spivak 论述了([4]):曲面上正交活动标架的联络形式和在平行移动下角度的变化;多边形区域上 KdA 的积分;高斯-博内定理和一些结果;曲面的总的绝对曲率;极小总绝对曲率的曲面;曲线的总曲率;芬切尔定理和法里-米尔诺定理;以及两个补遗:具有常数负曲率的紧曲面,法映射度.

特别的是,Michael Spivak 在其著作的第五卷第13章(最后一章)中([5]),以相当大的篇幅论述了一个非常重要的主题:广义高斯-博内定理和它对于人类知识的意义.在这一章中,Spivak 认为高斯-博内定理是微分几何学中最著名的定理之一,并概述了高斯-博内定理从

高斯(1827)到陈省身给出其内蕴证明(1944)的简要的历史评述.接下来分十二节分别论述了:从上的算子;格拉斯曼丛和万有丛;普法夫系统;联络的欧拉类的定义;示性类的概念;齐性空间的上同调;经典不变量理论、不变性问题;定向格拉斯曼上同调;韦伊同态;复丛以及有关的应用等非常广泛的领域.由此可知高斯-博内定理在微分几何学的历史发展中的重要地位和意义.

(2) Peter Dombrowski 的专题论文

在作者查阅的所有文献中,对高斯的内蕴微分几何学思想及其历史进行专题研究的文献,最详细最全面的当属 Peter Dombrowski 于 1977 年 4 月 24 日在高斯的出生地不伦瑞克(Brunswick)所做的专题报告《微分几何学——在高斯的〈关于曲面的一般研究〉发表 150 年后》(Differential Geometry - 150 Years After CARL FRIEDRICH GAUSS' *disquisitiones generales circa superficies curvas*).该文是为纪念高斯诞生 200 周年暨高斯《关于曲面的一般研究》发表 150 周年而做的专题报告,刊登于法国数学会杂志 *Astérisque* 1979 年第 62 卷.并且在该专辑中,同时刊登了高斯的《关于曲面的一般研究》以及其论文摘要的原文和英文对照(其英文选自 A. Hildebeitel 和 J. Morehead 于 1902 年的翻译).

Peter Dombrowski 在该文中比较详细地研究了高斯《关于曲面的一般研究》的内容、有关的历史以及 150 年(1827—1977)来微分几何学的一些重要的主题、结果和发展等广泛的课题.

在高斯的内蕴微分几何学思想的研究方面,该文献是笔者的重要参考文献.但是,由于该文献仅研究高斯的内蕴微分几何学思想及其有关问题,而并未涉及高斯的非欧几何学研究,更未研究高斯的内蕴微分几何学与非欧几何学之间的内在联系,因而,笔者认为 Peter Dombrowski 的专题论文对于全面理解高斯的几何学思想仍存在一些不足之处.

1.2.2 关于高斯非欧几何学方面的已有研究

以下我们考察关于高斯非欧几何学方面的已有研究文献.众所周知,高斯生前没有公开发表他的非欧几何学研究.因此,对于高斯的非欧几何学研究,后人都是从高斯的通信、笔记以及他的未发表的论文中,寻找高斯发现非欧几何学的思想轨迹.这方面的最重要的原始文献是《高斯全集》中有关的史料,其次则是关于非欧几何学的研究文献.

(1) Roberto Bonola 的《非欧几何学》

对非欧几何学历史的研究,最具权威的著作当数 Roberto Bonola 的

《非欧几何学——关于其发展的批评与史论研究》(Non-Euclidean Geometry—A Critical and Historical Study of its Developments). 该书的德文版最早出版于1908年,英文版(由H. S. Carslaw翻译)最早出版于1911年. 该著作论述了从欧几里得平行公理的试证、非欧几何学的先驱、非欧几何学的创立直到非欧几何学后来的发展等广泛的领域. 另外值得一提的是,该著作还包含了五个内容丰富的附录,以及鲍耶(János Bolyai, 1802—1860)创造非欧几何学的论文《绝对空间的科学》和罗巴切夫斯基(Nicholas Lobachevski, 1792—1856)创造非欧几何学的论文《平行线理论的几何学研究》的全文英文翻译(均由George Bruce Halsted博士翻译,1891年).

我们特别指出的是,作者在第五章“非欧几何学后来的发展”([7], 129—180页)中论述了微分几何学与非欧几何学这一专题. 将微分几何学与非欧几何学之间的内在联系置于非欧几何学的历史中予以考察,这为我们对高斯的微分几何学思想与非欧几何学做比较考察,提供了非常有意义的借鉴和启迪.

(2) B. A. Rosenfeld 的《非欧几何学的历史》

另一本关于非欧几何学历史的专著就是B. A. Rosenfeld的《非欧几何学的历史——几何空间观念的演化》(A History of Non-Euclidean Geometry—Evolution of the Concept of a Geometric Space). 该书的俄文版出版于1976年(英文版由Abe Shenitzer翻译, Springer出版社出版, 1988年),是为了纪念1826年2月23日,俄国数学家罗巴切夫斯基所做的关于他的非欧几何学发现的著名演说150周年.

该书的作者在第6章“罗巴切夫斯基几何学”([8], 206—246页),对非欧几何学的发现、发展以及确认等一系列问题,都做了比较全面的分析. 涉及罗巴切夫斯基、鲍耶、高斯、沃切特、施韦卡特、陶里努斯、贝尔特拉米、凯莱、F. 克莱因、庞加莱等数学家在非欧几何学方面的工作和贡献. 其中的一节“高斯的笔记和信件”,论述了高斯的非欧几何学研究. 当然,作者仍停留在基本事实的叙述上([8], 214—217页).

另外,该著作的一个突出的特点是以空间的曲率为线索,论述了微分几何学发展历史的广泛的领域. 在该书第8章“空间的曲率”([8], 280—326页),作者讨论了从欧拉著作中的曲面的曲率和内蕴微分几何学、高斯的曲面的内蕴微分几何学等,一直到黎曼的几何学以及广义相对论等广泛的课题. 因此,实际上作者论述了非欧几何学的发展与确认的微分几何学途径.

通观整篇著作,我们可以看到:作者并没有将高斯的非欧几何学发

现和他的内蕴微分几何学思想联系起来并加以比较考察和研究,当然也没有指出它们之间的内在联系.但是,从全书的逻辑上看,作者事实上是把内蕴微分几何学的思想纳入整个非欧几何学历史发展之中的.实际上,作者深刻地揭示出这样一个逻辑:只有在内蕴微分几何学发展到比较完善的阶段(即黎曼几何学),特别是,爱因斯坦的广义相对论的创立,我们才能真正认清非欧几何学的本质.

这一逻辑值得我们深思.我们认为对于高斯的几何学思想,也应将其非欧几何学的研究与他所创立的内蕴微分几何学作为一个整体而加以考察,才可能得出比较全面的认识.

(3) 其他的非欧几何学著作

其他的文献,如B. N. 科士青的《几何基础》(中译本由苏步青译,商务印书馆出版,1954年3月)、陈荃民的《非欧派几何学》(商务印书馆发行,民国二十四年六月)等,所持的观点与上述文献基本相同,故不再赘述.

1.2.3 一般数学史或数学思想史著作关于本课题的研究

从数学史或者数学思想史的角度,对高斯的内蕴微分几何学思想以及他的非欧几何学发现进行研究的文献,专著有F. 克莱因(Felix Klein, 1849—1925)的《19世纪数学的发展》、斯托罗依克(D. J. Struik)的《微分几何学历史概略》、M. 克莱因(Morris Kline)的《古今数学思想》等,一般数学史著作有斯托罗依克的《数学简史》、卡茨(Victor J. Katz)的《数学史通论》以及我国著名数学史家李文林的《数学史概论》等.他们都对这一课题做了一定的阐述.我们简要地叙述如下.

(1) F. 克莱因的《19世纪数学的发展》

我们知道,F. 克莱因是19世纪末20世纪初最伟大的数学家之一.他是著名的《爱尔朗根纲领》(1872)的制定者,也是编辑《高斯全集》的指导者.《高斯全集》的出版历时67年(1863—1929),由众多的著名数学家参与,最后是在F. 克莱因的指导下完成的.因而,F. 克莱因关于高斯思想的论述,就具有重要的指导意义.下面,我们分析F. 克莱因在他的专著《19世纪数学的发展》(Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert)中对高斯的几何学思想的论述([11]).

F. 克莱因在他的专著的第1章,分应用数学和纯粹数学两个部分专门讨论高斯的工作.首先是应用数学部分,F. 克莱因将高斯的贡献分为三个方面:天文学(1800—1820)、大地测量学(1820—1830)、物理学

(1830—1840). 这里我们主要分析 F. 克莱因关于高斯在大地测量学方面的研究的论述. 我们知道, 高斯的内蕴微分几何学与大地测量学是密不可分的. F. 克莱因首先回顾了 17、18 世纪由于在确定地球形状方面的纯科学兴趣所激发的大地测量学研究的背景, 并指出所有这些问题都集中在通过测量, 来确定我们的地球的形状究竟是扁平的还是拉长的椭球. F. 克莱因叙述了高斯在大地测量方面的研究工作, 并特别提到两点: 其一是高斯著名的对由 Hohenhagen、Brocken 和 Inselsberg 三座山顶构成的三角形及其相应的测地三角形的测量, 另一点就是由于这些年实际的测量工作而导致的内蕴微分几何学的重大发现(1821—1827), 其标志就是 1827 年发表的《关于曲面的一般研究》.

关于高斯的非欧几何学研究, F. 克莱因指出([11], 16 页):

“但是, 在高斯的这些工作(非欧几何学)里, 我们完全看不到高斯在他的无畏的思想面前退缩. 他与奥伯斯、舒马赫、贝塞尔以及其他人的通信, 连同他的一些未公开发表的论文, 毫无疑问地表明高斯已经掌握了非欧几何学的思想. 虽然关于这个成就高斯一个字也没有发表过, 但是非欧几何的思想, 在他的任何工作里也没有离开过他, 这一点从他的信件中清楚地流露出来.”

接着, 通过对高斯自 1799 年至 1824 年期间同一些数学家的通信、札记以及未发表的论文的分析, F. 克莱因对高斯的非欧几何学研究进行简要的分析和概述. 然而, 我们可以看到, F. 克莱因并未对高斯的非欧几何学研究与其内蕴微分几何学思想之间的内在联系作出更进一步的分析和研究. 后来的数学家和数学史家们关于这一问题的研究始终没有突破这一框架.

(2) 斯托罗依克的《微分几何学历史概略》

著名的数学史家斯托罗依克有名的论文《微分几何学历史概略》(Outline of a History of Differential Geometry), 是他于 1931 年夏至 1932 年冬在麻省理工学院所做的系列讲座. 全文分两期刊登于 ISIS 1933 年第 19 卷 92—120 页和 ISIS 1933 年第 20 卷 161—191 页. 作者分 12 个部分论述了微分几何学从萌芽到产生、一直到 1900 年的微分几何学的历史发展. 其中的第 6 节以高斯为题论述高斯的微分几何学. 首先, 斯托罗依克认为高斯的活动是三重的, 即非欧几何学的发现者、内蕴微分几何学的发明者以及理论测量学家. 同时认为高斯的大地测量的实际

工作是他的所有几何学发现的基础. 我们知道, 高斯的大部分几何学发现都是在 1815 年至 1830 年间完成的. 虽然斯托罗依克在该文中没有讨论高斯的非欧几何学方面的研究, 但是作者认为高斯的非欧几何学研究深刻地影响了他后来的微分几何(见 ISIS 1933 年第 20 卷 161 页). 接下来, 斯托罗依克概要地论述了高斯的曲面理论, 即高斯在其《关于曲面的一般研究》中所建立的内蕴微分几何学的基本思想.

然而, 我们注意到, 斯托罗依克在他的另一本著作《数学简史》(A Concise History of Mathematics) 中, 却并未探讨高斯的非欧几何学研究对其微分几何学的影响及其内在的联系.

(3) M. 克莱因的《古今数学思想》

美国著名的数学史家 M. 克莱因的名著《古今数学思想》被誉为“就数学史而论, 这是迄今为止最好的一本”. M. 克莱因在该书的有关章节中专门论述了高斯的非欧几何学研究(第 36 章第 5 节)和内蕴微分几何学思想(第 37 章第 1、2 节), 其基本观点与我们前面综述的文献的观点基本相同.

M. 克莱因仍然没有把高斯的内蕴微分几何学思想和高斯的非欧几何学研究作为一个统一的整体, 而是分别进行研究的, 并且他的观点也是值得商榷的. 如关于高斯的内蕴微分几何学, 他说道(原版 888 页; 中译本[2], 308 页):

“高斯的工作意味着, 至少在曲面上有非欧几何, 如果把曲面本身看成一个空间的话. 高斯是否看到他的曲面几何学的这种非欧几何学的解释, 那就不清楚了.”

同时, M. 克莱因在关于高斯的非欧几何学研究一节的最后说道: “为了检验欧几里得几何学和他的非欧几何学的应用的可能性, 高斯实际测量了由 Hohenhagen、Brocken 和 Inselsberg 三座山峰构成的三角形的内角之和, 三角形三边为 69 km, 85 km 与 107 km. 他发现内角和比 180° 超出 $14''85$. ……如高斯所认识到的, 这个三角形还小, 又因在非欧几何中, 亏值与面积成正比, 只有在大的三角形中才有可能显示出 180° 与三角和有任何差距.” ([2], 289 页)

然而, 我们知道, 高斯在他的《关于曲面的一般研究》的第 21 ~ 29 节, 正是着力阐述直角三角形(欧氏几何学的)和测地三角形(非欧几何学的)之间的角度比较定理和面积比较定理, 高斯将其“检验欧几里得几何学和他的非欧几何学的应用”的实际地理测量的结果记录于他

的“一般研究”之中,并构成其中的第 28 节的内容. 笔者认为高斯的真正用意如何,应该值得我们深思(本书将在后面详细论述).

可见,M. 克莱因在关于高斯的内蕴微分几何学与非欧几何学思想的内在联系的观点是自相矛盾的.

(4) 一般数学史著作的论述

我们考察的一般数学史著作,有斯托罗依克的《数学简史》、H. 伊夫斯的《数学史概论》和《数学史上的里程碑》、卡茨的《数学史通论》以及我国著名数学史家李文林的《数学史概论》等. 在他们的著作中,关于高斯的内蕴微分几何学思想和高斯的非欧几何学研究的论述,其观点基本上与我们上述文献中的观点相同——都是没有把高斯的内蕴微分几何学思想和高斯的非欧几何学研究作为一个统一的整体,而是分别进行论述,因而也就没有指出它们之间的内在的逻辑联系. 在此,我们不一一加以叙述.

1.2.4 关于高斯传记及生平的研究文献

关于高斯传记及生平的研究文献比较多,我们分析其中有代表性的文献如下:

(1) E. T. 贝尔的《数学大师》

美国数学史家 E. T. 贝尔(Eric Temple Bell, 1883—1960)的名著《数学大师——从芝诺到庞加莱》(Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré)是一本介绍历史上 30 多位数学大师的生平和成就的数学史经典著作. 该书的第 14 章(数学王子——高斯)叙述了高斯的生平和数学贡献. 关于高斯的几何学思想,贝尔主要论述了高斯的微分几何学的贡献,贝尔指出:“但更重要的是,在精确测量一部分大地曲面中出现的问题中,无疑提出了与所有曲面有关的更深刻、更一般的问题. 这些研究将引出相对论的数学. ……从他的研究中产生了微分几何学的第一个伟大的时期.”

接下来,贝尔简要地分析了高斯在他的关于曲面论的著作中关于数学和科学具有重要理论意义的三个问题,即曲率测度、保角映射和曲面的可展性,并比较详细地讨论了高斯在曲面研究中开拓的另一个重要的概念——曲面的参数表示.

关于高斯的非欧几何学研究,贝尔只是提到高斯 12 岁时已经用怀疑的眼光看欧几里得几何基础,到 16 岁时,他已经第一次瞥见了不同

于欧几里得几何的一种几何学。

很明显,由于这是一部数学大师的生平和成就的介绍性的科普著作,所以贝尔没有也不可能对高斯的微分几何学思想和非欧几何学研究做系统的研究。

(2) Tord Hall 的《高斯——伟大数学家的一生》

这是一本非常有趣的传记著作,Tord Hall 在该书中用比较通俗的手法,论述了高斯一生的重要贡献及其生活历程.全书分为家世与环境、孩提时代、大学时代、天文学、结婚与升等、观察误差与概率计算、测绘地图、曲面论、非欧几何学、高斯在物理方面的研究工作、函数论与算术剩余、高斯的其他传略等 12 个部分. Tord Hall 对高斯的主要数学贡献,如他在大学时代所做的正十七边形的研究、代数基本定理以及数论方面的研究,都有比较详细的论述,特别是对高斯的正十七边形的研究,还以附录的形式全文刊载高斯的证明。

关于高斯的曲面论(内蕴微分几何学),Tord Hall 认为“他在曲面论上的研究成果,树立了建筑在一般相对论上的 20 世纪的基石”.而对于高斯的非欧几何学研究,特别是对于高斯的非欧几何学研究与他的内蕴微分几何学之间的关系,Tord Hall 也有独到的见解,并指出:“曲面论那篇文章,确实只谈到欧氏几何学,从中找不出任何迹象,支持上述的揣测.不过,从第 112 页上所引的他给陶里努斯的信中看来,有点那个意思.高斯是否真的企图用他那个大三角形为实证,来发现宇宙空间与欧氏几何学的偏差呢?我们不无疑问.”([19],116 页)

从这里我们可以看出,已有学者注意到并隐含地指出了高斯的内蕴微分几何学思想与他的非欧几何学研究之间的这种内在的联系.这里有这样一个问题,也是后来的数学家的揣测,即高斯的这些测量还有额外的目的,那就是“检验由光线造成的三角形 HBI 的内角和,和欧几里得的值 180° 是否有偏差”.([19],116 页)

总的来说,Tord Hall 的这本著作所提出的疑问,是值得我们深入思考的.当然,作为一本传记体裁的专著,他不可能对高斯的几何学思想的这种内在的本质做深入研究.而这也就给笔者的研究以深刻的启迪,并留下广阔的研究空间。

(3) W. K. Bühler 的《高斯传记》

W. K. Bühler 的《高斯传记》(Gauss—A Biographical Study)是作者为纪念高斯诞生 200 周年(1777—1977)、高斯逝世 125 周年(1855—1980)而作的传记体裁的研究文献,该书由著名的 Springer 出版社于

1981年出版。

该书分15章,以高斯的生平和学术为线索,论述了高斯从童年一直到逝世的整个一生的学术及生活的各个方面.书中还提供了三个有价值的附录:高斯全集的编辑、二手文献的考察和高斯著作的目录,这对于了解高斯的工作以及相关的研究是一个很好的导引。

下面我们考察 Böhler 关于高斯的几何学思想的论述.该书的第9章“大地测量学与几何学”([20],95—109页),Böhler 对高斯在大地测量学和微分几何学方面的思想都有比较充分的论述,并且涉及高斯的非欧几何学研究,其基本观点与前述的文献并无二致。

但是,有两处值得提及:一是在该书第102页中,Böhler 指出:“正如我们看到的,在他的大地测量工作的这段时期中,高斯在非欧几何学方面的兴趣又被重新点燃.在大地测量与几何基础之间存在一些(虽然不是直接的)联系,同样的联系也存在于高斯关于微分几何学与保形映射方面的工作中,这两方面的工作实际上都是由于大地测量所引起的并且本质上是由大地测量所影响的。”接下来,Böhler 特别提到高斯的两篇重要的论文,即1822年的“哥本哈根获奖论文”和1827年的《关于曲面的一般研究》。

另一点我们必须提到的是,该书的第106页中,Böhler 提到了高斯测量由三座山峰构成的大测地三角形作为他检验其理论的例证,并引用了高斯于1827年3月1日给奥伯斯的信,其中高斯说道:

“在实际当中,这(指地球表面测地三角形的不同角的修正值的差异)当然一点也不重要,因为它对于地球上可以测量的大三角形来说是微不足道的;然而,科学的尊严要求我们必须清楚地理解这个不等量的本质。”(注:粗体为笔者所加)

之后,Böhler 感到非常奇怪和不解地说道:“非常奇怪的是,他(高斯)仅在其发表的论文中以隐蔽的方式提到这一考虑。”([20],106页)

实际上,当我们将高斯的内蕴微分几何学与非欧几何学研究联系起来思考,并深入地分析高斯创立内蕴微分几何学的思想轨迹,我们将会发现高斯在其“一般研究”中的真正用意.也许,这就不难理解并完全可以解开 Böhler 先生的不解和奇怪了。

(4) 国内学者对高斯的生平和成就的研究

国内学者对数学家的思想方法及生平传记的研究,最具代表性的文献,当数由吴文俊先生主编的《世界著名数学家传记》(科学出版社,