



当代
杰出青年
科学文库

非结构网格生成： 理论、算法和应用

Unstructured Mesh Generation:
Theories, Algorithms and Applications

郑 耀 陈建军 著



科学出版社

当代杰出青年科学文库

非结构网格生成： 理论、算法和应用

Unstructured Mesh Generation:
Theories, Algorithms and Applications

郑 耀 陈建军 著

国家杰出青年科学基金项目 (No. 60225009)

国家自然科学基金重点项目 (No. 11432013)

资助



科学出版社

北 京

内 容 简 介

网格生成是一类偏微分方程数值求解的前处理步骤,它研究如何将给定的几何区域离散成几何单元的组合。鉴于网格生成对数值模拟的重要性及其自动化方法的复杂性,它逐渐吸引了各领域众多有深厚功底的研究人员的关注,并不断从计算几何和计算机图形学等领域吸取养分,从而已发展成为一个独立的研究领域。

本书重点介绍作者二十多年来在网格生成理论、算法和应用等方面取得的相关研究成果,内容包括 Delaunay 网格生成、参数曲面网格生成、前沿推进网格生成、单元尺寸及几何自适应网格生成、六面体网格生成、并行网格生成以及相应的前处理软件系统。系统性强,内容新颖。

本书主要面向计算科学与工程、航空航天、机械工程等领域,部分技术可拓展应用于计算机图形学、计算机视觉、可视化和地理信息系统等领域,可供相关科研人员、工程技术人员,以及高等院校和科研单位的研究生与高年级本科生参考。

图书在版编目(CIP)数据

非结构网格生成:理论、算法和应用/郑耀,陈建军著. —北京:科学出版社,2016.3

(当代杰出青年科学文库)

ISBN 978-7-03-047283-0

I. ①非… II. ①郑… ②陈… III. ①网格—研究 IV. ①TP393

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 025428 号

责任编辑:余 丁 闫 悦 / 责任校对:蒋 萍

责任印制:张 倩 / 封面设计:陈 敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 3 月第 一 版 开本:720×1 000 1/16

2016 年 3 月第一次印刷 印张:18 插页:6

字数:344 000

定价:118.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

序

从 1965 年第一次出现“有限元”这个名词,到 20 世纪 70 年代美国第一个有限元结构分析系统 SAP 问世,到今天已有数十年的时间。几代人在这一方面做了艰苦卓绝的努力,已经形成了若干国际上著名的大型计算力学系统,为科学技术的发展和工程应用做出了不可磨灭的贡献。与国际计算力学软件相比,我国计算力学软件的发展规模及水平仍然有很大的差距。造成这一落后局面有政策、体制、营销、人才和技术等多方面的因素。从技术上看,前后处理功能薄弱、图形交互能力跟不上用户的需求也是重要因素之一。

我国计算科学与工程领域的知名学者郑耀教授长期从事计算科学与工程的理论、方法和软件技术的研究。他曾在英国威尔士大学斯旺西分校工程中心数值方法研究所(为纪念有限元数值方法研究的前驱者之一辛克维奇教授,已改名为英国斯旺西大学辛克维奇计算工程中心)学习工作了 8 年时间,后在美国国家航空航天局(National Aeronautics and Space Administration, NASA)格伦研究中心任高级研究科学家。2002 年回到浙江大学工作后,他带领团队开展高性能自主知识产权计算力学软件高端数字样机系统(High End Digital Prototyping, HEDP)的研发工作,并将它应用到航空航天等工程实践中。陈建军副教授 2003 年起在郑耀教授指导下攻读博士学位,研究非结构网格生成及其并行化方法,并于 2012 年至 2014 年在英国辛克维奇计算工程中心访问进修,研究工作曾获得国家自然科学基金“计算力学软件”专项的持续资助。

本书是 HEDP 的图形化前处理系统 HEDP/PRE 部分研制及应用成果的深入介绍和展示,系统性强,内容新颖,且大多数成果已在多个领域的数值模拟应用实践中得到验证和完善,对类似软件系统的实现具有很好的参考价值。书中每章除包含重要的理论和算法内容外,还提供一个或多个作者设计和实现过的程序范例,理论和实践互相验证,这样一种论述方式对于加深读者对非结构网格生成算法的理解大有裨益。希望本书的出版,能在我国进一步推动包含网格生成在内的计算力学支撑技术的研究和教学,吸引更多具有交叉学科背景的人才参与到自主知识产权计算力学软件的研发工作中,以尽快改变我国计算力学软件行业长期受制于人的不利局面。

袁明武

2015 年 12 月 6 日

于北京大学

前 言

通过建立合理的模型，很多物理现象的模拟可归结为偏微分方程的求解。由于求解区域、边界条件及材料特性等因素的影响，这些方程通常无法利用解析的方法来求解，只能退而求其次，结合计算机技术进行数值求解。网格生成是一类偏微分方程数值求解的前处理步骤，它研究如何将给定的几何区域离散成几何单元的组合。根据单元拓扑是否具有规律性，网格可分为结构和非结构两类。相比结构网格，非结构网格能更好地适应复杂几何形状和实施单元疏密变化，其生成方法的自动化程度及自适应计算能力都更高，在工程分析和科学计算中的应用受到越来越多的重视。

网格生成在整个数值模拟过程中的地位极其重要。首先，网格的“好坏”决定了后续计算的精度、效率乃至成败。其次，网格生成过程涉及大量的用户交互，它的工作量占整个数值模拟过程的绝大部分人工工作量。此外，网格生成研究具备鲜明的双重属性。一方面，它植根于计算数学、计算几何和计算机相关学科或领域，已建立了相应的理论和算法体系，可称之为“科学”；另一方面，网格生成发展到今天，人们可以使用众多共享或商业软件，但是对于真正复杂的几何形状，面向复杂的物理过程，很难找到一个完全自动且不依赖于经验知识的有效方法和工具。与方程求解不同，网格通常不是“计算”出来的，而是“设计”出来的，从这个意义上讲，网格生成是一门“艺术”。

国外已有若干关于网格生成的专著，有几本篇幅之巨，页数近千。本书内容限定在非结构网格，但非结构网格生成研究内容的丰富程度仍然超过本书篇幅所能承载的最大容量。为此，本书避免面面俱到地介绍每一种非结构网格生成算法，而是重点选择那些作者从事过相关研究的主题。这样做的好处是，每一章除综合最新的文献，描述非结构网格生成某个重要领域发展的历史脉络和现状外，还能提供一个或多个作者设计和实现过的程序范例，详细叙述程序的实现细节，评估程序的性能。作者希望通过抽象和具体融为一体、理论和实践互相验证的论述方式，以加深读者对非结构网格生成算法的理解。这样做不可避免地会忽略掉一些重要的主题（如四/八叉树法的介绍），希望未来能有机会更为全面地介绍网格生成，为有志从事该领域的研究人员提供更多的帮助。

全书共8章。第1章为引言，介绍网格生成的基本概念、分类和现状；第2、3、4、6和7章涉及五个具体的网格生成算法：Delaunay 网格生成、参数曲面网格生成、前沿推进网格生成、六面体网格生成和并行网格生成；第5章讨论单元尺寸定义；第8章介绍非结构网格生成软件系统，提供的程序范例是自主知识产权的网格生成软件 HEDP/PRE。本书各章内容总体上是独立的，但相互之间也存在一定的依赖关系，例

如，第2章关于Delaunay算法的介绍是第3章和第5章部分内容的基础；第3章关于曲面问题的介绍是第4章前沿推进曲面网格生成算法的基础；第7章讨论的并行网格生成算法集成了第2章介绍的串行网格生成程序。

本书的主要内容涉及第一作者于1991年在英国开始的网格生成理论、算法和应用方面的相关研究成果，特别是2002年回国后科研团队十三年来的研究成果。在浙江大学科研团队的研究工作最初由国家杰出青年科学基金项目(No.60225009)的资助而起步，之后陆续得到了国家国防基础科研项目、国家安全重大基础研究项目、国家科技支撑计划、国家科技重大专项、国家自然科学基金重点项目(No.11432013)，以及多项国家自然科学基金面上项目(No.10872182; No.11172267)和浙江省自然科学基金杰出青年基金及面上项目(No.LR16F020002; No.Y1110038)的资助。在此，谨向这些资助单位表示由衷的感谢。

本书的撰写得到了多位同事和学生的帮助与支持，参与相关研究工作的有解利军、黄争舸、郑建靖、肖周芳、赵大伟、曹秉万、曹建、曾丽娟、马飞剑、孙力胜和段丽等，张继发、邹建锋、石兴、张帅、徐彦、王康健等则为推动书中技术在多领域数值模拟问题中的应用作出了巨大贡献。在此，作者对他们表示衷心的感谢。

网格生成技术发展日新月异。虽然作者尽力将本书写得全面、准确，但囿于水平，难免有不足之处。热切希望读者和同行专家提出宝贵的批评意见与建议，以便帮助我们改进与提高。

郑 耀 陈建军

2015年9月10日

于浙江大学

目 录

序

前言

第 1 章	引言	1
1.1	物理背景和基本概念	2
1.1.1	偏微分方程数值求解的基本流程	2
1.1.2	网格生成的基本概念	3
1.2	结构网格生成方法	9
1.2.1	单块结构网格生成方法	10
1.2.2	分块结构网格生成方法	12
1.2.3	直角网格生成方法	14
1.3	非结构网格生成方法	15
1.3.1	三角形和四面体网格生成方法	16
1.3.2	四边形网格生成方法	17
1.3.3	六面体网格生成方法	19
1.3.4	混合网格生成方法	19
1.4	本书的特色和结构	20
第 2 章	Delaunay 网格生成	22
2.1	Delaunay 三角化的定义	22
2.2	Delaunay 网格生成的常用算法	23
2.2.1	B-W 算法	24
2.2.2	边/面交换算法	25
2.2.3	凸包法	26
2.2.4	算法比较	27
2.3	关键问题及其研究进展	27
2.3.1	内部点生成	27
2.3.2	边界恢复	28
2.3.3	网格质量优化	30
2.3.4	算法效率	31
2.3.5	算法鲁棒性	32

2.4	Delaunay 网格生成程序范例	33
2.4.1	程序介绍	34
2.4.2	算法流程	34
2.4.3	数据结构	36
2.4.4	鲁棒的 B-W 插点算法	37
2.4.5	边界点插入	38
2.4.6	内部点的生成和插入	39
2.4.7	二维边界恢复	40
2.4.8	三维边界恢复	41
2.4.9	外部单元删除	50
2.4.10	网格质量优化	51
2.4.11	数值实验	51
2.5	结束语	55
第 3 章	参数曲面网格生成	56
3.1	参数曲线和曲面及黎曼度量的基本理论	56
3.1.1	参数曲线	56
3.1.2	参数曲面	57
3.1.3	黎曼度量	57
3.1.4	黎曼距离	58
3.1.5	单位网格	59
3.2	参数曲面网格生成算法研究的最新进展	60
3.2.1	映射法	60
3.2.2	直接法	62
3.3	简化的几何引擎范例	63
3.3.1	边界表征	63
3.3.2	几何定义	64
3.4	组合参数曲面网格生成程序范例	67
3.4.1	程序介绍	67
3.4.2	算法流程	68
3.4.3	曲线离散	69
3.4.4	实空间到参数空间的投影	70
3.4.5	参数平面边界网格的绕向规整	71
3.4.6	基于 Delaunay 算法的参数平面网格生成	71
3.4.7	参数网格质量优化	74
3.4.8	数值实验	76

3.5	结束语	79
第4章	前沿推进网格生成	80
4.1	经典前沿推进算法	80
4.1.1	经典前沿推进算法流程	80
4.1.2	经典前沿推进算法的关键技术	81
4.1.3	前沿推进算法和 Delaunay 算法的比较	86
4.2	前沿推进思想在网格生成中的拓展应用	86
4.2.1	前沿推进-Delaunay 耦合算法	87
4.2.2	前沿层进四边形网格生成算法(铺路法)	88
4.2.3	Q-Morph 算法	90
4.3	前沿推进参数曲面网格生成程序范例	92
4.3.1	程序介绍	92
4.3.2	平面各向同性前沿推进三角形网格生成算法	92
4.3.3	参数平面前沿推进三角形网格生成算法	94
4.3.4	前沿推进曲面四边形网格生成算法	95
4.3.5	数值实验	99
4.4	结束语	103
第5章	单元尺寸及几何自适应网格生成	104
5.1	单元尺寸的基本概念	105
5.1.1	单元尺寸场	105
5.1.2	黎曼空间和单位网格	107
5.1.3	单元尺寸场和网格边数的基本关系	108
5.1.4	单元尺寸的融合	109
5.1.5	单元尺寸的插值	110
5.1.6	单元尺寸的过渡控制	112
5.2	交互式单元尺寸场定义	119
5.2.1	全局尺寸	119
5.2.2	边界驱动	120
5.2.3	背景网格	120
5.2.4	网格源	120
5.3	几何自适应单元尺寸	122
5.3.1	几何特征分类	123
5.3.2	几何特征识别	124
5.3.3	几何自适应尺寸场的计算	125
5.4	几何自适应单元尺寸计算程序范例	126

5.4.1	程序结构和算法流程	126
5.4.2	尺寸场的初始化	127
5.4.3	尺寸场的后处理	130
5.4.4	尺寸场插值	132
5.4.5	数值实验	133
5.5	结束语	135
第 6 章	六面体网格生成	136
6.1	六面体网格生成的困难	137
6.2	任意形体六面体网格生成方法研究综述	138
6.2.1	栅格法	138
6.2.2	H-Morph 算法	140
6.2.3	铺层法	141
6.2.4	编织缠绕法	141
6.2.5	无约束铺层法	143
6.3	扫掠体的分类及扫掠法的研究进展	144
6.3.1	扫掠体的分类	144
6.3.2	扫掠法的研究进展	145
6.4	多源多目标扫掠体全六面体网格程序范例	148
6.4.1	程序介绍	148
6.4.2	单源扫掠法	148
6.4.3	多源扫掠法	155
6.4.4	多源多目标扫掠法	158
6.4.5	数值实验	165
6.5	结束语	168
第 7 章	并行网格生成	169
7.1	基本概念	170
7.1.1	并行网格生成算法的分类	170
7.1.2	评价并行网格生成算法优劣的标准	171
7.1.3	区域分解	172
7.1.4	负载均衡	172
7.2	研究趋势	173
7.3	典型算法	174
7.3.1	同步处置类并行网格生成算法	175
7.3.2	后置处理类并行网格生成算法	177
7.3.3	前置处理类并行网格生成算法	180

7.4	并行四面体网格生成程序范例	183
7.4.1	程序介绍	183
7.4.2	程序基本流程	184
7.4.3	区域分解方法	185
7.4.4	网格生成及质量优化	196
7.4.5	数值试验	198
7.5	结束语	205
第8章	基于非结构网格的前处理软件系统	206
8.1	国内外现状综述	207
8.2	HEDP 和 HEDP/PRE 的基本情况	209
8.2.1	HEDP 的基本情况	209
8.2.2	HEDP/PRE 的基本情况	213
8.3	几何模块	217
8.3.1	基于分层软件结构的几何引擎	217
8.3.2	连续曲面和离散曲面	218
8.3.3	虚拓扑	220
8.3.4	几何算法	221
8.4	单元尺寸模块	224
8.5	网格模块	226
8.5.1	算法流程	226
8.5.2	数据结构	228
8.5.3	网格算法	229
8.6	系统应用	234
8.6.1	复杂几何形状的非结构网格生成	234
8.6.2	流体力学应用	237
8.6.3	结构力学应用	245
8.6.4	燃烧学应用	248
8.7	结束语	251
参考文献		252
彩图		

第1章 引言

简而言之，网格生成研究的问题是如何将给定的几何区域划分成有限个基本几何形体的组合，而这些基本几何形体被称为单元。对平面或曲面区域，基本几何形体常采用三角形或四边形；对三维区域，基本几何形体往往采用四面体、六面体等。网格生成技术在很多领域都有广泛的应用，如计算机图形学、计算机视觉、可视化、地理信息系统，因此研究者众多，但由于研究的层次、角度和需求不尽相同，所采用的方法和面临的挑战也互有差异。本书讨论的网格生成技术，其主要应用对象是偏微分方程（Partial Differential Equation, PDE）的数值求解^[1-14]。当然，这些技术也可拓展应用于其他领域。

通过建立合理的模型，很多物理现象的模拟可归结为偏微分方程的求解。由于求解区域、边界条件及材料特性等因素的影响，这些方程通常无法利用解析的方法求解，只能退而求其次，结合计算机技术进行数值求解。典型偏微分方程数值解法包括有限单元法（Finite Element Method, FEM）^[15]、有限体积法（Finite Volume Method, FVM）^[16]、边界单元法（Boundary Element Method, BEM）^[17]及有限差分法（Finite Difference Method, FDM）^[18]。网格生成是应用这些方法的前处理步骤，网格生成后，一个包含无限自由度的连续物理场问题被离散成一个包含有限自由度的离散系统。通常情形下，该离散系统可利用大规模矩阵的数值计算方法求解。

网格生成在整个数值模拟过程中的地位是极其重要的。一方面，网格的“好”与“坏”可决定后续计算过程的精度、效率乃至成败；另一方面，复杂问题的网格生成过程依赖于操作人员的经验，且无法完全自动化，涉及大量人工操作，其所消耗的工作量可能会占整个数值模拟过程的绝大部分。网格生成最初是伴随数值模拟方法的研究而产生的研究分支，但鉴于其在数值模拟中的特殊地位，它逐渐吸引了各领域众多有深厚功底的研究人员，并不断从计算几何和计算机图形学等其他领域吸取养分，最终发展成为一个独立的研究领域。

本章 1.1 节将着重介绍网格生成相关的背景知识、基本概念和分类方法，并以时间为轴，简要回顾网格生成方法的发展历史。由于本书后续章节主要关注非结构网格生成方法，不失完整性，1.2 节将回顾另一类主流的网络生成方法——结构网格生成的研究现状。与之呼应，1.3 节则回顾非结构网格生成的研究现状，但重点关注后续章节不涉及的一些技术内容。1.4 节梳理全书的脉络，以期读者能理解本书的写作宗旨和特色。

1.1 物理背景和基本概念

1.1.1 偏微分方程数值求解的基本流程

科学计算被广泛认为是理论和实验之外认识自然界各种物理现象和规律的第三类手段。开展科学计算的首要步骤是建立问题的数学模型，针对自然界的流、固、热、电、磁等种种物理现象，科学家已建立了一系列精妙的偏微分方程予以描述，如适用流体问题的欧拉方程和 Navier-Stokes 方程，适用电磁场的麦克斯韦方程。尽管基于这些方程进行理论分析仍然是认识自然规律的有效途径，但更多情况下，尤其是在实际的工程设计中，无法解析求解这些方程。随着计算机技术的发展，人们尝试使用诸如 FEM、FDM 和 FVM 等数值方法求解这些问题，取得了巨大的成功。

图 1.1 示意了基于自适应技术开展偏微分方程数值求解的典型过程，它包含六个主要步骤。

(1) 几何建模。传统的正向设计中，操作人员利用 CAD 软件构建问题的几何外形，这些外形通常由很多连续的自由曲线和曲面通过一定的拓扑关系组合而成。目前，激光扫描、基于图像重建等反向建模技术已大量应用，这些技术直接产生的模型通常为三角面片表征的离散模型。无论正向设计得到的连续模型还是反向设计得到的离散模型，均有可能不满足后续网格生成的要求（不封闭、自相交、不符合二边流形准则等），或包含过多的几何细节（使得网格不必要加密，从而增加计算量），因此，在网格化这类模型前需对其进行必要的修复和简化。

(2) 初始网格生成。网格生成是一个“设计”过程，操作人员需在一定程度上掌握所计算问题的背景知识，并据此确定网格的类型、规模以及单元的分布等，形成“设计”策略，而策略的执行通常伴随大量的人工干涉。网格质量对计算的精度、效率和收敛性至关重要，在开展计算前，需对网格的有效性及质量进行分析，并结合一些自动算法提高网格质量。当生成网格失败或生成的网格质量不满足数值求解要求时，需修正网格生成策略，甚至重新定义或修改几何模型。

(3) 边界条件定义。边界条件通常是方程求解的定解条件，附加在几何模型或网格模型上。此外，这一环节还需定义材料参数以及与计算程序相关的求解参数。

(4) 计算及误差分析。计算网格以及定义在其上的边界条件、材料参数等共同构成了计算模型，将其输入计算程序得到初步计算结果后，需进行必要的误差分析。如果误差满足预设要求，则可停止计算，进入后续的数据处理阶段；否则，需根据误差信息，调整网格并重启计算。

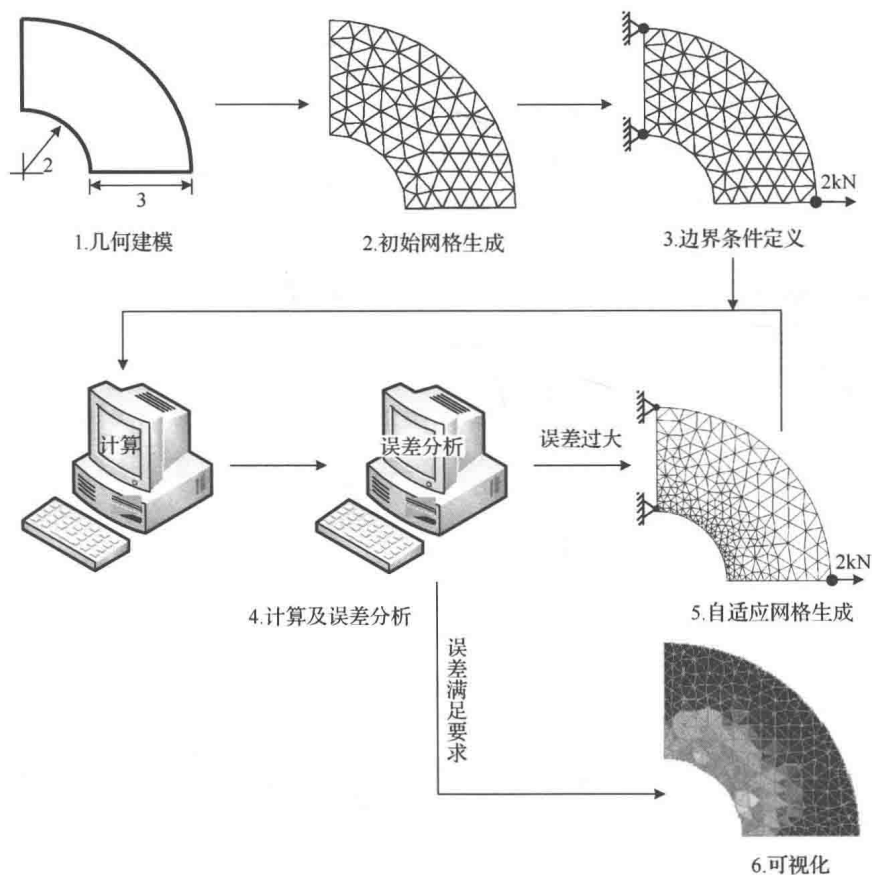


图 1.1 自适应数值模拟流程

(5) 自适应网格生成。对计算结果进行误差分析后，可以得到误差在计算域的分布信息，根据这类后验知识调整网格，并重启计算过程，以期获得更精确的计算结果。网络的调整策略有三类：调整单元疏密（ h -自适应）、调整网格节点分布（ r -自适应）或调整单元的插值格式（ p -自适应）。 h -自适应、 r -自适应以及 hr -耦合自适应在实际计算中最为常见。

(6) 可视化。计算结果通常规模很大，且具有很复杂的几何或拓扑结构，可视化尝试利用计算机图形学技术，利用可视的图形、图像或统计工具来表征物理量及其分布规律，帮助分析人员从计算结果中快速得到全局或局部物理规律，并定性或定量表征这些规律。

1.1.2 网格生成的基本概念

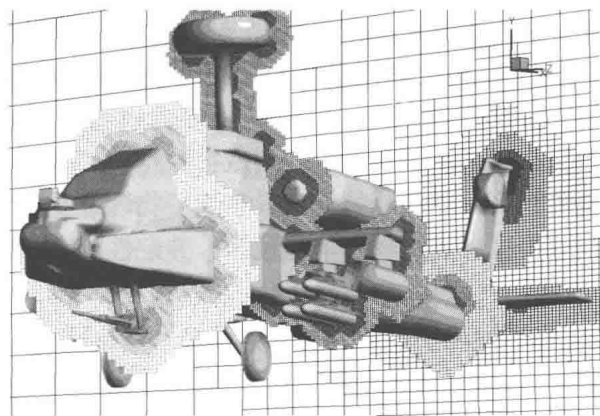
1. 网格的分类

为满足不同应用需求，网格形式林林总总有很多，可以从不同角度去归类。例如，

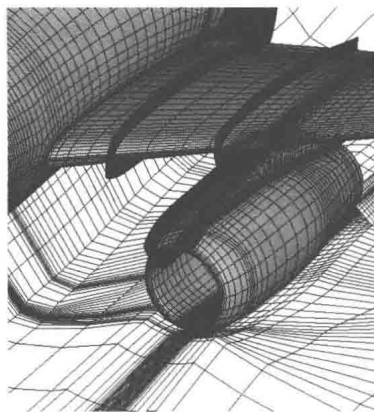
从几何维度看，主要可分为平面、曲面和实体等网格；从单元类型看，可分为三角形、四边形、四面体、六面体和任意多面体网格，以及包含多种单元形式的混合单元网格。此外，从单元形状是否规则的角度可将网格分为各向同性网格和各向异性网格：各向同性网格要求单元为边长比（单元的长边和短边边长比）接近于 1 的“正”多边形，各向异性网格则是边长比非常大的狭长或扁平单元，以适应曲率特征或物理特征的各向异性。

最为常用的分类方法是根据网格的单元拓扑是否具有某种规律将其分为结构网格（structured mesh）和非结构网格（unstructured mesh）。狭义的结构网格定义非常严格，要求每个内部网格节点都被相同数目的单元所包含。若按一定规则对结构网格的节点进行编号，则节点相邻关系等网格拓扑信息可隐藏于节点编号之中。反之，非结构网格中包含每个内部节点的单元数目是不确定的，网格拓扑需显式表达。与非结构网格相比，存储及访问结构网格数据的代价都较小，相应数值计算的时空效率也更有优势。结构网格的另一个优势是其单元具有很好的正交性和贴边性，相应数值计算的精度也更高。与结构网格相比，非结构网格因其灵活的单元连接方式，能更好地适应复杂几何定义，更好地实施单元疏密变化，因此，其生成方法的自动性及自适应计算的能力都更高。

严格意义上的结构网格只存在于区域边界非常简单的情形，还有一些网格形式因其网格拓扑具备规律性通常也被归类为结构网格。一类是基于四（八）叉树法生成的直角网格（图 1.2(a)，图片来自 NASA，即美国国家航空航天局），它在计算流体动力学（Computational Fluid Dynamics, CFD）的欧拉方程求解中有着广泛应用，在地形可视化领域通常称这类网格为半规则（semi-regular）网格。另一类则是分块结构网格（图 1.2(b)），它是当前 CFD 应用中的主流网格形式之一^[7,19]，其生成是典型的分而治之过程：首先分解问题域为子块；随后在每个子块上生成结构网格；最终合并子块网格为整体网格。



(a) 直角网格（来自 NASA Cart3D）



(b) 分块结构网格（来自 DLR MegaCads）

图 1.2 两类特殊的结构网格形式

在结构网格和非结构网格之间，还有一类特殊的半结构网格，这类网格的单元拓扑仅在某个方向呈现结构化规律。例如，基于扫掠法生成的网格（图 1.3），当源面形状复杂时，其源面网格通常为非结构网格，但沿扫掠路径方向的侧面网格则呈现结构化特性。此外，在粘性流体计算中，为适应边界层附近各向异性的物理现象，其边界层网格在垂直物面方向呈现结构化特性，而平行物面方向则布置非结构三角形和四边形网格（图 1.4）。

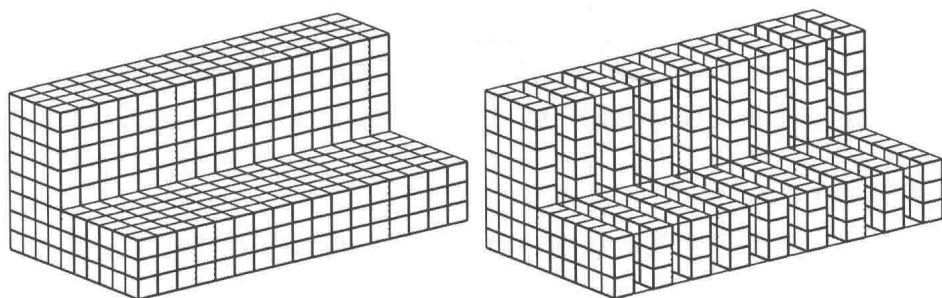


图 1.3 基于扫掠法生成的六面体网格及其剖切视图

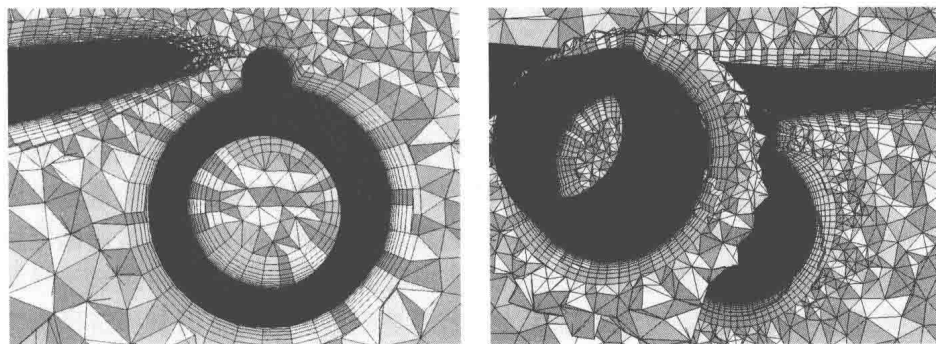


图 1.4 带短舱 F6 飞机标模的粘性计算混合格网（见彩图）

为结合结构网格和非结构网格各自的长处，很多模拟中应用的网格配置可能是结构网格和非结构网格共同组成的，我们称这种网格形式为混合格网。这里需要注意区分混合格网（hybrid mesh）和混合单元网格（mixed-element mesh），后者仅是单元几何类型的混合，而非网格拓扑类型的混合。常用的混合格网有两类，一类是图 1.4 所展示的粘性计算网格，它在近物面区域（边界层）布置半结构网格，而在远物面区域布置非结构网格；另一类是分块网格技术衍生出来的网格形式：在大部分区域分块使用结构网格，但在块与块邻近的区域使用非结构网格连接。本书第一作者郑耀在 NASA 工作期间研制的三维 DRAGON（Direct Replacement of Arbitrary Grid Overlapping by Nonstructured grid）网格程序即用于生成第二类混合格网^[20,21]（图 1.5）。为叙述方便，我们将第一类混合格网归类为非结构网格，第二类混合格网归类为结构网格。

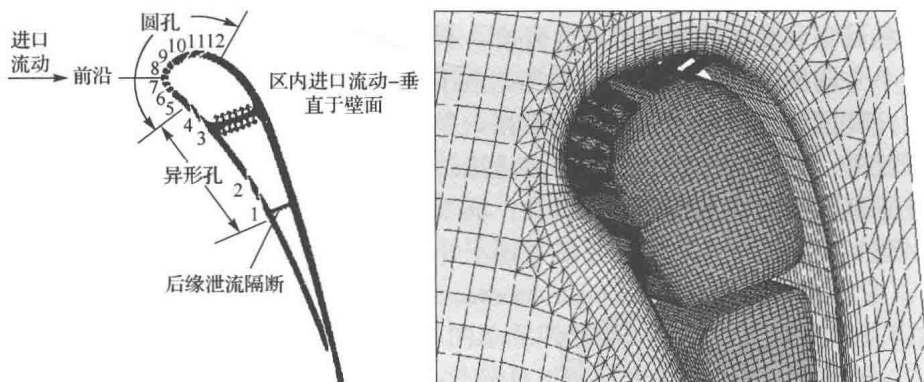


图 1.5 DRAGON 网格技术应用于气膜冷却涡轮叶片分析（见彩图）

2. 网格生成算法的分类

最直接的网格生成算法分类方法是根据其产生的网格进行分类，如分为平面、曲面或实体网格生成算法；三角形、四边形、四面体或六面体网格生成算法；各向同性或各向异性网格生成算法；结构或非结构网格生成算法等。

当然，也可以从算法本身所具备的一些共性特征对其进行归类。例如，Frey 等就尝试将主要的网格生成算法归成五类^[2]。

第 1 类主要指早期通过手工或半自动方式指定网格几何和拓扑信息的方法，只适用于简单几何情形。

第 2 类是基于参数化和映射技术的算法，它将物理空间不规则区域的网格生成问题通过映射函数转换为参数空间规则区域的网格生成问题。映射函数的确定主要有两类途径：一是通过代数插值，二是通过求解 PDE 方程。此外，三维参数曲面网格生成也可基于映射思想简化为二维问题。

第 3 类是基于区域分解技术的算法，它基于分而治之思想，分解原区域为多个子区域，将复杂区域的网格生成问题转换为多个相对简单的子区域网格生成问题的组合，如分块结构网格生成及四/八叉树法网格生成。

第 4 类是插点/连元算法，通常以区域边界为输入，逐步在区域内部增加新的网格节点或创建新的单元，直至区域按照预定要求被完全网格化，如 Delaunay 三角化和前沿推进算法。

第 5 类是构造型算法，根据问题的特性将问题域分成很多个子区域，每个子区域可以采用上述任意一种算法生成网格，最终网格则为所有子区域网格的组合，如混合网格生成算法。

3. 网格质量的评价标准

在评价一套网格质量的优劣前，需首先确认其几何有效性和拓扑有效性，几何有效条件诸如要求所有单元具有正面积或正体积（保证雅可比矩阵为正），单元之间互不