"十二五"普通高等教育规划教材

代数选讲

SELECTION OF ALGEBRA

周晓晶　于晓娟　徐　艳　主编
刘振忠　主审

国防工业出版社
National Defense Industry Press

代数选讲

周晓晶　于晓娟　徐　艳　主编
刘振忠　主审

国防工業出版社
·北京·

内 容 简 介

本书对高等代数知识从整体上进行提炼，按章提供要点提示、内容及方法介绍、典型例题分析（均为考研题或竞赛题）. 通过本书的学习，学生可对高等代数的基本理论体系、基本思想方法、解题技巧有更全面、更深入的体会和更准确的理解. 本书旨在提高学生综合分析问题、利用代数知识解决实际问题的能力，进一步提高学生的数学修养、科学思维、逻辑推理能力，提高学生理解和认识问题的能力以及计算能力.

本书的主要内容为代数选讲的理论与方法，包括多项式、线性代数部分、线性空间、线性变换及欧式空间；其次介绍部分实验与应用，包括多项式、矩阵、行列式、二次型及矩阵特征值在数学建模中的应用.

本书可作为数学专业及其他相关专业“代数选讲”课程的教材或教学参考书，也可作为数学及相关专业硕士研究生入学考试的复习资料，还可作为高校教师和工程技术人员深入了解高等代数或线性代数的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

代数选讲/周晓晶，于晓娟，徐艳主编. —北京：国防工业出版社，2016. 1

ISBN 978-7-118-10657-2

Ⅰ. ①代… Ⅱ. ①周…②于…③徐… Ⅲ. ①代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 290216 号

※

国防工業出版社 出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048）

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787 × 1092 1/16 **印张** 15½ **字数** 395 千字

2016 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—3000 册 **定价** 39. 00 元

国防书店：（010）88540777　　发行邮购：（010）88540776

发行传真：（010）88540755　　发行业务：（010）88540717

前　言

本书是根据我校"十二五"规划中建设教学研究型大学的目标及多年的教学和科研的经验编写而成的，力求体现教学内容与形式及该课程教育教学方法的改革．本书的目的是介绍一些逻辑性及理论性强的代数选讲的理论与方法及大量丰富的各高校近几年考研试题．

本书具有以下特点：

(1) 重点突出教师研究性教学和学生研究性学习过程的展示．根据编者近10年在代数系列课程的教学及改革中的经验及参加全国大学生数学竞赛的培训与指导工作的经验，本书将代数方法的应用和数学实验部分编写进来，鼓励和激励学生利用数学软件，开展数学实验，充实内容，更好地供我校信息与计算科学专业使用，更好地适应研究性教学方法的授课要求．

(2) 配置大量的例题及习题，有利于信息与计算科学专业学生及工程院、信息院部分学生有针对性地学习．本书在习题设置上的特点是量大、类型多、编排层次分明，既有简单的概念复习题，难度各异的计算题、证明题和应用题，也有综合性较强的探索研究题．所用数据来自于各级各类数学竞赛实际培训题及赛题、各重点院校及研究所历年研究生入学考试题或模拟题，有很强的真实感．

黑龙江八一农垦大学周晓晶副教授带领于晓娟和徐艳讲师共同提出该书编写的总体思路，并担任主编．编写分工如下：周晓晶负责第一、六、八、十章和实验与应用一的编写；于晓娟负责第二、三、四章和实验与应用二的编写；徐艳负责第五、七、九章和实验与应用三和四的编写；东北农业大学的刘振忠教授担任主审，并对该书的总体思路给出建议；最后，由周晓晶对全书进行了统稿工作．

本书在编写过程中得到了黑龙江八一农垦大学信息与计算科学系全体教师的热心帮助，在出版过程中得到了黑龙江八一农垦大学教材科和理学院领导的大力支持，在此一并表示感谢．书中难免有遗漏和不妥之处，望同仁和读者批评指正．

编　者

2015年7月

目录

第一章　多项式

多项式是高等代数的重要组成部分,它是代数中的一个基本概念,多项式中以多项式因式分解存在唯一性定理为中心展开整个理论体系,主要讨论数域 F 上整除性理论,注意在数域 F 上和数环 F 上讨论多项式的区别.多项式的重要性在于它是最基本的函数,用它可以去逼近一个复杂的函数,这对数学分析、微分方程等学科在理论和实际求解上都有意义.

1.1　基本概念

1. 一元多项式定义

设 $\mathbf{R}$ 为含有数 1 的数环,称表达式 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 为 $\mathbf{R}$ 上一个文字为 x 的多项式,简称一元多项式,其中 n 为非负整数,$a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{R}$,记为 $f(x)$;特别地,系数全为零的多项式记为 0,零多项式是唯一不定义次数的多项式.集合 $\mathbf{R}[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\,|\,a_i\in\mathbf{R},\forall n(\geqslant 0)\in\mathbf{Z}\}$.对多项式的加法、乘法构成的环称为 R 上 x 的一元多项式环.

2. 整除

设 $f(x),g(x)\in F[x]$,若存在 $h(x)\in F[x]$,使得 $f(x)=g(x)h(x)$,则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$,记 $g(x)\,|\,f(x)$.

3. 最大公因式

设 $f(x),g(x),d(x)\in F[x]$,若:

(1) $d(x)\,|\,f(x),d(x)\,|\,g(x)$,即 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式;

(2) 对于 $f(x),g(x)$ 的任一公因式 $h(x)$,都有 $h(x)\,|\,d(x)$.

则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式,记为 $d(x)=(f(x),g(x))$.

4. 互素

设 $f(x),g(x)\in F[x]$,若 $f(x),g(x)$ 除零次多项式外不再有其他公因式,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素,记为 $(f(x),g(x))=1$.

5. 不可约多项式

$F[x]$ 中次数大于零,并在 $F[x]$ 中只有平凡因式的多项式.否则次数大于零,并在 $F[x]$ 中除平凡因式外,还有其他因式的多项式称为可约的.

注意:对零次多项式不定义它们的可约性,其二多项式是否可约与数域有关.

6. k 重因式

设 $p(x)$ 为不可约多项式,且 $p^k(x)\,|\,f(x)$,但 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$,则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式;当 $k=1$ 时,称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的单因式;当 $k>1$ 时,称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式.

7. 多项式函数

一元多项式$f(x)$,对$\forall c\in \mathbf{R}$,在$\mathbf{R}$上就有唯一确定的数$f(c)$与之对应,这得到了$\mathbf{R}$到$\mathbf{R}$的一个映射,是由多项式$f(x)$所确定的,称为一个多项式函数. 特别地,当$x=c$时,使$f(c)=0$,则c为$f(x)$在$\mathbf{R}$中的根或零点.

8. 本原多项式

一个非零的整系数多项式$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,如果它的各项系数的最大公因数只有$\pm 1$,则称$g(x)$是一个本原多项式.

1.2 基本理论

1. 次数定理

设$f(x),g(x)\in F[x]$,且$f(x)\neq 0\neq g(x)$,则:

(1) 当$f(x)+g(x)\neq 0$时,$\partial(f(x)+g(x))\leqslant \max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$;

(2) $\partial(f(x)\cdot g(x))=\partial(f(x)+g(x))$.

2. 整除性质

(1) 若$f(x)\mid g(x),g(x)\mid h(x)$,则$f(x)\mid h(x)$;

(2) 若$h(x)\mid f(x),h(x)\mid g(x)$,则$h(x)\mid (f(x)\pm g(x))$;

(3) 若$h(x)\mid f(x)$,对$\forall g(x)\in F[x]$,则$h(x)\mid f(x)\cdot g(x)$;

(4) 若$h(x)\mid f_i(x),i=1,2,\cdots,r$,对$\forall g_i(x)\in F[x],i=1,2,\cdots,r$,都有$h(x)\mid \sum\limits_{i=1}^{r}f_i(x)\cdot g_i(x)$;

(5) $\forall c(\neq 0)\in F[x],\forall f(x)\in F[x]$,都有$c\mid f(x),cf(x)\mid f(x)$;

(6) 若$f(x)\mid g(x),g(x)\mid f(x)$,则$f(x)=cg(x)$,其中$c(\neq 0)\in F$.

3. 带余除法定理

设任意两个多项式$f(x),g(x)\in F[x]$,且$g(x)\neq 0$,则在$F[x]$中存在唯一多项式$q(x),r(x)$,使得$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$,其中$r(x)=0$,或$\partial(r(x))<\partial(g(x))$,因此有结论:

(1) $g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow r(x)=0$;

(2) 多项式的整除不因数域扩大而改变.

4. 最大公因式存在唯一性定理

设任意两个多项式$f(x),g(x)\in F[x]$,则它们一定有最大公因式,除一个零次多项式外,$f(x)$与$g(x)$的最大公因式是唯一确定的.

5. 倍式和定理

设$d(x)$为$f(x)$与$g(x)$的最大公因式,则在$F[x]$中存在多项式$u(x),v(x)$,使得$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$;反之不然,但$d(x)$为$f(x)$与$g(x)$的公因式时,则逆命题成立.

6. 互素判别

$F[x]$的两个多项式$f(x)$与$g(x)$互素$\Leftrightarrow (f(x),g(x))=1$;或者$F[x]$中存在多项式$u(x),v(x)$,使得$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$.

互素性质：

(1) 若$(f(x),h(x))=1$，$(g(x),h(x))=1$，则$(f(x)g(x),h(x))=1$；

(2) 若$h(x)\mid f(x)g(x)$，且$(f(x),h(x))=1$，则$h(x)\mid g(x)$；

(3) 若$g(x)\mid f(x)$，$h(x)\mid f(x)$，且$(g(x),h(x))=1$，则$g(x)h(x)\mid f(x)$；

(4) 若$(f(x),g(x))=d(x)$，$f(x)=f_1(x)d(x)$，$g(x)=g_1(x)d(x)$，则$(f_1(x),g_1(x))=1$；

(5) 若$(f(x),g(x))=d(x)$，则$(t(x)f(x),t(x)g(x))=t(x)d(x)$.

7. 不可约多项式的判别

设$f[x]$在$F[x]$中任一分解式$f(x)=g(x)h(x)$中的因式$g(x)$与$h(x)$中总有一个是零次的$\Leftrightarrow f(x)$在$F[x]$上不可约.

不可约多项式的性质：

(1) 若$p(x)$是不可约多项式，则$cp(x)$也是不可约多项式，其中c为F中任一非零元；

(2) 若$p(x)$是不可约多项式，对$F[x]$中任一多项式$f(x)$，则或者$(f(x),p(x))=1$或者$p(x)\mid f(x)$；

(3) 若$p(x)$是不可约多项式，且$p(x)\mid f(x)g(x)$，则$p(x)\mid f(x)$或者$p(x)\mid g(x)$.

8. 多项式唯一因式分解定理

$F[x]$中每一个$n(n>0)$次多项式$f(x)$都可以分解成不可约多项式的乘积，若不计零次因式的差别，多项式$f(x)$分解成不可约因式乘积的分解式是唯一的.

9. 重因式与微商的关系

设$p(x)$是多项式$f(x)$的一个$k(k\geqslant 1)$重因式，则$p(x)$是多项式$f'(x)$的一个$k-1$重因式，因而是$f(x),f'(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$的公因式，不是$f^{(k)}(x)$的因式，特别地，当$k=1$时，$p(x)$不是多项式$f'(x)$的因式.

10. $f(x)$无重因式的充分必要条件

$f(x)$无重因式$\Leftrightarrow(f(x),f'(x))=1$，由此可知$f(x)$无重因式不因数域的扩大而改变.

11. 余式定理

设$f(x)\in F[x]$，$c\in F$，用$x-c$除$f(x)$所得的余氏$r(x)=f(c)$.

12. 因式定理

$x-c\mid f(x)\Leftrightarrow f(c)=0$.

13. $n(n>0)$次多项式根的个数定理

$F[x]$中任一个$n(n>0)$次多项式$f(x)$在F中至多有n个不同的根.

14. 代数基本定理

任何$n(n>0)$次多项式$f(x)$在复数域中至少有一个根，因此任何$n(n>0)$次多项式$f(x)$在复数域中有n个根（重根按重数计算）；若一个次数小于n的多项式有n个不同的根，那么它必然是零多项式，即为0.

15. 复系数多项式因式分解定理

复数域上次数大于1的多项式都可约，因此复数域上任一个$n(n>0)$次多项式在

$C[x]$中都可以分解为一次因式的乘积.

16. 有理数域上存在任意次数的不可约多项式.

17. Eisenstain 判别法

对于多项式$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$,若能找到一个素数$p$,使得:

(1) $p\nmid a_n$;

(2) $p\mid a_i, i=0,1,\cdots,n-1$.

则$f(x)$在有理数域$\mathbf{Q}$上不可约.

18. 整系数多项式因式分解定理

若整系数多项式(或者本原多项式)在有理数域上可约,则它可以分解为次数较低的整系数多项式乘积.

1.3 基本方法与典型例题

1. 基本方法

(1) 最大公因式的求法:利用辗转相除法.

(2) 重因式的判别法:$(f(x),f'(x))=\begin{cases}1, & f(x)\text{无重因式}\\ d(x)\neq 1, & f(x)\text{有重因式}\end{cases}$.

(3) 不可约多项式的判别:①利用定义;②利用判别命题;③反证法;④Eisenstain 判别法.

(4) 不同数域上多项式的根及分解式:①查根数证恒等法—数域F上$n(n>0)$次多项式至多n个根;②代数基本定理;③实数域上的多项式分解;④有理系数多项式——高斯引理、Eisentain 判别法.

2. 典型例题

1) 多项式整除与互素

例 1-1-1 $f(x),g(x)\in F[x]$,若存在$h(x)\in F[x]$,使得

$$(x+m)f(x)+(x+n)g(x)=(x^2-k)h(x)$$

且$(x-m)f(x)+(x-n)g(x)=(x^2+k)h(x)$,其中$m,n,k\in\mathbf{R},k\neq 0,m\neq 0$.

求证:$x^2+k\mid f(x),x^2+k\mid g(x)$.

证明:记

$$(x+m)f(x)+(x+n)g(x)=(x^2-k)h(x) \tag{1.1}$$

$$(x-m)f(x)+(x-n)g(x)=(x^2+k)h(x) \tag{1.2}$$

式(1.1)+式(1.2),得

$$x(f(x)+g(x))=(x^2+k)h(x),$$

从而$(x^2+k)\mid x(f(x)+g(x))$,又$(x,x^2+k)=1$,得

$$x^2+k\mid f(x)+g(x) \tag{1.3}$$

由式(1.1),得$x(f(x)+g(x))+mf(x)+ng(x)=(x^2+k)h(x)$,从而有$(x^2+k)$

$|mf(x)+ng(x)$，又 $x^2+k|mf(x)+mg(x)$，进一步得 $(x^2+k)|(m-n)g(x)$，由 $(x^2+k,m-n)=1$，从而得 $(x^2+k)|g(x)$，再由式(1.3)，得 $(x^2+k)|f(x)$.

例 1-1-2 设 $f(x)\neq 0$，$h(x)$ 为任意多项式，若存在 $g(x)$，使得 $(f(x),g(x))=1$，则 $(f(x),g(x)h(x))=(f(x),h(x))$.

证明：$(f(x),h(x))=d_1(x)$，$(f(x),g(x)h(x))=d_2(x)$，而且 $d_1(x)|d_2(x)$，已知 $(f(x),g(x))=1$，又 $d_2(x)|f(x)$，则 $(d_2(x),g(x))=1$，且 $d_2(x)|h(x)$，从而 $d_2(x)|d_1(x)$，进而 $d_1(x)=d_2(x)$.

例 1-1-3 设 $f(x),g(x)\in F[x]$，则 $(f(x),g(x))=1\Leftrightarrow(f(x)+g(x),f(x)\cdot g(x))=1$.

证明：必要性．若 $(f(x),g(x))=1$，则存在 $u(x),v(x)\in F[x]$，使得 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$，进而有 $(f(x)+g(x))\cdot u(x)+g(x)(v(x)-u(x))=1$，故 $(f(x)+g(x),g(x))=1$，同理可证 $(f(x)+g(x),f(x))=1$，又因 $(f(x),g(x))=1$，所以有 $(f(x)+g(x),f(x)\cdot g(x))=1$.

充分性．若 $(f(x)+g(x),f(x)\cdot g(x))=1$，则有 $u(x),v(x)\in F[x]$，使得 $(f(x)+g(x))\cdot u(x)+f(x)g(x)v(x)=1$，得 $f(x)\cdot(g(x)v(x)+u(x))+g(x)u(x)=1$，故 $(f(x),g(x))=1$.

例 1-1-4 设 $f(x)\in F[x]$，且 $\partial(f(x))>0$，$p(x)\in F[x]$ 为不可约多项式，证明：$f(x)=p^k(x)\Leftrightarrow\forall g(x)\in F[x]$，必有 $(f(x),g(x))=1$，或存在某一正整数 m，使得 $f(x)|g^m(x)$.

证明：必要性．对 $\forall g(x)\in F[x]$，由 $p(x)\in F[x]$ 不可约，得 $(p(x),g(x))=1$ 或 $p(x)|g(x)$. 当 $(p(x),g(x))=1$ 时，得 $(p^k(x),g(x))=1$，即 $(f(x),g(x))=1$. 当 $p(x)|g(x)$ 时，得 $p^k(x)|g^k(x)$，即 $f(x)|g^k(x)$，令 $m=k$，即 $f(x)|g^m(x)$.

充分性．反证法．假设 $f(x)$ 不是某一不可约多项式的方幂，则令 $f(x)$ 的典型分解式为 $a_1p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_t^{k_t}(x)$，其中 $t\geqslant 2$，取 $g(x)=p_1(x)$，由题设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 只有两种可能，即 $(f(x),g(x))=1$ 或 $f(x)|g^m(x)$，但这两种情形由反证法假设显然不可能. 因此 $f(x)$ 必为某一不可约多项式的方幂.

例 1-1-5 设 $f(x),g(x),h(x)$ 是实数域上的多项式，如果 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

证明：由 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，可知 $x|f^2(x)$，易推得 $x|f(x)$.

于是有 $f^2(x)=x^2(x)f_1^2(x)$，代入方程并在两边约去 x，有

$$xf_1^2(x)=g^2(x)+h^2(x)\tag{1.4}$$

于是有 $x|(g^2(x)+h^2(x))$，若多项式 $g(x)$ 或 $h(x)$ 中的常数项不为零的话，都可以推出，$x^2|(g^2(x)+h^2(x))$，于是有

$$g^2(x)+h^2(x)=x^2(g_1^2(x)+h_1^2(x))$$

代入式(1.4)并约去 x，有

$$f_1^2(x)=x(g_1^2(x)+h_1^2(x))\tag{1.5}$$

这样又回到原来的方程，所不同的是，$f_1(x),g_1(x),h_1(x)$ 比 $f(x),g(x),h(x)$ 的次数要小 1.

于是经过有限次后必可以使得式(1.5)的左边为零次多项式,即为某个常数 c,使得

$$c = x(g_k^2(x) + h_k^2(x)) \tag{1.6}$$

比较两边的次数易得 $c=0$,代入式(1.6),有

$$g_k^2(x) + h_k^2(x) = 0$$

于是

$$g_k(x) = h_k(x) = 0$$

那么 $f(x),g(x),h(x)$ 都是某个多项式乘以0.

由此可推得 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

例1-1-6 设在数域 P 上的多项式 $g_1(x),g_2(x),g_3(x),f(x)$,已知 $g_1(x)\mid f(x)$, $g_2(x)\mid f(x)$,$g_3(x)\mid f(x)$,试问下列命题是否成立,并说明理由.

(1) 如果 $g_1(x),g_2(x),g_3(x)$ 两两互素,则一定有 $g_1(x)g_2(x)g_3(x)\mid f(x)$;

(2) 如果 $g_1(x),g_2(x),g_3(x)$,则一定有 $g_1(x)g_2(x)g_3(x)\mid f(x)$.

证明:(1)成立. 由 $g_1(x)g_2(x)g_3(x)\mid f(x)$,且 $(g_1(x),g_2(x))=1$,得 $g_1(x)g_2(x)\mid f(x)$,又由 $g_1(x),g_2(x),g_3(x)$ 两两互素,得 $(g_1(x),g_2(x),g_3(x))=1$,由 $g_3(x)\mid f(x)$,得 $g_1(x)g_2(x)g_3(x)\mid f(x)$.

(2) 不成立. 可取 $g_1(x)=x,g_2(x)=x^2,g_3(x)=x-1,f(x)=x^2(x-1)$,显然满足题目条件,但是有 $g_1(x)g_2(x)g_3(x)\nmid f(x)$.

例1-1-7 设多项式 $f(x)\neq 0,h(x)$ 为任意多项式,求证:若 $(f(x),g(x))=1$,则 $(f(x),g(x)h(x))=(f(x),h(x))$. 反之是否成立?

证明:令 $(f(x),h(x))=d(x)$,得

$$\left(\frac{f(x)}{d(x)},\frac{h(x)}{d(x)}\right) = 1$$

又由已知条件 $(f(x),g(x))=1$ 可知

$$\left(\frac{f(x)}{d(x)},g(x)\right) = 1$$

由互素多项式的性质可知

$$\left(\frac{f(x)}{d(x)},\frac{h(x)}{d(x)}g(x)\right) = 1$$

于是

$$(f(x),g(x)h(x)) = d(x) = (f(x),h(x))$$

反之,其逆命题不成立.

设 $f(x)=x^2,h(x)=x^2,g(x)=x$,显然有

$$(f(x),g(x)h(x)) = (f(x),h(x)) = x^2$$

但是 $(f(x),g(x))=x\neq 1$.

例1-1-8 设在数域 P 上的多项式 $f(x),h(x),g(x)$ 只有非零常数因子,求证:存在多项式 $u(x),v(x),w(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)+w(x)h(x)=1$.

证明:由已知条件可知 $(f(x),h(x),g(x))=1$.

不妨设$(f(x),g(x))=d(x)$,那么有

$$(f(x),h(x),g(x)) = (d(x),h(x)) = 1$$

于是存在$u_1(x),w(x)$使得

$$u_1(x)d(x) + w(x)h(x) = 1 \tag{1.7}$$

显然存在$u_2(x),v_2(x)$使得

$$d(x) = u_2(x)f(x) + v_2(x)g(x)$$

代入式(1.7),有

$$u_1(x)u_2(x)f(x) + u_1(x)v_2(x)g(x) + w(x)h(x) = 1$$

令$u(x)=u_1(x)u_2(x),v(x)=u_1(x)v_2(x)$即得结论.

例1-1-9 设$f(x),g(x)$不全为零,求证:$(f,g)^n=(f^n,g^n)$,n为正整数.

证明:令$d(x)=(f(x),g(x))$,则需证明的方程可改为$d^n(x)=(f^n(x),g^n(x))$.

因为$d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$,所以

$$f(x) = d(x)f_1(x),g(x) = d(x)g_1(x),\text{且}(f_1(x),g_1(x)) = 1 \tag{1.8}$$

于是$f^n(x)=d^n(x)f_1^n(x),g^n(x)=d^n(x)g_1^n(x)$,此即$d^n(x)\mid f^n(x),d^n(x)\mid g^n(x)$,再由式(1.8),有$(f_1^n(x),g_1^n(x))=1$,从而存在$u(x),v(x)$使得

$$u(x)f_1^n(x) + v(x)g_1^n(x) = 1$$

两边乘$d^n(x)$,有

$$d^n(x)u(x)f_1^n(x) + d^n(x)v(x)g_1^n(x) = d^n(x) \tag{1.9}$$

对$\varphi(x)\mid f^n(x),\varphi(x)\mid g^n(x)$,由式(1.9)知$\varphi(x)\mid d^n(x)$,故$d^n(x)=(f^n(x),g^n(x))$.

例1-1-10 求满足以下条件的三次多项式$f(x)$:

(1) $x-3$整除$f(x)$;

(2) $x+3$除$f(x)$的余数是4;

(3) $x+2$除$f(x)$的余数等于$x-2$除$f(x)$的余数.

解:由(1)知$f(3)=0$,由(2)知$f(-3)=4$,由(3)知$f(2)=f(-2)$.

不妨设$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,将上述三个条件代入,得

$$\begin{cases} 27a + 9b + 3c + d = 0 \\ -27a + 9b - 3c + d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = -8a + 4b - 2c + d \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a = -\dfrac{2}{15} \\ c = \dfrac{8}{15} \\ d = 2 - 9b \end{cases}$$

于是满足条件的所有方程为

$$f(x) = -\frac{2}{15}x^3 + bx^2 + \frac{8}{15}x + (2 - 9b)$$

其中 b 可取任意常数.

例 1-1-11 求 $f(x)$,使得 $f(x)\mid f'(x)$.

解:方法一 由 $f(x)\mid f'(x)$ 可设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,并且

$$nf(x)=(x-a)f'(x)$$

两边逐次求导,整理得

$$(n-1)f'(x)=(x-a)f''(x)$$
$$(n-1)f''(x)=(x-a)f'''(x)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n-1)}(x)=(x-a)f^{(n)}(x)$$
$$f(x)^{(n)}=c$$

逐个回代,最后可见 $f(x)=\dfrac{c}{n!}(x-a)^n$(包含 $c=0$).

解:方法二 设 $f(x)=(x-a)^r g(x)$,$g(a)\neq 0$,于是

$$f'(x)=(x-a)^{r-1}[rg(x)+(x-a)g'(x)]$$

由 $f(x)\mid f'(x)$ 有 $rg(x)+(x-a)g'(x)\mid g(x)(x-a)$,设

$$(x-a)g(x)=h(x)[rg(x)+(x-a)g'(x)]$$

由此易见 $x-a\mid h(x)$. 设 $h(x)=h_0(x)(x-a)$,则

$$g(x)=rg(x)h_0(x)+h_0(x)g'(x)(x-a)$$

易见 $h_0(x)$ 为常数,不妨设为 c,则

$$(1-rc)g(x)=c(x-a)g'(x)$$

令 $x=a$ 可推出 $1=rc$,于是 $\deg g(x)=0$,从而 $n=r$,$f(x)=d\,(x-a)^n$(包含 $c=0$).

2)多项式的根

例 1-2-1 设 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 是 s 个互不相同的素数,且 n 是一个大于 1 的整数,则 $\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_s}$ 是有理数.

证明:设 $f(x)=x^n-p_1p_2\cdots p_s$,由 p_1 是素数,且 $p_1\nmid 1$,且 $p_1\mid p_1p_2\cdots p_s$,则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约,则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上无根,又知 $\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_s}$ 是 $f(x)$ 的根,且 $f(x)$ 的根都是实数,则 $\sqrt[n]{p_1p_2\cdots p_s}$ 是有理数.

例 1-2-2 设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,若 n 为偶数,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都为奇数,则 $f(x)$ 无整数根.

证明:反证法 假设 α 是 $f(x)$ 的整数根,则

$$f(x)=(x-\alpha)(x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots+b_{n-2}x+b_{n-1})$$

又 $f(\alpha)=\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n$,而 $\alpha\mid\alpha^n,\alpha^{n-1},\cdots,\alpha$,知 $\alpha\mid a^n$,又 a^n 为奇数,则 α 为奇数,又 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都为奇数,由于奇数个奇数的和仍为奇数,知 $f(\alpha)$ 为奇数,但与 $f(\alpha)=0$ 矛盾,所以 $f(x)$ 无整数根.

例 1-2-3 数域 F 上任意一个不可约多项式在复数域内无重根.

证明:设 $f(x)$ 在数域 F 上不可约,则 $(f(x),f'(x))=1$,由最大公因式不因数域的扩

大而改变，所以在复数域内$(f(x),f'(x))=1$，故$f(x)$在复数域内无重因式，从而$f(x)$在复数域内无重根.

结论：α是$f(x)$的$k(k>1)$重根，则α是$f'(x)$的$k-1$重根.

反之不对. $f(x)=\frac{1}{m+1}x^{m+1}-1$，$f'(x)=x^m$，0是$f'(x)$的$m$重根，但0不是$f(x)$的$m+1$重根.

例1-2-4 设实系数多项式$f(x)$的首项系数为$a_0>0$，且无实根. 求证：存在实系数多项式$g(x),h(x)$，使得$f(x)=g^2(x)+h^2(x)$.

证明：$f(x)$的复根成对出现，所以$f(x)$的次数为偶数. 设$x_1,x_2,\cdots,x_k,\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_k$为$\frac{1}{a_0}f(x)$的根，令$\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$，$\bar{\varphi}(x)=(x-\bar{x}_1)(x-\bar{x}_2)\cdots(x-\bar{x}_k)$，记$\varphi(x)=g(x)+\mathrm{i}h(x)$，$\bar{\varphi}(x)=g(x)-\mathrm{i}h(x)$，两式相乘，得$f(x)=[\sqrt{a_0}g(x)]^2+[\sqrt{a_0}h(x)]^2$.

例1-2-5 假设实系数多项式$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$的根都是实根，则$f'(x)$的一切根都是实根，且在$f(x)$的相邻两个实根之间有且仅有一个单根.

证明：$f(x)=a_0(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots(x-x_k)^{m_k}$，$x_1<x_2<\cdots x_k$，$m_1+m_2+\cdots m_k=n$，在区间$(x_1,x_2),(x_2,x_3),\cdots,(x_{k-1},x_k)$，由罗尔定理知$f'(x)$有根，设为$y_1,y_2,\cdots,y_{k-1}$，由于$(m_1-1)+(m_2-1)+\cdots(m_k-1)+k-1=n-1$，结论得证.

例1-2-6 设$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+1$，其中$a_i(i=1,2,3,4)$为整数. 又$a_1<a_2<a_3<a_4$. 则$f(x)$在有理数域上可约的充要条件是$a_4-a_3=1$.

证明：由多项式理论知，整系数多项式$f(x)$在有理数域上可约等价于$f(x)$可分解为两个次数较低的整系数多项式$g(x),h(x)$，使得$f(x)=g(x)h(x)$.

取$x=a_i(i=1,2,3,4)$，结合已知条件，得$g(a_i)=h(a_i)$. 又因为$g(x),h(x)$的次数均小于4，因此$g(x)=h(x)$. 进而$f(x)=g^2(x)$，因此，有

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)=g^2(x)-1=(g(x)+1)(g(x)-1)$$

注意到$a_1<a_2<a_3<a_4$及$(g(x)+1)(g(x)-1)=2$，得

$$a_1+a_4=a_2+a_3 \tag{1.10}$$

$$|a_1a_4-a_2a_3|=2 \tag{1.11}$$

将式(1.10)代入式(1.11)，得$|(a_3-a_1)(a_4-a_3)|=2$，因此$a_4-a_3=1$，$a_3-a_1=2$.

例1-2-7 设$f(x)$是复数域上的n次多项式，且$f(0)=0$. 令$g(x)=xf(x)$. 求证：如果$f(x)$的导数$f'(x)$能够整除$g(x)$的导数$g'(x)$，则$g(x)$有$n+1$重零根.

证明：由$f(0)=0$知0是$f(x)$的根. 又由$g(x)=xf(x)$得$g'(x)=f(x)+xf'(x)$. 由题设知$f'(x)\mid g'(x)$，从而由上式得$f'(x)\mid f(x)$，故$f(x)$有n重根. 由于0是$f(x)$的根，所以0是$f(x)$的n重根，即$f(x)=cx^n(c\neq 0)$，故$g(x)=xf(x)=cx^{n+1}$，即证$g(x)$有$n+1$重零根.

例1-2-8 设$f(x)=x^3+6x^2+3px+8$，试确定p的值并使得$f(x)$有重根并求其根.

解：注意$f'(x)=3(x^2+4x+p)$，要使$f(x)$有重根，那么必须有$(f(x),f'(x))\neq 1$，由$f(x)$对$f'(x)$做除法运算可知

$$3f(x)=f'(x)(x+2)+3(2p-8)(x-1)$$

若 $2p-8=0$,那么将 $p=4$ 代入,得

$$f(x)=(x+2)^3$$

其重根为 -2(3 重).

若 $2p-8\neq0$,那么必须有

$$(x-1)\mid f'(x)$$

即有 $f'(1)=0$,由此可得 $p=-5$,于是有

$$f(x)=(x-1)^2(x+8)$$

其重根为 1(2 重),-8(1 重).

3) 不可约多项式

例 1-3-1 变换多项式,利用艾氏判别法. 设 $f(x)=x^4+1$. 求证:$f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

证明:令 $x=y+1$,则 $f(x)=f(y+1)=(y+1)^4+1=y^4+4y^3+6y^2+4y+2$,取 $p=2$,$2\nmid 1$ $2\mid 4,6,4,2$,$f(y+1)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约,从而 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

事实上,$f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约 $\Leftrightarrow f(x+d)$,$d\in\mathbf{Z}$.

例 1-3-2 设 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$,$b,c,d\in\mathbf{Z}$,证明:如果是奇数,则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

证明:反证法. 假设 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约. 且设 $f(x)=(x+p)(x^2+qx+r)$,$f(0)=pr$,又知 $f(0)=d$,则 $d=pr$,又 $bd+dc=d(b+c)$ 是奇数,知 d,$b+c$ 是奇数,由 $d=pr$,则 p,r 均为奇数,从而 $f(1)=1+b+c+d$ 是奇数. 又 $f(1)=(1+p)(1+q+r)$ 是偶数,矛盾. 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

例 1-3-3 试在有理数域、实数域及复数域上将 $f(x)=x^9+x^8+x^7+\cdots+x+1$ 分解为不可约因式的乘积.(结果用根式表示),并说明理由.

解:由

$$\begin{aligned}(x-1)f(x)&=x^{10}-1\\&=(x-1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)\end{aligned}$$

可知它在有理数域上的不可约分解为

$$f(x)=(x+1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

(这里设 $g_1(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$,取 $x=y+1$ 代入,并对素数 5 用 Eisenstein 判别法可知 $g_1(y+1)$ 在有理数域上不可约. 同理设 $g_2(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$,并取 $x=y-1$ 代入,可知 $g_2(y-1)$ 在有理数域上不可约.)

设 $\alpha_1=e^{i\frac{2\pi}{5}}$,$\alpha_2=e^{i\frac{4\pi}{5}}$,$\beta_1=e^{i\frac{\pi}{5}}$,$\beta_2=e^{i\frac{3\pi}{5}}$,显然 1 的五次方根为 $1,\alpha_1,\bar{\alpha}_1,\alpha_2,\bar{\alpha}_2$;$-1$ 的五次方根为 $-1,\beta_1,\bar{\beta}_1,\beta_2,\bar{\beta}_2$. 于是在实数域上 $f(x)$ 可分解为

$f(x)=(x+1)(x^2-(\alpha_1+\bar{\alpha}_1)x+1)(x^2-(\alpha_2+\bar{\alpha}_2)x+1)(x^2-(\beta_1+\bar{\beta}_1)x+1)(x^2-(\beta_2+\bar{\beta}_2)x+1)$. 显然在复数域上 $f(x)$ 可分解为

$$f(x)=(x+1)(x-\alpha_1)(x-\bar{\alpha}_1)(x-\alpha_2)(x-\bar{\alpha}_2)(x-\beta_1)(x-\bar{\beta}_1)(x-\beta_2)(x-\bar{\beta}_2)$$

例 1－3－4 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的整数,$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$. 求证:$f(x)$不能分解为两个次数大于零的整系数多项式的乘积.

证明:假设$f(x)=g(x)h(x)$,其中 $g(x),h(x)$都是次数大于或等于 1 的整系数多项式,那么$g(a_i)h(a_i)=-1(i=1,2,\cdots,n)$,因此,$|g(a_i)|=|h(a_i)|=1$,且 $g(a_i)$与$h(a_i)$互为相反数,即$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)|(g(x)+1)(h(x)+1)$,$(f(x)+1)|(g(x)+1)(h(x)+1)$.

由于$f(x)=g(x)h(x)$,且$f(x)$为首项系数为 1 的多项式,由此得$f(x)+1=f(x)+g(x)+h(x)+1$,$g(x)=-h(x)$,$f(x)=-g^2(x)$,但是$-g^2(x)$首项系数为负整数,矛盾.

例 1－3－5 设 $\mathbf{R}$,$\mathbf{Q}$ 分别表示实数域和有理数域,$f(x),g(x)\in\mathbf{Q}[x]$. 求证:

(1) 若在 $\mathbf{R}[x]$中有 $g(x)|f(x)$,则在 $\mathbf{Q}[x]$中也有 $g(x)|f(x)$;

(2) $f(x)$与 $g(x)$在 $\mathbf{Q}[x]$中互素,当且仅当$f(x)$与 $g(x)$在 $\mathbf{R}[x]$中互素;

(3) 设$f(x)$是 $\mathbf{Q}[x]$中的不可约多项式,则$f(x)$的根都是单根.

证明:(1) 若在 $\mathbf{R}[x]$上 $g(x)|f(x)$,那么存在 $h(x)\in\mathbf{R}[x]$,使得$f(x)=g(x)h(x)$. 由$f(x),g(x)\in\mathbf{Q}[x]$,不妨设

$$
\begin{aligned}
g(x) &= a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\\
h(x) &= b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0\\
f(x) &= c_{m+n}x^{m+n}+\cdots+c_1x+c_0
\end{aligned}
$$

设 $b_i(i=0,1,\cdots,m)$中,从 $i=0$ 开始第一个不为零的有理数为 b_k. 那么由 $c_k=a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_kb_0$,可知 c_k 必不为有理数,这与$f(x)\in\mathbf{Q}[x]$矛盾. 于是有 $h(x)\in\mathbf{Q}[x]$,即在 $\mathbf{Q}[x]$上 $g(x)|f(x)$.

(2) 必要性显然. 下证充分性.

若$f(x)$与 $g(x)$在 $\mathbf{Q}[x]$中不互素,不妨设 $d(x)=(f(x),g(x))$,那么存在有理数域上的两个多项式 $u(x),v(x)$使得 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$,且在有理数域上有

$$d(x)|f(x),d(x)|g(x)$$

将 $d(x),f(x),g(x)$看作实数域上的多项式,那么在实数域上,$d(x)$是$f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式,显然在实数域上 $f(x)$与 $g(x)$不互素,由其逆否命题知充分性成立.

(3) 由$f(x)$是 $\mathbf{Q}[x]$中的不可约多项式,那么在有理数域上有$1=(f(x),f'(x))$(否则与$f(x)$是不可约多项式相矛盾),由(2)中的结论知在复数域上有$1=(f(x),f'(x))$成立,这意味着在复数域上 $f(x)$没有重根.

4) 最大公因式

例 1－4－1 (1) 如果$d(x)|f(x),d(x)|g(x)$,且 $d(x)$为$f(x)$与 $g(x)$的一个组合. 证明:$d(x)$是$f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式.

(2) 设$f(x)=x^3+(1+k)x^2+2x+2l$ 与 $g(x)=x^3+kx^2+l$ 的最大公因式是一个二次多项式,求 k,l 的值.

证明:(1) 显然 $d(x)$是$f(x)$与 $g(x)$的一个公因式,下面要证明它是最大公因式. 任取$h(x)|f(x),h(x)|g(x)$,由于 $d(x)$可以表示为 $f(x)$与 $g(x)$的一个组合,那么有 $h(x)|d(x)$,即 $d(x)$是$f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式.

(2) 由于$f(x),g(x)$与$f(x),f(x)-g(x)$有相同的最大公因式,设