



普通高等教育“十二五”规划教材

数学教学技能系列丛书

丛书主编/冯伟贞 何小亚

高中数学实验活动选编

主 编 冯伟贞

副主编 张艳虹 苏洪雨 许伟亮



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

数学教学技能系列丛书

丛书主编/冯伟贞 何小亚

高中数学实验活动选编

主 编 冯伟贞

副主编 张艳虹 苏洪雨 许伟亮

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书采用了45个高中数学实验活动设计,对中学数学实验活动的概念、教学原则及教学组织方法进行了深入解读.全书共分11章,包括数学实验活动与数学教学、函数实验、立体几何实验、解析几何实验、统计与概率实验、解三角形实验、数列实验、不等式与线性规划实验、微积分实验、综合实验、数学建模等.本书的实验设计内容基本与高中数学教学内容同步,其中基于计算机的实验都是使用几何画板、Excel、Flash等提供了较完善的视窗化操作系统的大众化操作平台.附带光盘录入了支持45个实验活动的71个课件及华南师范大学数学科学学院师范生的实验报告样例.数字资源还可以通过登录相关网站获取.

本书可供普通高等院校数学专业师范生作为教材使用,也可供高中数学教师、高中学生作为科普读物选读.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学实验活动选编/冯伟贞主编. —北京:科学出版社,2016.1

(数学教学技能系列丛书/冯伟贞,何小亚主编)

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-047103-1

I. ①高… II. ①冯… III. ①中学数学课-实验-教学设计-高等学校-教材
IV. ①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第012132号

责任编辑:姚莉丽/ 责任校对:张凤琴

责任印制:霍兵/ 封面设计:陈敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新科印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年1月第一版 开本:787×1092 1/16

2016年1月第一次印刷 印张:15 3/4

字数:373 000

定价:45.00元(含光盘)

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《数学教学技能系列丛书》编委会

主 编 冯伟贞 何小亚

顾 问 史宁中(东北师范大学教授、博士生导师)

宋乃庆(西南大学常务副校长、教授、博士生导师)

徐斌艳(华东师范大学教科院副院长、教授、博士生导师)

曹一鸣(北京师范大学数学科学学院教授、博士生导师)

王光明(天津师范大学数学科学学院教授、博士生导师)

孔凡哲(东北师范大学教师教育学院教授、博士生导师)

编 委(按姓氏笔画排序)

王林全(华南师范大学)

王宽明(贵州师范学院)

卢建川(广州大学)

邬振明(惠州学院)

何小亚(华南师范大学)

吴有昌(广东教育研究院)

吴跃忠(华南师范大学)

张占亮(肇庆学院)

张映姜(湛江师范学院)

张艳虹(华南师范大学)

陈星荣(嘉应学院)

林全文(广东石油化工学院)

姚 静(华南师范大学)

徐章韬(华中师范大学)

常进荣(昆明学院)

曾 峥(佛山科学技术学院)

谢明初(华南师范大学)

廖运章(广州大学)

《高中数学实验活动选编》编写组

主 编 冯伟贞

副主编 张艳虹 苏洪雨 许伟亮

编 委(按姓氏笔画排序)

李少娥 陈 奕 陈结静 沈源钦

罗文玉 顾明哲 梁 填

《数学教学技能系列丛书》扩版序言

《数学教学技能系列丛书》将收入新成员《数学教育研究与测量》、《数学教育论文写作与案例分析》和《高中数学实验活动选编》。

现代的教师必须会研究教育现象,而“为想从事数学教育工作的新手开启教育研究之门”,这至今仍是一个需要很多人共同努力才能达成的目标。《数学教育研究与测量》、《数学教育论文写作》的编写旨在这一方面做一些工作。

《数学教育研究与测量》分上、下篇。书的上篇围绕“如何确定研究问题?怎样查阅文献?怎样写文献综述?如何进行定量、定性研究的研究设计?如何做实验研究?如何做调查研究?如何进行抽样设计?如何撰写开题报告与研究报告?”这些研究的专业技术,阐述了数学教育研究的理论和方法;下篇主要解决数学教育测量的内涵、工具以及分析和检验方法等方面的问题。《数学教育论文写作与案例分析》从如何在日常教学中发现问题、提炼问题出发,结合案例探讨论文写作的方法及技巧。书中案例均取自华南师范大学数学科学学院的《中学数学研究》杂志。

数学基础教育应该使学生能够从多种角度获得对数学基础知识、基本方法、基本技术的较全面的感知,这是学生能够活学数学、活用数学的重要保证,也使得对数学的“经验与演绎”二重品质的展现成为数学基础教育的一项必要的工作,于是,数学实验技能也成为现代数学教师必备的教学技能之一。

但不难发现,目前的教学中,对数学经验性的教学是严重缺失的。深究其原因,首先是中学教材现有的一点实验教学材料不多,而且在实际教学中往往被忽略,其次是进行实验教学的素材不够丰富,也未能贴近教学实际。目前中学数学实验教学的可操作性很低。《高中数学实验活动选编》是与现行高中数学教材内容基本同步的数学实验活动素材汇编。该书的编写一方面是为了帮助读者进行数学实验基本技能的培养,另一方面是帮助高中的师生能够将数学实验活动融入日常的数学教学活动,增进对数学“经验性”的感知。

新增的三本教材,融入了编者对数学教学技能的新的理解及解读。期待使用本丛书的师生提出宝贵的意见和建议。

冯伟贞

2014年11月24日于华南师范大学

《数学教学技能系列丛书》序言

应对新时代、新的教育理念和新课程改革的挑战,促进教师的专业发展是根本策略,而数学教师专业素质的培养和提升是其中的核心问题。

数学教师专业素质是在一般素质基础上形成和发展起来的数学教师职业基础性和通识性的素养和品质,包括数学素养和品质、数学教育教学理论素养和品质和数学教学技能。对于数学素养、数学教育教学理论素养的内涵,以及其作为数学教师专业素质结构组成部分的重要性,已经成为人们的共识。在数学师范生的培养方案中,一般通过数学学科基础课群、数学专业课群、教育学及心理学基础课群和数学教育课群的设置来实现培养目标。

数学教学技能是数学教师在数学教学过程中,运用数学专业知识和教学理论及教学经验,使学生掌握学科基础知识、基本技能并受到思想教育等所采用的一系列教学行为方式,也是以教学操作知识为基础的心智技能与动作技能的统一。动作技能包括一系列外部可见的机体动作,如语音、语调、语速、板书、绘图等,包括口语表达技能、书面表达技能、仪器操作技能在内的部分。心智技能则主要指教师基于自身的数学素养及数学教学素养完成的心智活动方式,包括讲解、提问、抽象概括、对教学对象各种数学素质和知识能力水平的诊断等。在实际教学过程中,动作技能与心智技能是交叉在一起,不可分割的。但从对数学教学技能结构的解剖不难发现,教师的数学教学技能首先是教师基于个人数学素养、数学教育教学素养的外显行为方式,是教师实现个人相关素养的有效外显、有效传递及有效迁移的工具。

目前在师范生教学技能的培养中,“重视动作技能,轻视数学思想内化,轻视数学教育教学理论内化”的现象是普遍存在的,学生的“心智技能”的形成相对滞后。这与目前数学师范生培养的课程设置及课程内容中,数学学科知识学习、数学教育教学理论学习与教学技能培养三方面被割裂有重要关系,而学生本人也往往缺少打通三方关联的意识及能力。

本丛书以“中学数学教学设计”、“中学数学解题研究”、“中学数学教学技术”为立足点,着力于建立数学学科知识与思想方法、数学教育教学理论和数学教学技能三方融合的平台,为学生“心智技能”的养成提供支持。

教学技能的生成遵循“初步感知→机械模仿→灵活运用→拓展创新”这一发展历程。本丛书的编写力求体现教学技能的这一发展历程,为读者提供丰富的案例,以促进数学教学技能素养的形成、强化和提高。

本丛书以科学出版社2008年“普通高等教育‘十一五’规划教材·高等师范院校数学教育系列丛书”为基础修订、扩充而成的。具体工作包括:

(1) 新增编著《中学数学教学设计案例精选》作为《中学数学教学设计》一书的配套用书。《中学数学教学设计案例精选》为读者提供类型丰富的教学设计案例,力求使读者通过

对案例的学习、比较和研究来提高数学教学设计能力. 对案例的解读、点评及修改指引有效融合了大量的数学学科知识、思想方法及数学教育教学理论的解读及运用指引.

(2) 修订完善《中学数学教学设计》一书, 使其更简洁、更实用.

(3) 对《中学数学解题研究》一书以“简洁思路及表述, 强化解题方法与技巧, 丰富案例”为原则进行修订.

(4) 对《中学数学教学技术》一书, 从原来侧重数学定量分析与信息技术相结合的定位, 向全面解决数学教学中定性分析、定量分析与信息技术相结合转移, 力求使读者更全面把握信息技术在解决数学教学过程中问题情境设置、图形定性及定量分析、数值分析与计算、数学探究等方面的辅助功能.

(5) 新增编著《中学数学课件制作案例精选》(电子读物). 这一电子读物收录了华南师范大学数学科学学院历届本科学生的优秀作品, 其中包括多件在全国、广东省多媒体课件制作竞赛中的获奖作品. 电子读物对相关课件的教学设计、技术设计及制作技巧作了详细的剖析.

借此机会感谢华南师范大学数学科学学院对本丛书的编写所给予的精神上及经费上的大力支持, 感谢兄弟院校对本丛书的热情支持、积极推介和广泛使用. 对科学出版社的领导对本丛书的大力支持, 对编辑们的辛勤劳动表示由衷的敬意和诚挚的谢意.

希望数学家、数学教育家以及使用这套丛书的各兄弟院校师生, 对本丛书的使用提出宝贵意见和建议, 使它们在实践中不断完善, 为我国的数学教师专业发展发挥更好的作用.

冯伟贞

2011年7月1日于广州华南师范大学

前 言

数学实验活动不是一个新的话题. 本书把它作为一个新的话题去审视, 首先源于编者的一个思考: “怎样才能做到活学、活用、活教?” 能够看清问题的本质, 才能游刃有余地解决问题. 数学有经验与演绎二重性. 现在的数学教育(从中小学数学教育到大学数学教育), 确实都比较片面地强调数学演绎性, 忽略数学经验性. 在数学教学都只剩下形式化操作时, 对数学的本质属性解读被弱化了, 学生对数学的实用性、适用性和趣味性的感悟也所剩不多了. 编者认为, 即使在应试之风盛行的今天, 绝大多数中学教师和学生都已经疲于奔命的时候, 也总要寻找出一些可行的路径引向对数学更全面、更到位的解读, 这是每一个数学教育工作者的良心工程. 编者也相信, 能够深化对数学本质认识的、深化对数学各种结构的认知的、深化对数学应用解读的工作, 一定是能够避免教学双方陷入茫茫题海不能自拔的高效工作.

编写这本书的第二个考虑, 是编者在翻阅了众多的文献后, 发现这些文献大部分都把数学实验定位在“基于计算机的实验”. 这种解读已经造成教学双方对数学实验的诸多误解, 恐怕也是中学数学实验教学没能得到该有的重视和普及的重要原因.

编写这本书的第三个考虑, 是目前市面上的高中数学实验教材, 除了基本都定位在“基于计算机的实验”之外, 还有一个导致所设计的实验无法在中小学普遍推广使用的不足, 就是实验所使用的操作平台基本是 Matlab、Mathematica、几何画板(或超级画板)或特定的手持计算器等数学专用软件或经过二次开发后的操作平台. 这些平台或者要求使用者具备一定的软件解读能力和编程能力, 或者在经济上对使用者提出了一定的要求, 对中小学一线师生来说都不是最合适的操作平台.

本书首先对中学数学实验活动的概念、定位和教学原则作分析, 并通过 45 个高中数学实验活动设计深化这种解读. 本书的实验设计内容基本与高中数学教学内容同步, 其中基于计算机的实验都是使用几何画板、Excel 和 Flash 等提供较完善的视窗化操作系统的大众化操作平台, 没有特殊的平台要求.

本书对中小学一线的数学教师和在读的师范生来说是一种知识回炉的工具, 是课堂内外实验设计的参考. 对高中的同学来说是一本对现有教材的重要参考书, 是掌握数学实验方法的起点. 编者期待, 这本书的出现能够为大、中、小学的数学师生提供一种数学教与学的好的视角, 提供一条数学教与学的执行路径, 并重新审视数学教学的有效性.

本书录入的实验活动设计均经由华南师范大学数学科学学院 2009 级、2010 级、2011 级、2012 级和 2013 级数学与应用数学(师范)专业的学生在课外活动或数学师范实验课中实践操作过. 同学们富有创意的实践成果是对本书的重要支持. 编者在此表达衷心的感谢!

作为一种新的尝试,书中的疏漏和不足在所难免,敬请读者批评指正。

冯伟贞

2015年5月于华南师范大学

使用说明

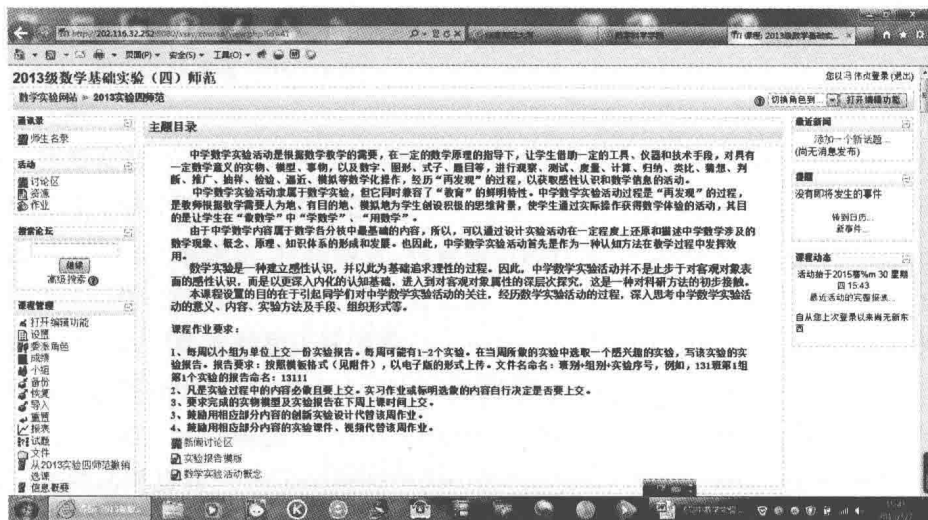
本教材由纸质主教材 1 本和电子书 1 本构成。电子书以光盘附于纸质教材,也可以通过在线服务网址(<http://www.sciencereading.cn/>),进入 ScienceReading 首页,选择“网上书店”,输入图书名称检索,进入图书详情页可看到“资源下载”)获取。

纸质主教材主要编入对中学数学实验活动的概念、教学原则及教学组织方法的解读,并通过编入 45 个高中数学实验活动设计深化这些解读。电子书则录入支持 45 个实验活动的 71 个课件及华南师范大学数学科学学院师范生的实验报告样例。为保留实践活动的真实性,为读者提供研究实践活动的素材,编者对录入的实验报告都未加修改。电子书的具体使用方法见本书附录。

本书的实验设计可以选用作为中学课堂教学设计的一部分,也可以作为中学校本课程修课的内容。电子书提供的课件能够较充分支持高中数学日常教学。

建议高中学生能够把本书作为与教材同步使用的参考书来阅读,配合电子书完成一些基本的操作,并适当选择一些主题任务在周末、假期等课余时间以小组合作的方式进行实践活动。

华南师范大学数学科学学院自 2012 级起设数学基础实验(高中数学实验)课程,在本科第四学期开设,是必修课程,计 1 学分。课程教学采用混合教学和小组合作学习的方式,运用数学实验网站发布课程要求、资料 and 相关信息,教师每周作 2 学时的现场解读及答疑。学生用 1 周时间完成 1 个主题实验任务。学习小组由学生自行组建,每 3~5 个学生一组共同完成实验任务。



目 录

《数学教学技能系列丛书》扩版序言

《数学教学技能系列丛书》序言

前言

使用说明

第 1 章 数学实验活动与数学教学	1
1.1 什么是中学数学实验活动	1
1.1.1 什么是数学实验?	1
1.1.2 什么是中学数学实验活动?	2
1.2 观察 归纳 类比 猜想	3
1.2.1 数学观察	3
1.2.2 归纳	4
1.2.3 类比	4
1.2.4 猜想	5
1.3 数学实验活动与数学教学	6
1.3.1 数学教学需要数学实验活动	6
1.3.2 中学数学实验教学的基本模式	9
1.4 数学实验教学执行建议	11
1.4.1 数学实验教学执行的八大原则	11
1.4.2 对学生的实验学习评价	13
1.4.3 教师条件准备	13
参考文献	14
第 2 章 函数实验	15
实验 2.1 用计算机描绘函数图象	16
实验 2.2 探究幂函数、指数函数、对数函数的性质	21
实验 2.3 借助信息技术求方程的近似解	24
实验 2.4 认识弧度制和正弦函数	27
实验 2.5 探究函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象	32
实验 2.6 建立函数模型	34
第 3 章 立体几何实验	40
实验 3.1 做盒子	42
实验 3.2 欣赏美妙几何体	45

实验 3.3	直观图与三视图	48
实验 3.4	几何体的体积探究	51
实验 3.5	空间点线面位置关系的辨识	55
实验 3.6	关于异面直线的两个度量	59
实验 3.7	关于线面位置关系的度量	64
实验 3.8	关于面面位置关系的度量	67
实验 3.9	折叠问题	71
实验 3.10	欧拉公式中的归纳与猜想	74
实验 3.11	椅子设计之旅	77
第 4 章	解析几何实验	79
实验 4.1	魔术师的地毯	81
实验 4.2	平面图形的的基本变换	85
实验 4.3	三角形的外接圆、内切圆和旁切圆	90
实验 4.4	欣赏动圆	96
实验 4.5	关于圆锥曲线产生的三个经典实验	99
实验 4.6	建立圆锥曲线方程	104
实验 4.7	圆锥曲线与天文、建筑	107
实验 4.8	手电筒、酒杯	111
实验 4.9	做一个曲线图集	113
第 5 章	统计与概率实验	117
实验 5.1	设计抽样方法	119
实验 5.2	Excel 在统计中的应用	120
实验 5.3	设计调查并完成调查报告	122
实验 5.4	认识概率	123
第 6 章	解三角形实验	127
实验 6.1	解三角形的进一步讨论及模拟测量	129
实验 6.2	实地测量	133
第 7 章	数列实验	135
实验 7.1	游戏中的数列	135
实验 7.2	生活中的数列	138
实验 7.3	斐波那契数列	141
实验 7.4	杨辉三角和莱布尼茨三角	144
实验 7.5	分形几何中的自相似与迭代	147
第 8 章	不等式与线性规划实验	151
实验 8.1	构造不等式	152
实验 8.2	图解法解线性规划问题	156

实验 8.3 利用 Excel 求解线性规划问题	158
第 9 章 微积分实验	160
实验 9.1 导数的概念	161
实验 9.2 利用几何画板探究含参量函数的性质	167
实验 9.3 定积分的概念	175
第 10 章 综合实验	179
实验 10.1 探究圆周率	179
实验 10.2 玩游戏,悟数学	183
本章附录 1	187
本章附录 2	195
第 11 章 数学建模	200
11.1 数学建模与数学实验	200
11.2 中学数学建模一般方法	202
11.3 中学数学建模的内容	223
参考文献	226
附录 1 课件目录	227
附录 2 电子书使用说明	229

第1章 数学实验活动与数学教学

1.1 什么是中学数学实验活动

1.1.1 什么是数学实验?

在物理学习中,我们会通过观察小车的运动研究惯性及摩擦力的存在,会利用弹簧创设研究拉力形成的条件,会利用各种仪表检测电流中各种量的大小及其相互制约关系.在化学学习中,会通过燃烧确认氧气的存在,通过石灰石和盐酸的相互作用等探讨酸碱盐的化学反应.在生物学习中,会在显微镜下观察草履虫的结构和活动,会解剖青蛙了解它的身体结构.我们可以回想出好些在这些学科学习中做过的事.于是,物理有实验,化学有实验,生物也有实验,成为我们的共识.但是,什么是实验?

一般认为,实验是研究者根据确定的认识目的,应用特定的物质手段,对认识对象进行控制,使对象按照自身的意愿发生变化,从而对认识对象进行观察和分析的认识方法.也即实验首先是一种“认识方法”、“研究方法”;其次实验有明确的研究对象;第三,实验讲究分析、控制认识对象的“手段”;第四是实验有物质材料的运用.不论是物理实验、化学实验还是生物实验,都具备上述“实验”的特征.

数学,作为一种以形式论证(逻辑推理)特征广为人们接受的“思维操”,是否有实验?

18—19世纪有突出贡献的数学家欧拉(Euler, 1707—1783)和高斯(Guass, 1777—1855)都曾发表过一些经验之谈.欧拉说过,“数学这门科学,需要观察,还需要实验”.高斯也提到过,他的许多定理都是靠实验、归纳法发现的^[1].

D. 希尔伯特,这位公理化理论的斗士,在1900年巴黎国际数学家代表大会上作了著名的《数学问题》演讲,提出了具有深远影响意义的23个Hilbert问题.他在演讲中对数学问题作了如下论述:“数学这门科学究竟以什么作为其问题的源泉呢?在每个数学分支中,那些最初、最老的问题肯定是起源于经验,是由外部的现象世界所提出的.”^[2]

冯·诺依曼在论文《数学家》中有以下的论述:“数学有十分特殊的二重性,必须认识它、接受它,并把它吸收到这门学科的思想中.”“几何学在古代起源于经验,它之所以成为一门学科,与今天的理论物理学的情况并无二致.”“微积分学比其他任何事物更明显地表明现代数学的开端,而且,作为其逻辑发展的数学分析体系,仍然是精密思维中最伟大的技术进展.微积分明显来源于经验.”^[2]

徐利治先生在《数学方法论选讲》中表述了如下观点:“为什么数学真理如同物理学科的领域的定律和原理那样,有时可以通过实验与归纳的方法去发现呢?原因很简单,因为数学对象本身(如数量形式和空间结构)也具有客观实在性.”^[1]

那么,什么是数学实验?

数学实验既非数学在通常实验中的运用,或通常实验在数学研究中的移植,也不能轻易地说成是它们的有机结合^[3].

追寻数学家的足迹,我们发现很容易找到许多与以下片段类似的感悟:

“如果必须把数仅仅看成纯理性的概念,我们就很难理解观察和假想实验怎么能用于研究数的性质。”事实上,“今天人们所知道的数的性质,几乎都是由观察所发现的,并且早在用严格论证确认其真实性之前就被发现了。”——欧拉^[4]

“我珍视类比胜于任何别的东西,它是我最可信赖的老师,它能揭示自然界的秘密,在几何学中它应该是最不容忽视的。”——开普勒^[4]

“甚至在数学里,发现真理的主要工具也是归纳和类比。”——拉普拉斯^[4]

生物学家、数学家 R. A. Fisher 获取观察资料的方法很特别。他将 66 年的施肥、田间试验和气候资料加以整理,提取信息,为他的理论研究打下基础^[3]。

20 世纪 40 年代美国在第二次世界大战中研制原子弹的“曼哈顿计划”的成员 S. M. 乌拉姆和 J. 冯·诺依曼提出了蒙特卡罗方法——随机模拟法。这种方法的原理,是在计算机上尽可能真实地创造一种实验环境,在这种环境中重现所要描述的客观现象,从而对这种现象的某些规律作出描述、判断、预测。

纵观前人的经验,我们认为,所谓数学实验,是指在一定的数学思想、数学理论指导下,经过某种预先的组织设计,借助于一定的仪器和技术手段,进行数学化操作(包括对客观事物的数量化特性进行观察、测试、度量、计算、归纳、类比、猜想、判断、推广、抽样、检验、逼近、模拟等),进而获得对客观对象的认知经验、探求对客观对象的控制手段或技术的方法。

这里的“客观对象”是指具有一定数学意义的实物、模型、事件以及数字、图形、式子和命题等。观察、测试、度量是数学的实际操作,而计算、归纳、类比、猜想、判断、推广是在实际操作基础上进行的数学化推演^[3]。抽样、检验是在不能预先知道随机现象分布时使用的描述随机现象的方法。逼近是在无法求出模型明确的解析解时采用的探究方法。而模拟,正如前面所述,是一种基于对客观现象的数值仿真描述进行深入探究的方法。

数学实验是认识活动,有明确的认识对象,讲究实验手段及操作,因此,数学实验具备一般实验的基本要素。

1.1.2 什么是中学数学实验活动?

中学数学实验活动不完全等同于数学实验,它是根据数学教学的需要,在一定的数学原理的指导下,让学生借助一定的工具、仪器和技术手段,对具有一定数学意义的实物、模型、事件,以及数字、图形、式子、题目等,进行观察、测试、度量、计算、归纳、类比、猜想、判断、推广、抽样、检验、逼近、模拟等数学化操作,经历“再发现”的过程,以获取感性认识和数学信息的活动。

中学数学实验活动隶属于数学实验,但它同时兼容了“教育”的鲜明特性。中学数学实验活动过程是“再发现”的过程,是教师根据教学需要人为地、有目的地、模拟地为学生创设积极的思维背景,使学生通过实际操作获得数学体验的活动,其目的是让学生在“做数学”中“学数学”、“用数学”。

由于中学数学内容属于数学各分支中最基础的内容,所以可以通过设计实验活动在一定程度上还原和描述中学数学涉及的数学现象、概念、原理、知识体系的形成和发展。也

因此,中学数学实验活动首先是作为一种认知方法在教学过程中发挥效用.

数学实验是一种建立感性认识,并以此为基础追求理性的过程.因此,中学数学实验活动并不是止步于对客观对象表面的感性认识,而是以更深入内化的认知基础,进入到对客观对象属性的深层次探究,这是一种对科研方法的初步接触.

1.2 观察 归纳 类比 猜想

就数学实验活动这个问题,我们觉得首先需要了解“观察”、“归纳”、“类比”及“猜想”.

1.2.1 数学观察

数学中的“观察”是人们有目的、有计划地进行对数学对象的感知和识别.换言之,“观察”不是随意注意,观察活动是带着一定的目的、在某种想法的指引下进行的.

例如,如图 1.1 所示,观察 $\triangle ABC$ 三边中点 D, E, F , 三条高的足 G, H, I , 垂心与顶点连线的中点 J, K, L , 这九点是否共圆?

这个问题的特点是点较多,要一下就“看出”结论是很困难的,可以制定一些计划帮助完成观察.

观察计划一 作圆. 过其中三点作圆,看看其他点是否落在该圆上;或把九个点分成三组作三个圆,看看三个圆是否重合.

观察计划二 以证明四点共圆的方法为基础,把点分组,能否得出关于这九点共圆的结论?

观察计划三 在一个平面直角坐标系中,作一些三角形,把九点的坐标量出来或求出来,看看这九点的坐标规律是否反映了共圆.

当然还有很多可尝试的计划.但是不难发现,这些计划之所以能够制定出来,都来源于一定的经验和知识基础.经验可以在实践中积累,而知识越丰富,往往越能产生更多、更好的想法.

数学观察与其他学科观察的最大差别在于观察对象.数学观察的对象是数、量、函数、图形、集合等,具有一定的抽象性.数学观察的对象又有一定的可变性,即在观察中可以对这些对象作重组、变形,这使得对同一观察对象,不同观察者感知到的东西会不完全相同.

例如,观察函数 $f(x) = \frac{2x^3 + 3x - 22}{(x-2)^{100}}$ 的表达式.这里怎样看待分母中差的高次幂是一个重点.当然二项式定理是一个可能的工具.但二项式展开也可能把分母复杂化.若作一个简单的变形: $t = x - 2$,则对象可以变为

$$F(t) = f(t+2) = \frac{2(t+2)^3 + 3(t+2) - 22}{t^{100}}.$$

这里分母得到简化,对问题的解决可能有一定帮助.观察中若能善用数学对象的这种可变性,往往会有意想不到的收获.

如实反映观察对象的属性是观察的关键.但由于知识的不足或能力上的缺乏,观察过

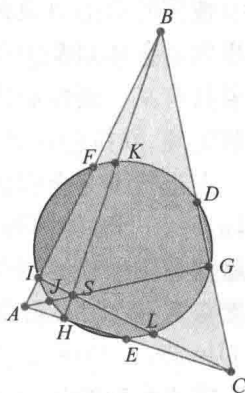


图 1.1