

教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习考试辅导教材

(专科起点升本科)

2014
高教版

(第11版)

本书编写组

高等数学(一)



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习考试辅导教材

(专科起点升本科)

高等数学(一)

Quanguo Gelei Chengren Gaokao Fuxi Kaoshi Fudao Jiaocai
(Zhuanke Qidian Sheng Benke)

Gaodeng Shuxue (Yi)

(第11版)

本书编写组



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.1/《高等数学》编写组编.--11 版.

--北京:高等教育出版社,2014.2

全国各类成人高考复习考试辅导教材.专科起点升本科

ISBN 978-7-04-032745-8

I. ①高… II. ①高… III. ①高等数学-成人高等教育-升学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 020110 号

策划编辑 孙淑华
责任编辑 雷旭波

封面设计 李树龙
版式设计 余 杨

责任校对 胡美萍

责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 唐山市润丰印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 11.25
字 数 260 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landracom.com>
<http://www.landracom.cn>
版 次 2000 年 9 月第 1 版
2014 年 2 月第 11 版
印 次 2014 年 2 月第 1 次印刷
定 价 21.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 32745-00



出版前言

由教育部高校学生司和教育部考试中心制订颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(专科起点升本科)》规定了哲学、文学、历史学、法学、教育学、理学、工学、经济学、管理学、农学和医学等学科的考试科目和复习考试内容,共编为5册,由我社独家出版。

为了满足广大考生复习备考的需求,我们组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授、前大纲编写修订和考试命题研究人员,编写了与考纲配套的系列复习考试辅导教材,包括《政治》《英语》《教育理论》《大学语文》《艺术概论》《高等数学(一)》《高等数学(二)》《民法》《生态学基础》和《医学综合》共10册。该系列教材问世10余年来,历经多次修订和完善,整体质量不断提高,结构更趋科学、合理,因此深受广大考生的好评和喜爱。

该系列辅导教材得到教育部高校学生司的推荐。

该系列辅导教材具有如下特点:

1. 紧扣大纲、内容翔实、叙述准确、重点突出,注重基础知识复习和解题能力训练,例题和习题贴近考题,实用性、针对性强,有利于考生提高复习效率和考试通过率。

2. 通过内容讲解和经典例题解析,注重培养考生综合运用知识的能力。

3. 每个章节后附有大量有针对性的习题和参考答案,方便考生学练结合,及时检验复习效果,增强应试适应能力和信心。

由于修订时间仓促,书中难免存在不足或错误,恳请各界人士批评指正。

高等教育出版社

2014年1月



编者的话

由于形势的发展,参加成人高考的考生群体发生了较大变化。为了适应教育事业发展的要求,为了对成人高等教育事业的发展做出更大贡献,尽最大可能给成人考生以有益的帮助,使其能适应形势变化,编者又在第10版的基础上做了一些修改。

在本书编写中遵循“一个按照、两个针对”的原则:

1. 严格按照《考试大纲》中规定的考试内容和考试要求编写。

2. 针对成人考生的特点,针对考试命题的基本原则而编写。针对考试命题的基本原则体现在本书以高等数学的基本知识、基本原理和基本技能为主要内容,避开复杂的运算与特殊的技巧性运算。针对成人考生的特点体现在突出基本概念的要害、基本性质的特点及基本计算方法的条理化,强调概念或公式的结构形式。书中选配大量的例题,有助于读者理解和掌握。在每个例题中加以分析讲解,侧重于问题的形式特点及解决问题的思想方法。有些例题的后面还给出一些说明,在说明中指出读者应该注意的问题或一些带有共性的问题特点,意在引导读者自学并提高效率。例题中包含了自2001年至2013年全国专升本考试高等数学(一)的部分试题,以有利于考生了解试题的广度与深度。例题包含了《考试大纲》中所规定的常见的基本题型。在以考试题为例题的题中给出编号注明,如(0804)表示2008年试题中的第4题,(0121)表示2001年试题中的第21题,这使读者能明确该题所出现的年份与该题在该年试卷中出现的位置。

为了能与考试试题题型一致,本书中给出的选择题都是单项选择题,但是为了加大信息量,书中尽量对各选项进行分析。

在每章中都给出小结,指出与本章基本概念、基本运算相关的问题及常见的试题类型。

在每节后选有同步练习题,并附有参考解答。

高等教育出版社考试出版事业部对本书的出版做了大量的工作,编者表示诚挚谢意。

本书编写组
2014年1月



目录

第一章 极限、连续	1
第一节 函数	1
第二节 极限	4
第三节 连续	16
小结	22
第二章 一元函数微分学	25
第一节 导数	25
第二节 微分	35
第三节 微分中值定理	38
第四节 洛必达法则	41
第五节 导数的应用	45
小结	54
第三章 一元函数积分学	57
第一节 不定积分	57
第二节 定积分	66
第三节 定积分的应用	80
小结	87
第四章 空间解析几何	89
第一节 平面与直线	89
第二节 简单的二次曲面	94
小结	97
第五章 多元函数微积分学	99
第一节 多元函数、极限与连续性	99
第二节 偏导数与全微分	101
第三节 二元函数的极值	111
第四节 二重积分的概念与性质	113
第五节 直角坐标系下二重积分的计算	114
第六节 极坐标系下二重积分的计算	123
第七节 二重积分的应用	128
小结	130
第六章 无穷级数	133
第一节 无穷级数的概念与性质	133
第二节 正项级数	136
第三节 任意项级数	141

第四节 幂级数	144
第五节 将初等函数展开为幂级数	149
小结	154
第七章 常微分方程	157
第一节 一阶微分方程	157
第二节 常系数线性微分方程	163
小结	168
附录 2013 年成人高等学校专升本招生全国统一考试高等 数学(一)试题及参考答案	170

第一章 极限、连续

第一节 函 数

教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(专科起点升本科) 理学、工学》中,高等数学(一)不包含函数的概念与性质的相关内容,这意味着函数的相关内容不会单独命题,但是极限、连续、导函数等部分还要研究函数的性质,如单调性、有界性等.为了便于考生复习,本节只涉及函数的概念和基本性质,不再讨论其相关练习题.

(一) 函数的定义

若变量 x 在允许范围内的每一个确定的值,变量 y 按照某个确定的规则总有相应的值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记为 $y=f(x)$.

常称 x 为自变量, y 为函数.称使函数有定义的点的全体为函数的定义域.

由函数定义可以看出,其关键特征是: x 的允许范围,即函数的定义域;对应规则,即函数的依赖规则.因此说函数概念的两个基本要素为:定义域,对应规则(或称依赖关系).

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时,才认为它们是同一个函数.

(二) 函数常用的三种表示方法

解析法,如 $y=f(x)$;图像法;表格法.

(三) 函数解析表示法中常见的几种形式

1. 用解析式形式表示

如 $y=f(x)=x^2+2x+3$.

2. 用分段函数形式表示

如果函数的对应规则是由几个解析表达式表示的,则称之为分段函数.

如:

$$y=f(x)=\begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x+1, & 0 < x < 1, \\ x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

注意这里的 $f(x)$ 不是三个函数,而是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的一个函数,它由三个解析式表示.

3. 用隐函数形式表示

如果函数的对应规则由方程 $F(x, y)=0$ 给出,则称 y 为 x 的隐函数.

如由方程 $x^2+2xy+2y^2-3x=1$ 确定的函数 $y=y(x)$ 为隐函数.

相对于隐函数来说,人们称由解析表达式 $y=f(x)$ 确定的函数为显函数.

4. 用参数方程形式表示

如果 x 与 y 的关系通过第三个变量联系起来,如:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

则称这种函数关系为参数方程表示的函数.

(四) 函数的性质

1. 单调性

设 $y=f(x)$ 在某区间内有定义,如果对于该区间内任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $y=f(x)$ 在该区间内单调增加.

如果对于该区间内任意两点 $x_1 < x_2$, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $y=f(x)$ 在该区间内单调减少.

单调增加与单调减少统称为单调.

上述区间可以为有限区间,也可以为无穷区间;可以为开区间,也可以为闭区间.

如果没有指明区间,而是说“ $f(x)$ 为单调函数”,总要理解为 $f(x)$ 在其定义区间上为单调函数.

判定函数 $y=f(x)$ 单调性的方法:

(1) 依定义判定:在给定的区间内任取两点 $x_1 < x_2$, 比较 $f(x_2)$ 与 $f(x_1)$. 如果总有 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 则 $f(x)$ 在该区间内单调增加;如果总有 $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 则 $f(x)$ 在该区间内单调减少.

(2) 依导数的符号判定:如果在某区间内总有 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在该区间内单调增加;如果在某区间内总有 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在该区间内单调减少.

通常采取第(2)种方法判定.

2. 奇偶性

设 $y=f(x)$ 的定义区间 D 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则有 $-x \in D$), 如果对于 D 内任意的点 x , 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为 D 内的偶函数;如果恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为该区间内的奇函数.

上述区间可以为有限区间 $[-a, a]$ 或 $(-a, a)$, 也可以为无限区间 $(-\infty, +\infty)$.

判定函数奇偶性的方法一般是利用定义.

奇、偶函数的图像有如下特点:奇函数的图像关于原点对称;偶函数的图像关于 y 轴对称.

性质 两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数;两个奇(偶)函数之积必为偶函数;奇函数与偶函数之积必为奇函数.

也可以利用上述性质判定函数的奇偶性.

3. 周期性

若存在 $T > 0$, 对于任意的 x , 恒有 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $y=f(x)$ 为周期函数. 使得上述关系式成立的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期, 简称为函数 $f(x)$ 的周期.

需注意的是,并不是每个周期函数都有最小正周期.

4. 有界性

设 $y=f(x)$ 在某区间内有定义. 若存在 $M > 0$, 对于该区间内任意的 x , 恒有 $|f(x)| < M$, 则

称 $f(x)$ 在该区间内为有界函数.

上述区间可以为有限区间,也可以为无穷区间;可以为开区间,也可以为闭区间.

如果没有指明区间,而是说“ $f(x)$ 为有界函数”,总要理解为 $f(x)$ 在其定义区间内为有界函数.

(五) 初等函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_x ,值域为 D_y .若对 D_y 中的每一个值 y ,通过关系 $y=f(x)$,有值 x 与之对应,这就建立了 x 与 y 之间的函数关系 $x=\varphi(y)$,常称 $x=\varphi(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

在研究函数时,往往习惯于将 x 作为自变量,将 y 作为因变量.因此习惯上总把 $x=\varphi(y)$ 中的 y 换为 x ,将 x 换为 y ,从而得到 $y=\varphi(x)$.通常情况下, $y=f(x)$ 的反函数都是指 $y=\varphi(x)$,或记作 $f^{-1}(x)$.

反函数的图形的特点:函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=\varphi(x)$ 这两条曲线在 xOy 坐标平面上关于直线 $y=x$ 对称.

需指出,不是每一个函数都存在反函数.如函数 $y=C$ 不存在反函数.

2. 基本初等函数

(1) 幂函数 $y=x^\mu$ (μ 为实数).

(2) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$).

(3) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$).

(4) 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

(5) 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

上述五类函数的定义域、单调性及图形需熟记.

定义 上述五类函数,即幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数,统称为基本初等函数.

3. 复合函数

设变量 y 是变量 u 的函数,即 $y=f(u)$,变量 u 是变量 x 的函数 $u=g(x)$.

定义 若对于 x 在某范围中的每一个确定的值,依据一个确定的规则总有 u 的值与之对应,而对于 u 的此确定值, y 按确定的规则有值与之对应,则称 y 为 x 的复合函数.

若 $y=f(u), u=g(x)$,则常记为 $y=f[g(x)]$,称 x 为自变量, u 为中间变量, y 为函数.

需指出,并不是任何两个函数 $y=f(u), u=g(x)$ 都能复合成 x 的函数.例如 $y=\arcsin u, u=x^2+2$,不论 x 取什么值,相应的 u 总不小于2,但是对于使 $y=\arcsin u$ 有意义的值必须是 $|u|\leq 1$,可知 $\arcsin(x^2+2)$ 无意义.换言之, $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 不能复合成复合函数.

4. 初等函数

由常量和前述五类基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次复合而成的,并能用一个式子表示的函数,称为初等函数.

第二节 极 限

一、内容概要

(一) 极限的概念与性质

1. 数列的极限

一列按一定顺序排列的数 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 称为数列, 常记为 $\{x_n\}$.

若 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为单调上升(增加)数列.

若 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为单调下降(减少)数列.

单调上升数列与单调下降数列统称为单调数列.

若存在 $M > 0$, 对任意的 n , 恒有 $|x_n| \leq M$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为有界数列.

在数列 $\{x_n\}$ 中, 如果自前向后任意取无穷多个项, 依次排列, 可以得到新数列, 记为 $\{x_{n_k}\}$, 则称数列 $\{x_{n_k}\}$ 为数列 $\{x_n\}$ 的一个子列.

对于数列 $\{x_n\}$, 如果随着项数 n 的无限增大, 数列中的项 x_n 在变化过程中与某常数 A 无限接近, 则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则称 $\{x_n\}$ 为收敛的, 否则称其为发散的.

收敛数列具有以下性质:

(1) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的值必定唯一.

(2) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 必为有界数列. 反之不真.

(3) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则数列 $\{x_n\}$ 的任何子列 $\{x_{n_k}\}$ 也必定收敛于 A .

性质(3)有两个主要应用:

① 判定数列 $\{x_n\}$ 发散. 如果存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 A , 而子列 $\{x_{m_j}\}$ 收敛于 B , 且 $A \neq B$, 则可知 $\{x_n\}$ 必定发散.

如: 数列 $1, 0, 1, 0, \dots$ 中含有子列 $1, 1, \dots, 1, \dots$, 收敛于 1 ; 同时有子列 $0, 0, \dots, 0, \dots$, 收敛于 0 , 因此可以断定数列 $1, 0, 1, 0, \dots$ 发散.

② 欲求数列 $\{x_n\}$ 的极限, 有时可以将其认作是某些数列的子列. 如果能判定后者收敛, 则可得知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

2. 函数的极限

(1) $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 的极限:

如果 x 无限远离坐标原点时, $f(x)$ 能与某常数 A 无限接近, 则称当 x 趋于无穷时, $f(x)$ 以 A 为极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

如果 x 沿数轴正向无限远离坐标原点时, 称 x 趋于正无穷, 记为 $x \rightarrow +\infty$.

如果 x 沿数轴负向无限远离坐标原点时, 称 x 趋于负无穷, 记为 $x \rightarrow -\infty$.

由函数极限的定义可以得出, 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

(2) $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限:

若当 x 无限接近 x_0 时, 函数 $y = f(x)$ 无限接近常数 A , 则称当 x 趋近于 x_0 时, $f(x)$ 以 A 为

极限,记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

若 x 在数轴上从 x_0 的左侧无限接近 x_0 , 即 $x < x_0$, 且 $x \rightarrow x_0$, 常记为 $x \rightarrow x_0^-$.

若 x 在数轴上从 x_0 的右侧无限接近 x_0 , 即 $x > x_0$, 且 $x \rightarrow x_0$, 常记为 $x \rightarrow x_0^+$.

相应地有: 给定函数 $y=f(x)$ 及常数 A , 当 $x \rightarrow x_0^-$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 则称当 $x \rightarrow x_0^-$ 时, $f(x)$ 的左极限为 A , 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

给定函数 $y=f(x)$ 及常数 A , 当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 则称当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, $f(x)$ 的右极限为 A , 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

3. 极限的性质

性质 1 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 则必定存在 x_0 的某邻域, 在该邻域内任何异于 x_0 的点 x 处, 恒有 $f(x) > 0$.

性质 2 若 $f(x) \geq 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则必有 $A \geq 0$.

性质 3 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限与右极限都存在, 且相等, 此时三者值相同.

左极限与右极限是考察自变量从某一确定方向趋于某一确定值时函数的变化趋势, 它的用途主要有两个方面:

(1) 研究自变量趋于区间的端点时, 函数的极限问题.

(2) 研究分段函数在分段点两侧表达式不相同的情形, 考察在分段点处的极限问题.

对于上述情形(2), 由性质 3 可得如下结论:

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 都存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$;

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 但两者不相等, 或两者至少有一个不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必定不存在;

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在, 且相等, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 必定存在, 且三者相等.

有必要强调指出, 极限描述了在给定过程下函数的变化性态, 而极限值表示一个确定的常数. 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 是否有极限与函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有无定义无关.

(二) 极限的四则运算

性质 1 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)]$ 必定存在, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B.$$

性质 2 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = AB.$$

推论 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, n 为正整数, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n = A^n.$$

性质3 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = B$, 且 $B \neq 0$, 则

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)}{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x)} = \frac{A}{B}.$$

(三) 极限存在准则与两个重要极限

1. 极限存在准则

准则 I (夹逼定理) 如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 满足下列条件:

$$(1) y_n \leq x_n \leq z_n \quad (n=1, 2, \dots);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a,$$

则数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

上述准则可以推广到求函数的极限:

如果在 x_0 的某邻域内 (或 $|x| > M$), 有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

成立, 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = A, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A,$$

那么 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)$ 存在, 且等于 A .

准则 II 单调有界数列必有极限.

2. 两个重要极限

由上述两个准则可以得出两个重要极限公式:

$$\text{重要极限 I} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\text{重要极限 II} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

这三个极限公式属于同一类型.

读者应熟记两个重要极限的结构形式特点:

$$\lim_{\square \rightarrow 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1;$$

$$\lim_{\square \rightarrow 0} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e, \lim_{\square \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\square}\right)^{\square} = e.$$

符合上述结构形式的极限公式总成立. 如: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = e$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e, \text{等等.}$$

(四) 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量与无穷大量

若在自变量 x 的某种变化趋势下函数 $f(x)$ 以零为极限, 则称在 x 的这种变化趋势下

$f(x)$ 为无穷小量(或无穷小).

若在自变量 x 的某种变化趋势下,自某时刻起,函数 $f(x)$ 的绝对值可以大于预先给定的任意大的正数,则称在 x 的这种变化趋势下 $f(x)$ 为无穷大量(或无穷大).

当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 为无穷大量,常常形式上记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 为无穷大量,常常形式上记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

有必要指出,无穷小量并不是表达量的大小,而是表达量的变化性态,或者说它是描述在某个过程中量的变化趋势.

零是可以作为无穷小量的唯一的数,其他任何数,即使其绝对值是很小很小的数,也不是无穷小量.必须将无穷小量与很小很小的数区分开来,不可混为一谈.

同样无穷大量也是描述在某个变化过程中量的变化趋势,它不是数,即使绝对值非常大的常数也不是无穷大量.

还要指出,无穷小量与无穷大量总是与自变量的变化过程相联系的,脱离变化过程谈无穷大量与无穷小量是没有意义的.

2. 无穷小量的性质

为了简便,我们约定,下列性质中所讲的无穷小量与无穷大量都是指在同一变化过程而言,在性质的叙述中省略不提.

性质 1 两个无穷小量之和仍为无穷小量.

性质 2 有界函数与无穷小量之积仍为无穷小量.

性质 3 两个无穷小量之积仍为无穷小量.

性质 4 若 $f(x)$ 为无穷大量,则其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量;若 $f(x)$ 为无穷小量,且 $f(x) \neq 0$,则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

性质 5 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$,其中 α 当 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷小量.

性质 5 常被称为极限基本定理.

性质 4 表明,可以说“无穷大量的倒数为无穷小量”,但是不能笼统地说“无穷小量的倒数为无穷大量”.

(五) 无穷小量的比较

定义 设 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \alpha = 0, \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \beta = 0$.

若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{\alpha}{\beta} = 0$,则称在 $x \rightarrow x_0$ 时, α 较 β 为高阶无穷小量,常记为 $\alpha = o(\beta)$.

若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$,则称在 $x \rightarrow x_0$ 时, α 较 β 为低阶无穷小量.

若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$,则称在 $x \rightarrow x_0$ 时, α 与 β 为同阶无穷小量.

特别当 $A = 1$ 时,称在 $x \rightarrow x_0$ 时, α 与 β 为等价无穷小量,常记为 $\alpha \sim \beta$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $e^x - 1 \sim x$.

性质 若当 $x \rightarrow x_0$ 时 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{\alpha'}{\beta'}$.

上述性质常称为等价无穷小量代换. 这个性质常常使用在极限运算中, 起到简化运算的作用, 但必须注意, 只能在乘除运算中使用, 不能在加减运算中随意使用.

(六) 常用的求极限的方法

需要指出, 极限的定义指明了概念, 并指明了极限值是个确定的常数, 但它并没有提供求极限的方法. 人们利用极限定义验证了 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$, 将此作为公式, 可利用下列方法求极限:

(1) 利用极限的四则运算法则. 使用极限的四则运算法则必须注意要满足运算条件. 当把一个函数分解为几个函数的和、差、积、商求极限时, 必须使得每个函数都有极限, 且作为分母的函数的极限不能为零. 若 $P(x)$ 为 x 的多项式, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$. 若 $Q(x)$ 也为 x

的多项式, 且 $Q(x_0) \neq 0$, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

(2) 对于分式的极限, 若分母的极限为零, 而分子的极限不为零, 则利用无穷小量与无穷大量的关系可知所求分式的极限为 ∞ .

(3) 对于分式的极限, 若分子与分母极限都为零, 可考虑能否约去分子与分母的公因式, 将新分式化为(1)或(2)的情形.

(4) 对于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x), Q(x)$ 为 x 的多项式, 可利用公式求解:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n, \\ 0, & m > n, \\ \infty, & m < n. \end{cases}$$

(5) 利用两个重要极限公式求极限.

(6) 利用“无穷小量与有界函数之积仍为无穷小量”等性质求极限.

在求极限的运算中使用等价无穷小量代换常能简化计算. 等价无穷小量代换能使用在乘除法中, 不能在加减法中随意使用.

(7) 求分段函数在分段点处的极限时, 如果函数在分段点两侧表达式不同, 一定要用左极限与右极限来计算.

二、范例解析

1. 利用极限的四则运算法则求极限

例 1 (1001) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = (\quad)$.

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

解析 对于多项式 $P(x)$ 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 0 + 1 = 1,$$

故选 C.

例 2(0614) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x + 5}{x + 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解析 所给极限为 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ 形式, 且分母 $Q(x_0) \neq 0$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x + 5}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 2x + 5)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x + 1)} = \frac{5}{1} = 5.$$

例 3(0912) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解析 所给极限为 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$ 形式, 其中 $P(x), Q(x)$ 为多项式, 且 $Q(x_0) \neq 0$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+1} = \frac{1-1}{1^2+1} = 0.$$

2. 求分式的极限(分子与分母极限都为零的情形)

例 4(0207) 极限 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解析 当 $x \rightarrow 2$ 时, 分子与分母的极限都为 0, 因此不能直接利用极限的商的运算法则. 由于

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3), \quad x^2 - 4 = (x-2)(x+2),$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}.$$

例 5(0621) 计算 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}.$

解析 当 $x \rightarrow 1$ 时, 分母的极限为 0, 分子的极限也为 0. 可以考虑利用洛必达法则求解, 也可以考虑将分母因式分解, 再约去使分子、分母为 0 的因子.

解法一 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}.$

解法二 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$

例 6(0721) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}.$

解法一 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = 0.$

解法二 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0.$

3. 利用重要极限公式求极限

例 7(0911) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解析 本题考查的知识点为重要极限公式.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x} \cdot (-1)} = \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right]^{-1} = e^{-1}.$$

例 8(0601) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$ 等于().

A. e B. e^{-1} C. $-e^{-1}$ D. $-e$

解析 所给极限为重要极限形式, 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+(-x)]^{\frac{1}{(-x)} \cdot (-1)} = e^{-1},$$

故选 B.

例 9(0301) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$ 等于().

A. e^2 B. e C. e^{-1} D. e^{-2}

解析 所给极限为重要极限公式形式.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x} \cdot (-2)} = e^{-2},$$

故选 D.

仿例 7 至例 9 可得知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{b}{x}} = e^{ab}$. 上述两个结论可以当做公式使用, 能简化运算, 应熟记.

例 10(0511) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x =$ _____.

解析 所给极限为重要极限公式形式.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{1}{-x}\right)\right]^{(-x) \cdot (-1)} = e^{-1}.$$

例 11(1011) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x =$ _____.

解析 由前述重要极限的推广形式可得:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = e^{-3}.$$

例 12(0217) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解析 先将求极限的函数变形, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}} = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}}} = e.$$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ 型极限

例 13 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+5}{3x^2-x+1}, \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x+3}{3x^3+2x+4}, \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+2x+4}{x^2-x+3}.$$

解析 所给各极限都是 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ 型, 可依本节内容概要(六)(4)中的公式直接得出各