北大燕园

2017年 李正元·范培华

考研数学 3

数学复习全书

数学三

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华

赠送《全书习题全解》

中国政法大学出版社

2017年李正元·范培华考研数学③

数学

数学三

复习全书

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华

中国政法大学出版社

2016·北京

图书在版编目(CIP)数据

李正元·范培华考研数学数学复习全书. 数学三/李正元，尤承业，范培华主编. —北京：中国政法大学出版社，2016. 1

ISBN 978-7-5620-6504-3

Ⅰ. ①李…　Ⅱ. ①李…　②尤…　③范…　Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 280817 号

出 版 者	中国政法大学出版社
地　　址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　　址	http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　　话	010－58908285(总编室)　58908433(编辑部)　58908334(邮购部)
承　　印	北京朝阳印刷厂有限责任公司
开　　本	787mm×1092mm　1/16
印　　张	45
字　　数	1210 千字
版　　次	2016 年 1 月第 1 版
印　　次	2016 年 1 月第 1 次印刷
定　　价	61.80 元

新版前言

本书出版、修订多年来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为本书在编写体例上有“特色”，在内容讲解、试题分析与解答上详尽、透彻、易懂，较“适合考生的需要”。我们从反馈的信息中获悉，除报考硕士研究生的考生将本书用作应试复习参考书外，文科类在读大学生也将本书作为数学的学习辅导资料，而教师则作为主要的教学参考用书之一。这既是对我们工作的肯定和鼓励，也是一种鞭策，促使我们对本书进一步完善，更好地适应和满足广大考生和读者考试复习的需要。2017 年版《数学复习全书》将以更高的质量和新的面貌呈现在广大学生的面前。

本书 2017 年版是在 2016 年版的基础上进行修订的，更加完善，更具有针对性和适用性。

微积分部分：按考试大纲的要求及绝大多数考生系统复习的需要，本书进行了调整，宗旨是重点内容重点讲解，如：求极限的方法，求积分（一元、多元函数）的方法，牛顿-莱布尼兹公式及其应用，二重积分的计算与应用，求幂级数的收敛域或收敛区间，幂级数的求和，求函数的幂级数展开式等单独分离出来进行举例讲解，同时调换并增加了若干典型例题，并修改了部分例题的解法，使之更简捷，更易掌握。另外，对一元函数泰勒公式及其简单应用精编若干例题进行讲解。

线性代数部分：“一把钥匙开一把锁”

研究生招生考试要求的三门课程中，线性代数是概念性最强的一门，对代数理论理解的深浅直接影响考场上应对代数题的能力。对线性代数的考前准备自始至终都应该把加深对理论的理解放在最重要的位置上。

代数的概念题和证明题常常是考生的难题。对这类题的解题能力直接反映出考生对代数理论的理解程度。

线性代数计算题的类型并不多，计算方法也很机械，但是往往计算量比较大。做好代数计算题一要熟，二要巧。“熟”是指要熟练掌握各类题型的计算方法，在理论上懂得其道理。“巧”是指解题的思路要简捷清晰。“巧”可以使你心明眼亮、高瞻远瞩，使你更容易找到最好的解题途径，从而减少计算量，达到既节省时间又降低出错率的双重功效。而做到“巧”同样需要对理论有较好的理解。总之，做好代数计算题同样要求对理论清楚明白。

从理论的角度看，代数学又是比较难的一门课。它的许多概念和性质比较复杂和抽象，尤其是各部分内容之间的联系非常紧密，而这方面往往是许多考生过去在学习中不大注意的。

基于以上原因，作者在编写本书时，对于概念的复习部分作了精心设计。虽然这部分内容在篇幅上不是本书的主要部分，但是这里凝聚了作者多年来的教学经验和对该课程的独到理解，也体现了对历年考试真题的深刻分析。希望在此基础上，为考生提供一个系统的、有着内在有机联系的，从而更加好懂、好记、好用的代数复习材料。

概率论与数理统计部分：与微积分部分一样也进行了调整，调整后更适合考生进行系统复习，同时对重点概念、公式和常考题型从多角度命制典型例题进行讲解，以提高考生运用概念、公式综合分析能力，从而取得好成绩。

特别需要强调的是，本书题型训练均给出了详细解答（见赠书）。

本书的微积分部分由**北京大学李正元、范培华**修改完成，线性代数部分由**北京大学尤承业**修改完成，概率论与数理统计部分由**北京大学范培华**修改完成。

编　者

2016 年 1 月

前　言

为了使考研同学能在较短时间内全面复习数学，达到硕士学习阶段应具备的数学能力，提高考研数学应试水平，以合格的数学成绩任国家挑选，作者根据教育部制订的《数学考试大纲》的要求和最新精神，深入研究了近年来考研命题的特点及动态，并结合作者多年来数学阅卷以及全国大部分城市“考研班”辅导的经验，编写了这本《考研数学复习全书》（经济类）及其姊妹篇《考研数学历年试题解析》、《考研数学全真模拟经典400题》等。在编写时，作者特别注重与学生的实际相结合，注重与考研的要求相结合。

本书每章均由以下五个部分构成：

一、知识结构网络图——编写该部分的目的主要是让考生弄清各知识点之间的相互联系，以便对本章内容有一个全局性的认识和把握。

二、内容概要与重难点提示——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的重点、难点及常考点，以便在复习中有的放矢，提高效率。

三、考核知识要点讲解——本部分对大纲所要求的知识点进行了全面地阐述，并对考试重点、难点以及常考点进行了剖析，指出了历届考生在运用基本概念、公式、定理等知识解题时普遍存在的问题及常犯的错误，同时给出了相应的注意事项，以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

四、常考题型及其解题方法与技巧——本部分对历年统考中常见题型进行了归纳分类，归纳总结了各种题型的解题方法，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，并能综合、灵活地解决问题。

五、题型训练——本部分精选了适量的题型训练，并附有详解。只有适量的练习才能巩固所学知识，复习数学必须做题。为了让考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，作者特优化设计了与真题相仿的实战训练题编写在《考研数学全真模拟经典400题》一书中，以供考生选用。

特别需要强调的是，在’98北大百年校庆之际，我们北大数学系63届校友聚会于北大燕园，畅谈中得知我们当中许多同学都在从事本科及研究生数学教学与数学研究工作，并有多年考研辅导的经验以及参加研究生入学考试阅卷的经历，对各类院校的考生有广泛的接触与了解，深知考生在考研数学备考中所面临的困惑。为了帮助考生全面系统并有针对性地复习，在大家的一致建议下，由我们执笔编写了这本《考研数学复习全书》（经济类）及其姊妹篇《考研数学历年试题解析》、《考研数学全真模拟经典400题》，期望对广大考生备考能有所裨益。

本书是考研应试者的良师益友，也是各类院校的学生自学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编　者

1999年1月于北大燕园

目 录

第一篇 微积分

第二篇　线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇　微积分

第一章　函数、极限、连续

知识结构网络图

- 函数，极限，连续
  - 函数
    - 函数概念
    - 几类常见的函数（单调函数、奇偶函数、周期函数、有界函数）
    - 复合函数与反函数
    - 常见的函数形式（初等函数、分段函数、隐函数，由变限积分确定的函数、由级数确定的函数）
  - 极限
    - 定义与性质，判别极限存在与不存在的方法
    - 求极限的方法
      - 函数极限
        - 直接用运算法则（四则运算，幂指数运算，代入法）
        - 未定式
          - “$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型（恒等变形相消后代入，洛必达法则，变量替换与重要极限，泰勒公式，等价无穷小因子替换）
          - 其他未定式（转化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型）
        - 分别求左、右极限
      - 数列极限
        - n 项和的数列（恒等变形，夹逼法，*化为定积分，级数求和）
        - * 递归数列（$x_{n+1}=f(x_n)$）
        - 一般情形（转化为函数极限，恒等变形，夹逼法）
  - 无穷小
    - 概念与性质（高阶、低阶、同阶、等价、阶数）
    - 无穷小阶的比较与确定无穷小的阶的方法（洛必达法则，阶的运算性质，泰勒公式）
  - 连续性
    - 连续与间断的定义
    - 判断连续性与间断点类型的方法（初等函数连续性，连续函数运算性质，按定义）
    - 连续函数的性质

内容概要与重难点提示

（一）微积分中研究的对象是函数　函数概念的实质是变量之间确定的对应关系．变量之间是否

---

* 有 * 号部分为非重点部分．

有函数关系，就看是否存在一种对应规则，使得按照这个对应规则，当其中一个变量或几个变量（称为自变量）的取值确定后，余下的另一个变量（称为因变量）的取值也就被唯一确定．只有一个自变量的函数称为一元函数，不止一个自变量的函数称为多元函数．

函数这部分的重点是：复合函数、反函数、分段函数、函数记号的运算、基本初等函数与其图象以及初等函数的概念等．

（二）极限是微积分的理论基础　微积分中的重要概念，如连续、导数、定积分、级数等都是用不同类型的极限来定义的，由此可见极限的重要性．本章的重点内容是极限．既要准确理解极限的概念、性质和极限存在的条件，又要能准确地求出各种极限．求极限的方法很多，综合起来主要有：

① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则；　② 利用函数的连续性；

③ 利用洛必达法则；　④ 分别求左、右极限；

⑤ 利用变量替换与两个重要极限；　⑥ 数列极限转化为函数极限；

⑦ 利用夹逼定理；　⑧ 利用导数的定义求极限；

⑨ 利用泰勒公式．

（三）无穷小量就是极限为零的变量　极限问题可归结为无穷小量问题．要理解无穷小量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会确定无穷小量的阶数，并会用重要的等价无穷小替换求极限．

（四）我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数　由于函数的连续性是通过极限定义的，所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限．要掌握判断函数连续性（特别是分段函数在分界点处的连续性）以及求间断点的方法，还要会判别函数间断点的类型．

（五）有界闭区间上连续函数的基本性质　函数的许多重要性质都与函数的连续性有关．因此，我们要了解有界闭区间上连续函数的重要性质，包括：有界性定理，最大值、最小值定理和介值（中间值）定理，并掌握这些定理的简单应用．

考核知识要点讲解

一、极限的概念与性质

（一）极限的定义

【定义 1.1】（数列的极限）　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow$ 对于任给的常数 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时就有 $|x_n - A| < \varepsilon$．

若数列 $\{x_n\}$ 存在极限（有限数），又称数列 $\{x_n\}$ **收敛**，否则称数列 $\{x_n\}$ **发散**．

【定义 1.2】（函数的极限）　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对于任给的常数 $\varepsilon > 0$，存在正数 X，使得当 $|x| > X$ 时就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$．

类似可定义单侧极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$．

【注】　在函数极限情形下 $x\to\infty$ 与数列极限中 $n\to\infty$ 的意义不同，前者是指 $x\to\pm\infty$，而后者是指 $n\to+\infty$．

【定义 1.3】（函数的极限）　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对于任给的常数 $\varepsilon > 0$，存在正数 δ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$．

类似可定义 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限 $f(x_0 - 0)$ 与右极限 $f(x_0 + 0)$：

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A,\quad f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

（二）极限的基本性质

▶1. 数列极限的基本性质

【定理 1.1】（极限的不等式性质） 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

(1) 若 $a > b$，则存在 N，当 $n > N$ 时有 $x_n > y_n$； (2) 若 $n > N$ 时 $x_n \geqslant y_n$，则 $a \geqslant b$.

【定理 1.2】（收敛数列的有界性） 设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 有界（即存在常数 $M > 0$，使 $|x_n| \leqslant M, n = 1,2,\cdots$）.

▶2. 函数极限的基本性质

【定理 1.3】（极限的不等式性质） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$.

若 $A > B$，则存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$；

若存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geqslant g(x)$，则 $A \geqslant B$.

【推论】（极限的保号性） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

(1) 若 $A > 0$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > 0$；

(2) 若存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geqslant 0$，则 $A \geqslant 0$.

【注】 若(2)中的条件“$f(x) \geqslant 0$”改为“$f(x) > 0$”，其他条件保持不变，则结论仍是“$A \geqslant 0$”.

【定理 1.4】（存在极限的函数局部有界性） 设存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域 $U_0(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界，即存在 $\delta > 0$ 与 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

【注】 其他的极限过程如 $x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to +\infty, x \to -\infty$ 等也有类似的结论.

（三）两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e},\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} \tag{1.1}$$

【例 1.1】 判断下列结论是否正确，并证明你的判断.

(Ⅰ) 设当 $n > N$ 时 $x_n < y_n$，已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ 均存在，则 $A < B$；

(Ⅱ) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 有定义，又存在 $c \in (a,b)$ 使得极限 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 有界；

(Ⅲ) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

【解】 (Ⅰ) 不正确. 令 $a_n = x_n - y_n$，则有 $a_n < 0 (n > N)$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = A - B \leqslant 0$，即在题设下只能保证 $A \leqslant B$，不能保证 $A < B$. 例如，$x_n = \dfrac{1}{n}, y_n = \dfrac{2}{n}$，则 $x_n < y_n$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

评注 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都存在，则对不等式 $x_n < y_n (n > N)$ 两边当 $n \to \infty$ 时取极限，除保持不等号外还应加上等号，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(Ⅱ) 不正确. 这时只能保证：存在点 c 的一个空心邻域 $U_0(c,\delta) = \{x \mid 0 < |x - c| < \delta\}$，使 $f(x)$ 在 $U_0(c,\delta)$ 中有界，一般不能保证 $f(x)$ 在 (a,b) 有界. 例如：$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $(a,b) = (0,1)$，取定 $c \in (0,$

1)，则 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\dfrac{1}{c}$，但 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 无界.

(Ⅲ) 正确. 因为 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$，由存在极限的函数的局部有界性即知：存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

二、极限存在性的判别（极限存在的两个准则）

（一）夹逼定理

【定理 1.5】（数列情形） 若存在 N，使得当 $n>N$ 时有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

【定理 1.6】（函数情形） 若存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，又 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

【注】 其他的极限过程也有类似的结论.

（二）单调有界数列必收敛定理

【定理 1.7】 若数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界，即 $x_{n+1}\geqslant x_n\ (n=1,2,\cdots)$，并存在一个数 M 使得对一切的 n 有 $x_n\leqslant M$，则 $\{x_n\}$ 收敛. 即存在一个数 a，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，且有 $x_n\leqslant a\ (n=1,2,\cdots)$.

若数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界，即 $x_{n+1}\leqslant x_n\ (n=1,2,\cdots)$，并存在一个数 m 使得对一切的 n 有 $x_n\geqslant m$，则 $\{x_n\}$ 收敛. 即存在一个数 a，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，且有 $x_n\geqslant a\ (n=1,2,\cdots)$.

（三）极限存在的充要条件

【定理 1.8】（函数极限存在的充要条件） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

对于分段函数 $f(x)=\begin{cases} g(x), & x_0-\delta<x<x_0, \\ h(x), & x_0<x<x_0+\delta, \end{cases}$ 考察 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在就需要分别求 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} h(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$，并确定二者是否相等.

【定理 1.9】（数列极限存在的充要条件） $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=A$.

【例 1.2】 设 $f(x)=\begin{cases} 2(x+1)\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 1, & x=0, \\ \dfrac{\ln(1+ax^2)}{x\sin x}, & x<0, \end{cases}$ 又 $a\neq 0$，问 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在.

【分析】 分别求右、左极限 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$，由 $f(0+0)=f(0-0)$ 定出 a 值.

【解】 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2(x+1)\arctan\dfrac{1}{x}=2\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\pi$，

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left[\frac{\ln(1+ax^2)}{ax^2}\cdot\frac{ax^2}{x\sin x}\right]=1\cdot a\cdot 1=a(a\neq0),$$

由 $f(0+0)=f(0-0)$，得 $a=\pi$. 因此，当且仅当 $a=\pi$ 时，存在 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\pi$.

评注 注意在本题中当 $a=\pi$ 时极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\pi$，即当 $x\to0$ 时 $f(x)$ 的极限存在，但此极限值与函数值 $f(0)=1$ 并不相等，其原因在于 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 描述的是当 $x\to0$ 但 $x\neq0$ 时 $f(x)$ 的变化趋势，它与函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的函数值 $f(0)$ 是多少没有关系.

【例 1.3】 设 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$

(A) 0.　　(B) $+\infty$.　　(C) $-\infty$.　　(D) 不存在，但也不是 ∞.

【分析】 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，故应分左右极限来讨论. 由于

$$\lim_{x\to0^+}xe^{\frac{1}{x}}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty,\quad \lim_{x\to0^-}xe^{\frac{1}{x}}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t}=0,$$

因此应选(D).

评注 当 $x\to\infty$ 时，对含有 $a^x(a>0,a\neq1)$ 或 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot} x$ 的函数极限，一定要对 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 分别求极限，若两者相等，则 $x\to\infty$ 时极限存在，否则不存在.

三、求极限的方法

(一) 利用极限的四则运算法则与幂指数运算法则求极限

▶1. 极限的四则运算法则及其推广

【定理 1.10】(四则运算法则) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，则

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B,\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq0).$$

四则运算法则的推广：

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，且当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $g(x)$ 有界，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=0$.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty(+\infty,-\infty)$，且当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $g(x)$ 有界或 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$，则

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty\ (+\infty,-\infty)$.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty(+\infty)$，且当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $|g(x)|\geqslant A>0(g(x)\geqslant A>0)$，或

$\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\neq0\ (A>0)$，或 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty(+\infty)$，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=\infty\ (+\infty)$.

(4) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，又当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $f(x)g(x)>0$，则

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$.

【注】 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不存在也不为 ∞，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]$ 不存在也不为 ∞；若又有 $A\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 均不存在也不为 ∞. 但是，当 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 都不存在且不为 ∞ 时，求 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 的极限则必须作具体分析.

▶2. 幂指数函数的极限运算法则及其推广

【定理 1.11】(幂指数运算法则)　设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0,\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$,则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=A^B(A>0)$.

幂指数运算法则的推广:

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A(A>0,且A\neq1),\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$,则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}0, & 0<A<1,\\ +\infty, & A>1.\end{cases}$

(2) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,f(x)>0(0<|x-a|<\delta),\lim\limits_{x\to a}g(x)=B\neq0$,则

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}0, & B>0,\\ +\infty, & B<0.\end{cases}$$

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty,\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\neq0$,则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}+\infty, & A>0,\\ 0, & A<0.\end{cases}$

▶3. 对 $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 等各类未定式不能直接用上述运算法则.

最基本的是 $\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,其他类型应经恒等变形转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式.

求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的方法有多种(参看题型一),其中一种重要技巧是设法消去分子、分母中的极限为零或 ∞ 因子,于是转化为可以直接用四则运算法则的情形(后面还要介绍其他方法,如洛必达法则).

【例 1.4】　设常数 $x>0$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n^2+n)\left(x^{\frac{1}{n-1}}-x^{\frac{1}{n}}\right)\right]$.

【解】

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)\left(x^{\frac{1}{n-1}}-x^{\frac{1}{n}}\right)\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)\cdot x^{\frac{1}{n}}\left(x^{\frac{1}{n(n-1)}}-1\right)\right]\\&=\left(\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{n}}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)\left(e^{\frac{\ln x}{n(n-1)}}-1\right)\right]\\&=1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)\ln x}{n(n-1)}=\ln x.\end{aligned}$$

评注　① 本题用到了当 $n\to\infty$ 时的等价无穷小替换 $e^{\frac{\ln x}{n(n-1)}}-1\sim\frac{\ln x}{n(n-1)}$.

② 下列做法是错误的:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)\left(x^{\frac{1}{n-1}}-x^{\frac{1}{n}}\right)\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)\left(e^{\frac{\ln x}{n-1}}-1-e^{\frac{\ln x}{n}}+1\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)\left(e^{\frac{\ln x}{n-1}}-1\right)\right]-\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)\left(e^{\frac{\ln x}{n}}-1\right)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)\ln x}{n-1}-\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)\ln x}{n}\\&=\ln x\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n(n-1)}=\ln x.\end{aligned}$$

错误的原因在于上述第二个等号后的两个极限均不存在,不能运用极限的加法或减法运算法则.

③ 运用极限的四则运算法则时必须满足其前提条件,在对两个函数的乘积求极限时,应视具体情况用极限的四则运算法则分别求极限,但需要注意对 $\infty\cdot0$ 型未定式不能用.

【例 1.5】　已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)$ 都存在,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}3xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[4f(x)+6]$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=$ ________.

【分析】　由题设可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}3xf(x)$ 存在

于是 $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3xf(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = \frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}[4f(x)+6] = \frac{6}{3} = 2.$$

（二）利用函数的连续性求极限

1. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，按定义就有 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. 因此对连续函数求极限就是用代入法求函数值.

2. 一切初等函数在它的定义域上连续. 因此，若 $f(x)$ 是初等函数，且 a 属于它的定义域，则
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

3. 设 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$，若补充定义 $g(a)=A$，则 $g(x)$ 在 $x=a$ 连续. 若又有 $y=f(u)$ 在 $u=A$ 连续，则由复合函数的连续性得
$$\lim_{x\to a} f[g(x)] = f[\lim_{x\to a} g(x)] = f(A).$$

【注】 可用此结论证明幂指数函数的极限运算法则.

（三）利用变量替换法和两个重要极限求极限

通过变量替换，把求某个极限转化为求另一个极限，若后者能算得出来，问题就解决了.

1. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = +\infty$ 且 $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = A$，则
$$\lim_{x\to+\infty} f[\varphi(x)] \xlongequal{u=\varphi(x)} \lim_{u\to+\infty} f(u) = A.$$
（若把 $x\to+\infty$ 改为 $x\to-\infty$ 或 $x\to x_0$ 上述结论仍成立.）

2. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = u_0$ 且 $f(u)$ 在 u_0 连续，则
$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] \xlongequal[\substack{x\to x_0\text{ 时}\\ u\to u_0}]{u=\varphi(x)} \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0).$$

重要极限与变量替换法相结合可求下列极限：

（1）诸如：
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1,\quad \lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}} = \mathrm{e},\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\ln[1+\varphi(x)]}{\varphi(x)} = 1,$$
$$\lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}} = \lim_{x\to x_0}\left([1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}\right)^{\psi(x)} = \mathrm{e}^A,$$
其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x) = A$.

（2）设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$，则求 1^∞ 型极限
$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{g(x)[f(x)-1]} = \mathrm{e}^A,$$
转化为求 $0\cdot\infty$ 型极限 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1] = A$.

【注】 上述极限过程 $x\to x_0$ 改为其他情形也有类似结论.

【例 1.6】 求下列极限：