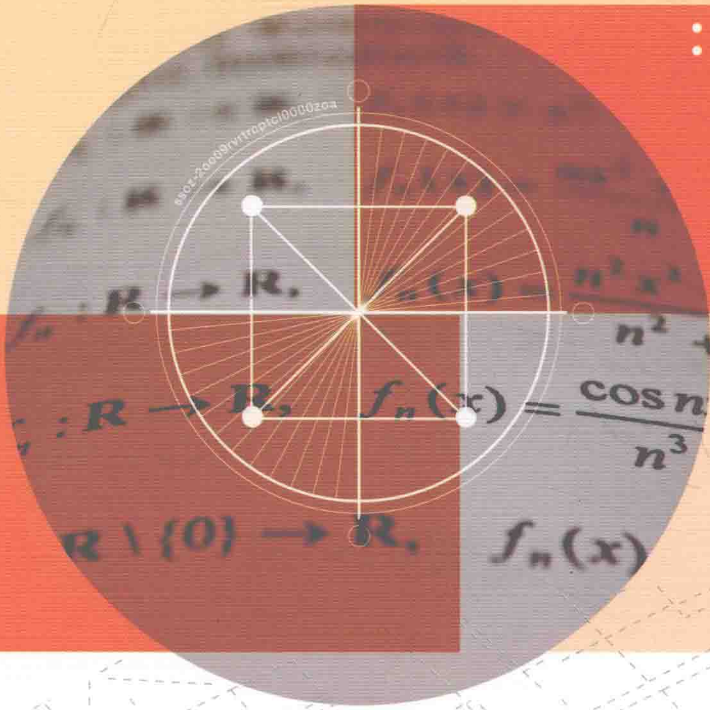
21世纪高等院校规划教材

# 复变函数与积分变换

主　编　翟秀娜
副主编　张翠莲



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21世纪高等院校规划教材

# 复变函数与积分变换

主　编　翟秀娜

副主编　张翠莲

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

## 内 容 提 要

本书是为高等理工科院校编写的“复变函数与积分变换”课程的教材。本教材包括“复变函数”“积分变换”两篇，是大学本科数学教学中继“高等数学”后，为各理工科专业开展后续教育而开设的课程用书，它是数学与其他学科之间的一座桥梁。

全书共 7 章，内容包括：复数与复变函数、复变函数的极限与连续性，复变函数的导数、解析函数、初等解析函数，复变函数的积分，复变函数的幂级数和罗伦级数，留数与留数定理，傅立叶变换和拉普拉斯变换等。书后附有傅立叶变换简表与拉普拉斯变换简表以及习题、自测题参考答案或提示。

本书既可作为理工科大学“复变函数与积分变换”课程的教材，也可供工程技术人员参考使用。

**图书在版编目（CIP）数据**

复变函数与积分变换 / 翟秀娜主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2016.2
21世纪高等院校规划教材
ISBN 978-7-5170-4150-4

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①翟… Ⅲ. ①复变函数－高等学校－教材②积分变换－高等学校－教材 Ⅳ. ①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第040909号

**策划编辑：雷顺加　责任编辑：宋俊娥　加工编辑：郑秀芹　封面设计：李　佳**

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 21 世纪高等院校规划教材<br>**复变函数与积分变换** |
| 作　　者 | 主　编　翟秀娜<br>副主编　张翠莲 |
| 出版发行 | 中国水利水电出版社<br>（北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038）<br>网址：www.waterpub.com.cn<br>E-mail：mchannel@263.net（万水）<br>sales@waterpub.com.cn<br>电话：（010）68367658（发行部）、82562819（万水） |
| 经　　售 | 北京科水图书销售中心（零售）<br>电话：（010）88383994、63202643、68545874<br>全国各地新华书店和相关出版物销售网点 |
| 排　　版 | 北京万水电子信息有限公司 |
| 印　　刷 | 北京正合鼎业印刷技术有限公司 |
| 规　　格 | 170mm×227mm　16 开本　10.5 印张　211 千字 |
| 版　　次 | 2016 年 2 月第 1 版　2016 年 2 月第 1 次印刷 |
| 印　　数 | 0001—3000 册 |
| 定　　价 | 20.00 元 |

# 前　　言

我国高等教育正在快速发展，教材建设也要与之适应，特别是教育部关于“高等教育面向 21 世纪内容与课程改革”计划的实施，对教材建设提出了新的要求。本书的编写目的就是为了适应高等教育的快速发展，满足教学改革和课程建设的需求，体现高等工科教育的特点。

本书依据普通本科教育“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，精心选择了教材的内容，结合从实际应用和学生学习后续专业课的需要出发，加强数学思想和数学概念与工程实际结合的特点，课程内容按照由浅入深，由具体到抽象，由特殊到一般的原则来组织，每章都有学习目标、小结、习题、自测题等，便于学生总结学习内容和学习方法，巩固所学知识。

全书内容包括：复数与复变函数、复变函数的极限与连续性，复变函数的导数、解析函数、初等解析函数，复变函数的积分，复变函数的幂级数和罗伦级数，留数与留数定理，傅立叶变换和拉普拉斯变换等。书后附有傅立叶变换表与拉普拉斯变换表，以及习题、自测题参考答案或提示。

本书既可作为理工科大学“复变函数与积分变换”课程的教材，也可供工程技术人员参考使用。

本书由翟秀娜担任主编并统稿，张翠莲担任副主编。各章编写分工如下：复变函数由翟秀娜编写，积分变换及书后附录由张翠莲编写。何春江、王晓威、邓凤茹、张文治、张钦礼、牛莉、曾大有等同志参加了本书编写的讨论及校对工作。

在本书的编写过程中，编者参考了很多相关的书籍和资料，采用了一些相关内容，汲取了很多同仁的宝贵经验，在此谨表谢意。

由于时间的仓促及作者水平所限，书中错误和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正，我们将不胜感激。

编　者

2015 年 12 月

# 目　　录

# 第 1 篇　复变函数

复数的概念起源于求方程的根，16 世纪中叶，G.Cardano(1501－1576)在研究一元二次方程时引进了复数的概念，在很长时间里，人们对这类数不能理解．但随着数学的发展，这类数的重要性才日益显现出来．

以复数作为自变量的函数叫做复变函数，而与之相关的理论就是复变函数论．解析函数是复变函数中一类具有解析性质的函数，复变函数论主要研究复数域上的解析函数，因此通常也称复变函数论为解析函数论．

## 第 1 章　复数与复变函数

### 本章学习目标

- 熟练掌握复数的各种运算
- 掌握平面点集的有关概念
- 理解复变函数的概念
- 掌握复变函数的极限和连续的概念
- 了解一些简单映射的几何特征

### 1.1　复数及其运算

#### 1.1.1　复数的概念

设 $x, y$ 为两个任意实数，称形如 $x+\mathrm{i}y$ 的数为复数，记为 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 i 满足 $\mathrm{i}^2=-1$，称为虚数单位．实数 $x$ 和 $y$ 分别称为复数 $z$ 的实部和虚部，记为

$$x=\mathrm{Re}\,z\text{，}\quad y=\mathrm{Im}\,z\text{．}$$

当 $x=0$，$y\neq 0$ 时，复数 $z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数；当 $y=0$ 时，复数 $z=x$ 为一个实数（实数可看作是复数的特殊情形）．例如，复数 $z=2+\mathrm{i}\cdot 0$ 就是实数 2，当 $x=y=0$ 时，复数 $z=0$，它既可以看作实数也可看作纯虚数．全体复数构成的集合称为复数集，记作 $\mathbf{C}$，即

$$\mathbf{C}=\{z=x+\mathrm{i}y\mid x,y\in\mathbf{R}\}.$$

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 是 $\mathbf{C}$ 中任意两个复数，当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$ 时，称 $z_1$ 与 $z_2$ 相等，记作 $z_1=z_2$，即 $z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$，$y_1=y_2$.

称复数 $x+\mathrm{i}y$ 与 $x-\mathrm{i}y$ 互为共轭复数，复数 $z$ 的共轭复数记作 $\overline{z}$，若 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$.

各数集之间的关系可表示为：复数 $\begin{cases}\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\\\text{无理数}\end{cases}\\\text{虚数}\begin{cases}\text{纯虚数}\\\text{非纯虚数}\end{cases}\end{cases}$

### 1.1.2 复数的表示

1. 代数表示

$z=x+\mathrm{i}y$，$x,y$ 为两个任意实数，就是复数的代数表示.

2. 复数的几何表示

由复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的定义可知，复数是由一对有序实数 $(x,y)$ 唯一确定的，于是可建立全体复数和 $xOy$ 平面上的全部点之间的一一对应关系，即可以用横坐标为 $x$，纵坐标为 $y$ 的点 $P(x,y)$ 表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$（如图 1.1），这是一种几何表示法，通常称为点表示，并将点 $z$ 与数 $z$ 看作同义词.

因实数与 $x$ 轴上的点一一对应，故称 $x$ 轴为实轴；纯虚数与 $y$ 轴上的点一一对应，故称 $y$ 轴为虚轴. 这样表示复数 $z$ 的平面称为复平面或 $Z$ 平面.

显然，共轭复数 $z$ 和 $\overline{z}$ 在复平面上表示点 $z$ 与点 $\overline{z}$ 关于实轴对称（如图 1.2）.

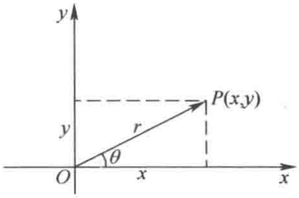



图 1.1

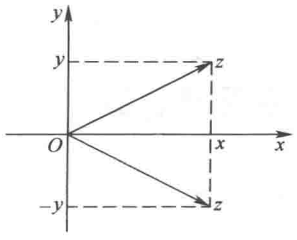



图 1.2

3. 复数的向量表示

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 还可以用起点为原点，终点为 $P(x,y)$ 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示（如图 1.1），$x$ 与 $y$ 分别是 $\overrightarrow{OP}$ 在 $x$ 轴与 $y$ 轴上的投影. 这样，复数与平面上的向量之间也建立了一一对应关系.

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模，记作 $|z|$ 或 $r$，即

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

关于复数 $z$ 的模 $|z|$ 有：

（1）$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$；　　（2）$|z| = |\overline{z}|$，$z\overline{z} = |z|^2$；

（3）$|z| \leqslant |x| + |y|$，$|x| \leqslant |z|$，$|y| \leqslant |z|$；　　（4）$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$；

（5）$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$；　　（6）$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$.

其中 $|z_1 - z_2|$ 又表示点 $z_1$ 与 $z_2$ 之间的距离.

$\overrightarrow{OP}$ 与实轴正方向所夹的角 $\theta$，称为复数 $z$ 的辐角，记作 $\operatorname{Arg} z$，即

$$\theta = \operatorname{Arg} z\ .$$

并规定 $\theta$ 按逆时针方向取值为正，顺时针方向取值为负.

显然，一个复数的辐角有无穷多个，任意两个辐角，彼此之间相差 $2\pi$ 的整数倍，其中满足条件 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 $\theta_0$，称为复数 $z$ 的辐角主值，记为 $\arg z$，即 $\theta_0 = \arg z$，于是有

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi\ ,$$

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\ .$$

在确定辐角主值 $\arg z$ 时，必须考虑点 $z$ 所在的象限：

$$\underset{(z\neq 0)}{\arg z} = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{当 } x > 0,\ y > 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{当 } x < 0,\ y \geqslant 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{当 } x < 0,\ y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0,\ y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x = 0,\ y < 0, \end{cases}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2} < \arctan\dfrac{y}{x} < \dfrac{\pi}{2}$.

当 $z = 0$ 时，规定 $z$ 的模为 0，辐角无定义.

4. 复数的三角表示式与指数表示式

利用复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的实部、虚部、模与辐角的下列关系式：

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\quad x = r\cos\theta\ ,\quad y = r\sin\theta\ ,$$

还可将复数表示为以下的形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ ,$$

称为复数 $z$ 的三角表示式.

由欧拉（Euler）公式　　$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，

复数 $z$ 又可表示为 $z=re^{i\theta}$，称为复数 $z$ 的指数表示式.

复数的各种表示可以互相转换，例如，将复数 $z=x+iy$ 化为三角表示式或指数表示式，只需计算 $r$ 和 $\theta$，即 $|z|$ 和 $\operatorname{Arg} z$，由 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，易求出 $r$ 的值，再由 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，知

$$\tan\operatorname{Arg} z=\tan\theta=\frac{y}{x},$$

从而 $$\operatorname{Arg} z=\theta=\arg z+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

**例 1** 求：（1）$z=1+\sqrt{3}i$；（2）$z=-\sqrt{12}-2i$ 的三角表示式与指数表示式.

**解** （1）因为 $x=\operatorname{Re} z=1$，$y=\operatorname{Im} z=\sqrt{3}$，

所以 $$r=|z|=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=2.$$

设 $$\theta=\arg z，则 \tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3},$$

又因为 $z=1+\sqrt{3}i$ 位于第 I 象限，所以 $\theta=\arg z=\dfrac{\pi}{3}$，

于是 $$z=1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}};$$

（2）因为 $x=\operatorname{Re} z=-\sqrt{12}$，$y=\operatorname{Im} z=-2$，

所以 $$r=|z|=\sqrt{(-\sqrt{12})^2+(2)^2}=4,$$

因为 $z=-\sqrt{12}-2i$ 位于第III象限，

所以 $$\arg z=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=\frac{-5\pi}{6},$$

于是 $$z=-\sqrt{12}-2i=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=4e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$$

**例 2** 求 $z_1=3i$，$z_2=4$，$z_3=-2$，$z_4=-2i$ 的三角表示式与指数表示式.

**解** $z_1,z_2,z_3,z_4$ 都是复平面上的特殊点，位于虚轴或实轴上，因此辐角主值可直接求出.

由于 $z_1$ 位于虚轴上，并且在上半复平面，于是 $\theta_1=\arg z_1=\dfrac{\pi}{2}$，又 $r_1=3$，

所以 $$z_1=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=3e^{i\frac{\pi}{2}};$$

$z_2$ 位于实轴上，且在右半复平面，因此 $\theta_2=\arg z_2=0$，又 $r_2=4$，

所以 $$z_2=4(\cos 0+i\sin 0)=4e^{i0};$$

$z_3$ 位于实轴上，且在左半复平面，因此 $\theta_3=\arg z_3=\pi$，又 $r_3=2$，

所以 $$z_3=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{i\pi};$$

$z_4$ 位于虚轴上，且在下半复平面，于是 $\theta_4 = \arg z_4 = -\dfrac{\pi}{2}$， $r_4 = 2$，

所以
$$z_4 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}.$$

### 1.1.3 复数的运算

设复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$， $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，定义 $z_1$ 与 $z_2$ 的四则运算如下：

加法： $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$；

减法： $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2)$；

乘法： $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1)$；

除法： $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ （$z_2 \neq 0$）.

**注**：复数的四则运算可理解为利用 $\mathrm{i}^2 = -1$ 和实数的四则运算所得.

复数四则运算规律：

（1）加法交换律　$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$；

（2）乘法交换律　$z_1 z_2 = z_2 z_1$；

（3）加法结合律　$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$；

（4）乘法结合律　$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$；

（5）乘法对于加法的分配律　$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

**例 3**　化简 $\dfrac{(2+3\mathrm{i})^2}{2+\mathrm{i}}$.

**解**
$$\frac{(2+3\mathrm{i})^2}{2+\mathrm{i}} = \frac{4-9+12\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{(-5+12\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}$$
$$= \frac{-10+12+29\mathrm{i}}{4+1} = \frac{2+29\mathrm{i}}{5} = \frac{2}{5} + \frac{29}{5}\mathrm{i}.$$

**例 4**　设 $z = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} - \overline{\left(\dfrac{2+\mathrm{i}}{-5\mathrm{i}}\right)}$，求 $\mathrm{Re}\, z$，$\mathrm{Im}\, z$ 及 $z\bar{z}$.

**解**
$$z = \frac{1-2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} - \left(\frac{\overline{2+\mathrm{i}}}{\overline{-5\mathrm{i}}}\right) = \frac{(1-2\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} - \frac{2-\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}$$
$$= \frac{11-2\mathrm{i}}{25} - \frac{(2-\mathrm{i})(-5\mathrm{i})}{5\mathrm{i}(-5\mathrm{i})} = \frac{11-2\mathrm{i}}{25} + \frac{5+10\mathrm{i}}{25}$$
$$= \frac{16}{25} + \frac{8}{25}\mathrm{i}.$$

所以
$$\mathrm{Re}\, z = \frac{16}{25},\quad \mathrm{Im}\, z = \frac{8}{25}.$$

$$z\overline{z}=\left(\frac{16}{25}+\frac{8}{25}\mathrm{i}\right)\left(\frac{16}{25}-\frac{8}{25}\mathrm{i}\right)=\frac{64}{125}.$$

我们利用复数的三角表示式或指数表示式讨论复数的乘法与除法更简便.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]\\&=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)},\end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}.$$

### 1.1.4 复数的乘方与方根

1. 复数的乘方

设 $n$ 为正整数，$n$ 个非零相同复数 $z$ 的乘积，称为 $z$ 的 $n$ 次方，记为 $z^n$，即

$$z^n=\underbrace{zz\cdots z}_{n}.$$

若 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则有

$$z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta),$$

若规定 $z^0=1$，这个公式当 $n=0$ 时也成立.

当 $r=1$ 时，得到著名的棣莫弗（De Moivre）公式

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta.$$

当 $n$ 为负整数时，$z^n=\dfrac{1}{z^{-n}}=\dfrac{1}{r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$.

**例 5** 求 $(1+\mathrm{i})^6$.

**解** 因为 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，

所以 $$(1+\mathrm{i})^6=8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-8\mathrm{i}.$$

**例 6** 已知 $z_1=\sqrt{3}-\mathrm{i}$，$z_2=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$，求 $\dfrac{z_1^8}{z_2^4}$.

**解** 因为 $$z_1=\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right],$$

$$z_2=-\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right],$$

所以 $$\frac{z_1^8}{z_2^4}=\frac{2^8\left[\cos\left(-\frac{8\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{8\pi}{6}\right)\right]}{2^4\left[\cos\left(\frac{20\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{20\pi}{6}\right)\right]}$$
$$=2^4\left[\cos\left(-\frac{28\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{28\pi}{6}\right)\right]$$
$$=-8(1+\sqrt{3}\mathrm{i}) .$$

2. 复数的方根

称满足方程 $w^n=z$（$w\neq 0$，$n\geqslant 2$）的复数 $w$ 为 $z$ 的 $n$ 次方根，记作 $w=\sqrt[n]{z}$ 或记作 $w=z^{\frac{1}{n}}$.

当 $z=0$ 时，$w=0$；当 $z\neq 0$ 时，令
$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),\quad w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi),$$
由棣莫弗公式，可得
$$\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$
即有 $\rho^n=r$，$\cos n\varphi=\cos\theta$，$\sin n\varphi=\sin\theta$，也即
$$\rho^n=r,\ n\varphi=\theta+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$
从而 $$\rho=r^{\frac{1}{n}},\ \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$
故 $$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$
$$=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$
为方程 $w^n=z$ 的全部根，当 $k$ 取 $0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到方程 $w^n=z$ 的 $n$ 个单根，这 $n$ 个单根在几何上表示以原点为中心，$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆内接正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点，当 $k$ 取其他整数值时，得到方程的根必与这 $n$ 个单根中的某个根重合.

方程 $w^n=1$（$n=2,3,\cdots$）在复数范围内有 $n$ 个单根
$$w=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1).$$
从几何上看，若设
$$w_n=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}},$$
方程 $w^n=1$ 的 $n$ 个单根可记为
$$1,w_n,w_n^2,w_n^3,\cdots,w_n^{n-1}.$$

它们是单位圆内接正 $n$ 边形的 $n$ 个顶点，以 $n=3$ 为例作图（如图 1.3），$n=6$ 为例作图（如图 1.4）.

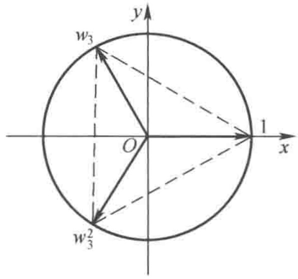



图 1.3

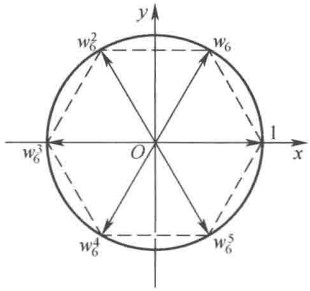



图 1.4

**例 7** 解方程 $z^6+1=0$.

**解** 因为 $z^6=-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$，

所以 $$\sqrt[6]{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\quad(k=0,1,2,3,4,5).$$

可求出 6 个根，它们是

$$z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i},\ z_1=\mathrm{i},\ z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i},$$

$$z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i},\ z_4=-\mathrm{i},\ z_5=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

**例 8** 计算 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$.

**解** 因为 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$，

所以 $$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)\quad(k=0,1,2,3).$$

即 $$w_4^0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right),\quad w_4^1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_4^2=-\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right),\quad w_4^3=-\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right).$$

## 1.2 平面点集与区域

### 1.2.1 复平面上的点集与区域

在复数集中加入一个非正常的复数称为无穷大，记作 $\infty$，其实部、虚部与辐角都没有意义，但它的模规定为正无穷大，即 $|z|=+\infty$. 相应地，在复平面上添加一点，称为无穷远点，它与原点的距离为 $+\infty$.

**扩充复平面** 包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面.

**有限复平面** 不包括无穷远点的复平面称为有限复平面，或复平面.

在高等数学课程中已经学习过平面点集的基本概念，下面将其推广到复平面上.

**邻域** 平面上以 $z_0$ 为心，$\delta>0$ 为半径的圆：$|x-z_0|<\delta$ 内部所有点的集合称为点 $z_0$ 的 $\delta$ 邻域，记为 $N(z_0,\delta)$，即

$$N(z_0,\delta)=\{z\,\big|\,|z-z_0|<\delta\},$$

称集合 $\{z\,|\,0<|z-z_0|<\delta\}$ 为 $z_0$ 的去心 $\delta$ 邻域，记作 $N(\hat{z}_0,\delta)$.

**内点** 设 $D$ 为平面上的一个点集，$z_0\in D$，如果存在 $z_0$ 的一个 $\delta$ 邻域，使该邻域内的所有点都属于 $D$，则称 $z_0$ 为 $D$ 的一个内点.

**边界点** 如果点 $z_0$ 的任一邻域内既有属于 $D$ 的点，也有不属于 $D$ 的点，则称 $z_0$ 为 $D$ 的边界点.

**外点** 平面上既非 $D$ 的内点又非 $D$ 的边界点的点，称为 $D$ 的外点.

图 1.5 中 $z_0,z_1,z_2$ 分别表示为 $D$ 的内点、边界点和外点.

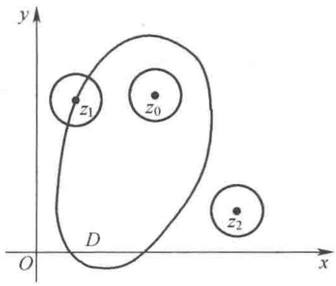



图 1.5

**边界** 点集 $D$ 的全部边界点所组成的集合，称为 $D$ 的边界.

注：$D$ 的内点必属于 $D$；$D$ 的外点必不属于 $D$；而 $D$ 的边界点可能属于 $D$ 也可能不属于 $D$.

**开集** 如果点集 $D$ 的每一个点都是 $D$ 的内点，则称 $D$ 为开集.

**闭集** 如果点集 $D$ 的余集为开集，则称 $D$ 为闭集.

**连通集** 设 $D$ 是开集，如果对于 $D$ 内任意两点，都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于 $D$，则称开集 $D$ 是连通集.

**区域（或开区域）** 连通的开集称为区域或开区域.

**闭区域** 开区域 $D$ 连同它的边界一起，称为闭区域，记为 $\overline{D}$.

**有界集、无界集** 如果点集 $D$ 可以包含在一个以原点为中心，以有限值为半径的圆内（即存在一个正数 $M$，使得对任意的 $z\in D$，都有 $|z|\leqslant M$），则称 $D$ 为有界集，否则称 $D$ 为无界集.