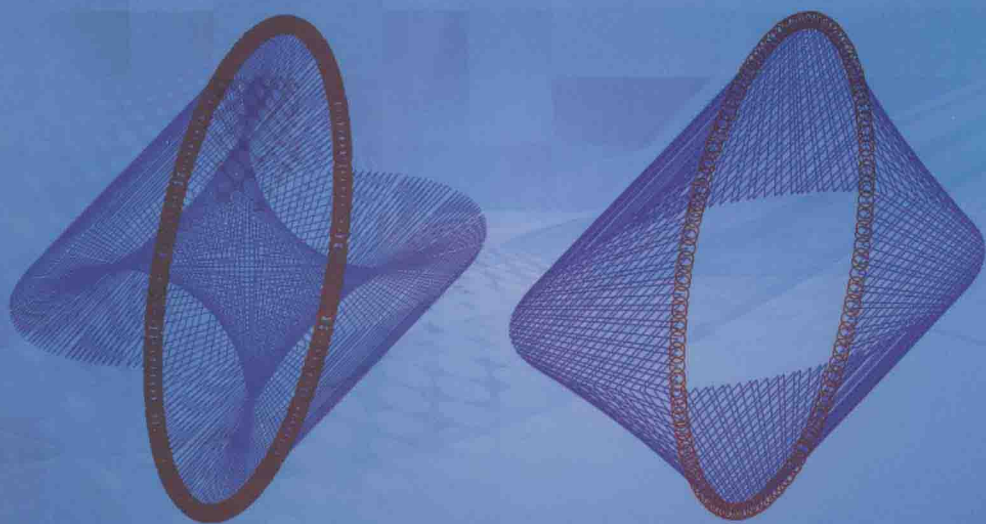


脉冲动力系统的分岔 混沌理论及其应用

蒋贵荣 刘期怀 龙腾飞 蒋辉 著



科学出版社

脉冲动力系统的分岔混沌 理论及其应用

蒋贵荣 刘期怀 龙腾飞 蒋 辉 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书介绍作者团队关于脉冲动力系统的分岔混沌理论及其在非线性振动和传染病传播等方面的应用的部分研究成果。全书共分四章：第一章介绍离散和脉冲动力系统的概念和理论；第二章介绍具有固定时刻脉冲的动力系统的复杂动力学行为，内容包括线性哈密顿脉冲系统和奇异线性脉冲系统的动力学分析、线性脉冲系统的分岔控制和混沌、具有脉冲生育和脉冲免疫的 SIR 模型的分岔分析；第三章介绍具有状态脉冲的动力系统的复杂动力学行为，内容包括线性脉冲自治系统的动力学分析、非线性脉冲自治系统的动力学分析、脉冲自治系统的混沌及其控制；第四章介绍同时具有状态脉冲和固定时刻脉冲的动力系统的复杂动力学行为，内容包括具有脉冲激励和碰撞的阻尼振子的周期解及其复杂的分岔行为、具有固定时刻脉冲生育和状态脉冲治疗的传染病模型的周期解及其分岔等的复杂动力学行为。

本书适合高等院校或科研机构的力学或数学及相关专业的高年级本科生、研究生、教师和有关科研人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

脉冲动力系统的分岔混沌理论及其应用/蒋贵荣等著. —北京：科学出版社, 2015.12

ISBN 978-7-03-046393-7

I. ①脉… II. ①蒋… III. ① 脉冲(力学)—动力系统(数学)—混沌理论—研究 IV. ①O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 274893 号

责任编辑：刘信力 / 责任校对：彭 涛

责任印制：张 伟 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 12 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2015 年 12 月第一次印刷 印张：12 1/4 插页 2

字数：239 000

定价：78.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

在现代科技各领域的实际问题中,普遍存在着状态的突然变化.这种瞬时突发现象称为脉冲现象,其数学模型归结为脉冲动力系统.脉冲动力系统理论属于非光滑动力系统范畴,是前沿的数学分支,开始于 20 世纪 60 年代的 Mil'man 和 Myshkis 的工作.经过众多学者几十年的研究,目前脉冲动力系统在解的存在性、唯一性、稳定性和振动性,解对初值的连续性,边值问题的解的存在性和唯一性,周期解的存在性,脉冲泛函微分方程等方面的基本理论,已经有一个比较完整的雏形.具有连续性和离散性的脉冲动力系统能够更深刻、更精确地反映事物的变化规律.但在脉冲动力系统的复杂动力学行为的研究中,连续性和离散性的结合增大了研究难度,因而脉冲动力系统的分岔和混沌理论发展缓慢.虽然在脉冲动力系统的周期解的稳定性、分岔、混沌控制和混沌反控制等方面取得了一些研究成果,但亟待解决的问题很多,脉冲动力系统的分岔和混沌理论具有广阔的研究前景和很强的挑战性.

本书主要介绍近年来桂林电子科技大学脉冲动力系统团队的部分研究成果.内容上循序渐进,包括具有固定时刻脉冲的动力系统的复杂动力学行为,具有状态脉冲的动力系统的复杂动力学行为,同时具有状态脉冲和固定时刻脉冲的动力系统的复杂动力学行为.方法上将理论分析和数值模拟相结合,研究了上述三类脉冲动力系统的周期解的存在性和稳定性、周期解的分岔和混沌的存在性、混沌控制、混沌反控制等复杂动力学行为,严格地分析了不同分岔发生的条件,在理论上严格地证明了混沌的存在.

本书的研究工作获得了国家自然科学基金项目(项目编号:11162004)、广西自然科学基金项目(项目编号:2012GXNSFAA053006)和桂林电子科技大学创新团队项目的资助,本书的出版得到了桂林电子科技大学数学与计算科学学院的资助,在此一并表示感谢.

由于著者学识和研究水平有限,书中难免有不妥之处,敬请读者批评指正.

作 者

2015 年 6 月于桂林电子科技大学

目 录

前言

第一章 基础知识	1
1.1 离散动力系统的分岔理论	1
1.1.1 Fold 分岔	1
1.1.2 Flip 分岔	2
1.1.3 Neimark-Sacker 分岔	3
1.2 混沌及混沌控制	5
1.2.1 混沌简介	5
1.2.2 混沌控制和反控制	8
1.3 脉冲动力系统	10
1.3.1 脉冲动力系统的定义	10
1.3.2 脉冲动力系统的基本性质	12
1.3.3 脉冲动力系统的周期解	16
第二章 具有固定时刻脉冲的动力系统的复杂动力学行为	36
2.1 线性哈密顿脉冲系统的动力学分析	36
2.1.1 线性哈密顿脉冲系统和映射	36
2.1.2 Flip 分岔	38
2.1.3 Neimark-Sacker 分岔	41
2.1.4 数值模拟和结论	47
2.2 奇异线性脉冲系统的动力学分析	51
2.2.1 奇异线性脉冲动力系统	51
2.2.2 情形 $q = 0$ 下奇异线性脉冲系统的动力学性质	53
2.2.3 情形 $r = 0$ 下奇异线性脉冲系统的动力学性质	59
2.2.4 数值例子和结论	62
2.3 线性脉冲系统的分岔控制和混沌	65
2.3.1 线性脉冲系统的周期解及其分岔	66
2.3.2 混沌的存在性	73
2.3.3 分岔控制	75
2.3.4 数值模拟	76
2.4 具有脉冲生育和脉冲免疫的 SIR 模型的分岔分析	80

2.4.1	模型描述	81
2.4.2	无病周期解的存在性和稳定性	82
2.4.3	分岔分析	84
2.4.4	数值模拟和讨论	91
第三章	具有状态脉冲的动力系统的复杂动力学行为	94
3.1	线性脉冲自治系统的动力学分析	94
3.1.1	模型描述	94
3.1.2	周期解的存在性和唯一性	96
3.1.3	周期解的稳定性和吸引域	102
3.1.4	数值模拟和结论	105
3.2	非线性脉冲自治系统的动力学分析	108
3.2.1	模型描述	109
3.2.2	Lotka-Volterra 系统	111
3.2.3	Holling II 型 Lotka-Volterra 系统	123
3.3	脉冲自治系统的混沌及其控制	134
3.3.1	Snap-back 排斥子	135
3.3.2	周期-3 解	138
3.3.3	非混沌解	140
3.3.4	混沌控制算法	141
3.3.5	数值模拟	143
第四章	具有状态脉冲和固定时刻脉冲的动力系统	150
4.1	具有脉冲激励和碰撞的阻尼振子	150
4.1.1	模型描述	150
4.1.2	周期解	152
4.1.3	分岔分析	156
4.1.4	数值结论	161
4.2	具有固定时刻脉冲生育和状态脉冲治疗的传染病模型	167
4.2.1	模型描述	167
4.2.2	解的存在性	168
4.2.3	零解的稳定性	173
4.2.4	持久性	174
4.2.5	数值结论和讨论	176
	参考文献	184
	索引	190
	彩图	

第一章 基础知识

为了研究脉冲动力系统的复杂动力学行为,本章列出了相关定义和结论. 这些结论来自别人已经发表的文献,仍然以定理的形式给出.

1.1 离散动力系统的分岔理论

考虑有一个参数的离散动力系统

$$x \mapsto F(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.1.1)$$

其中,映射 F 关于 x 和 α 是光滑的. 现取一个与 α 有关的区域 $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, 在区域 U_α 中考虑离散动力系统 (1.1.1) 的相图. 当参数 α 变化时, 系统 (1.1.1) 的相图会随着变化. 从而出现两种可能, 一种可能是离散动力系统的相图在区域 U_α 中和以前的保持拓扑等价, 另一种可能是动力系统的相图的拓扑发生变化.

定义 1.1.1 随着参数的变化, 动力系统拓扑非等价相图的出现称为分岔.

从定义可知, 动力系统的分岔是参数经过一个分岔值时动力系统的拓扑类型的变化. 设在参数 $\alpha = \alpha_0$ 时, $x = x_0$ 是系统 (1.1.1) 的不动点, 即 $F(x_0, \alpha_0) = x_0$. 令 A 为雅可比 (Jacobi) 矩阵 $\left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_0}$, 则称矩阵 A 的特征值 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 为不动点 x_0 的特征值或乘子.

定义 1.1.2 离散动力系统 (1.1.1) 的不动点 x_0 称为双曲不动点, 如果不动点 x_0 的乘子满足条件 $|\mu_i| \neq 1, i = 1, 2, \dots, n$.

随着系统参数 α 的变化, 通常有三种方式使双曲不动点的双曲条件发生变化, 从而产生分岔. 第一种方式为系统有一个正的乘子到达单位圆, 即 $\mu_1 = 1$; 第二种方式为系统有一个负的乘子到达单位圆, 即 $\mu_1 = -1$; 第三种方式为系统有一对复共轭乘子到达单位圆, 即 $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$. 下面介绍这三种基本的分岔, 主要内容来自文献 [1] 和 [2].

1.1.1 Fold 分岔

定义 1.1.3 伴随着出现 $\mu = 1$ 的分岔称为 Fold 分岔, 其中 $\mu = 1$ 是离散动力系统 (1.1.1) 的不动点 x_0 的乘子.

当系统 (1.1.1) 有一个正乘子通过单位圆时, 根据中心流形定理可将其限制在中心流形 W^c 上, 这时 n 维离散动力系统 (1.1.1) 可降成 1 维离散动力系统

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.1.2)$$

假设系统 (1.1.2) 在 $\alpha = 0$ 处有一个不动点 $x_0 = 0$, 并且其有一个特征乘子 $\mu = f_x(0, 0) = 1$. 将 $f(x, \alpha)$ 在 $x_0 = 0$ 处展开成 x 的 Taylor 级数:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + O(x^3). \quad (1.1.3)$$

设 $f_1(\alpha) = 1 + g(\alpha)$, $g(\alpha)$ 是光滑的, $g(0) = 0$. 在满足非退化条件

$$f_{xx}(0, 0) \neq 0, \quad f_{\alpha}(0, 0) \neq 0 \quad (1.1.4)$$

的情况下, 通过光滑可逆的坐标变换和参数变换可将系统 (1.1.3) 转换为

$$\eta \mapsto \beta + \eta + s\eta^2 + O(\eta^3), \quad (1.1.5)$$

其中, $s = \pm 1$. 现在系统在原点附近局部拓扑等价于标准形

$$\eta \mapsto \beta + \eta + s\eta^2, \quad (1.1.6)$$

当 $s = 1$ 时, 系统 (1.1.2) 的参数 α 从负到正通过零时, 两个不动点 (一个稳定, 一个不稳定) 在 $\alpha = 0$ 处“碰撞”形成一个不动点, 其特征乘子为 $\mu = 1$, 然后消失, 此时发生 Fold 分岔. 下面是关于 Fold 分岔的拓扑规范型定理.

定理 1.1.1 (Fold 分岔拓扑规范型定理) 如果单参数系统

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

在 $\alpha = 0$ 处有一个不动点 $x_0 = 0$, 并且 $\mu = f_x(0, 0) = 1$, 则系统在原点附近与下列规范型:

$$\eta \mapsto \beta + \eta \pm \eta^2$$

是局部拓扑等价的.

1.1.2 Flip 分岔

定义 1.1.4 伴随着出现 $\mu = -1$ 的分岔称为 Flip 分岔或倍周期分岔.

当系统 (1.1.1) 的不动点有一个正的特征乘子通过单位圆时, 类似 Fold 分岔, 可得系统 (1.1.2). 对所有充分小的 $|\alpha|$, 利用隐函数定理可知, 在原点的邻域内系统有唯一的不动点 $x_0(\alpha)$, 并且可用坐标变换将这个不动点平移到原点处. 为了不

失一般性, 假设对所有充分小的 $|\alpha|$, 系统 (1.1.2) 的不动点为 $x_0 = 0$, 并且有一个特征乘子 $\mu = f_x(0, 0) = -1$. 将 $f(x, \alpha)$ 在 $x_0 = 0$ 处展开成 x 的 Taylor 级数:

$$f(x, \alpha) = f_1(\alpha)x + f_2(\alpha)x^2 + f_3(\alpha)x^3 + O(x^4), \quad (1.1.7)$$

其中, $f_1(0) = f_x(0, 0) = 0$, $f_1(\alpha) = -[1 + g(\alpha)]$, 并且 $g(\alpha)$ 是光滑的, $g(0) = 0$. 在满足非退化条件

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0))^2 + \frac{1}{3}f_{xxx}(0, 0) \neq 0, \\ f_{x\alpha}(0, 0) \neq 0 \end{cases} \quad (1.1.8)$$

的情况下, 通过光滑可逆的坐标变换和参数变换可将系统 (1.1.2) 转换为

$$\eta \mapsto -(1 + \beta)\eta + s\eta^3 + O(\eta^4), \quad (1.1.9)$$

其中, $s = \pm 1$. 现在系统在原点附近局部拓扑等价于标准形

$$\eta \mapsto -(1 + \beta)\eta + s\eta^3, \quad (1.1.10)$$

在 $s = 1$ 的情形下, 系统 (1.1.2) 的参数 α 从正到负通过零时, 周期-2 轨道在 $\alpha = 0$ 处“收缩”并且消失, 其特征乘子为 $\mu = -1$, 此时发生 Flip 分岔. 对于一般的不动点 (x_0, α_0) , 有下列结论:

定理 1.1.2 假设 (x_0, α_0) 是映射 (1.1.2) 的一个特征乘子为 -1 的不动点, 并且在 (x_0, α_0) 处:

$$\begin{aligned} (F_1): \quad & \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha} \neq 0, \\ (F_2): \quad & a = \frac{1}{2}f_{xx}^2 + \frac{1}{3}f_{xxx} \neq 0, \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

则映射 (1.1.2) 在 (x_0, α_0) 处的分岔是一个超临界的 Flip 分岔.

1.1.3 Neimark-Sacker 分岔

定义 1.1.5 伴随着出现 $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ ($0 < \theta_0 < \pi$) 的分岔称为 Neimark-Sacker 分岔.

当系统 (1.1.1) 有一对复共轭特征乘子通过单位圆时, 根据中心流形定理可将其限制在中心流形 W^c 上, 这时 n 维离散动力系统 (1.1.1) 可降成 2 维离散动力系统

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.1.12)$$

假设系统 (1.1.12) 在 $\alpha = 0$ 处有一个不动点 $x_0 = 0$, 其特征乘子为 $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ ($0 < \theta_0 < \pi$).

考虑到 $\mu = 0$ 不是系统 (1.1.12) 的 Jacobi 矩阵的特征值, 对所有充分小的 $|\alpha|$, 利用隐函数定理可知, 在原点的邻域内系统有唯一的不动点 $x_0(\alpha)$, 并且可用依赖参数的坐标变换将此不动点置于原点处. 不失一般性, 设对所有充分小的 $|\alpha|$, 系统 (1.1.12) 的不动点为 $x_0 = 0$. 这样, 系统 (1.1.12) 可以写成

$$x \mapsto A(\alpha)x + H(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.1.13)$$

其中, H 是光滑的, 它的分量 $H_{1,2}$ 关于 x 的 Taylor 展开的首项至少为二次, 且对所有充分小的 $|\alpha|$, $H(0, \alpha) = 0$. Jacobi 矩阵 $A(\alpha)$ 有两个特征乘子 $\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm i\varphi(\alpha)}$, 其中 $r(0) = 1$, $\varphi(0) = \theta_0$.

通过引入复变量和新的参数, 对所有充分小的 $|\alpha|$, 系统 (1.1.13) 可以转换为

$$z \mapsto \mu(\beta)z + g(z, \bar{z}, \beta), \quad z \in C, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (1.1.14)$$

其中, $\mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$; g 是 $z, \bar{z}$ 和 β 的光滑复值函数, 它关于 z 和 $\bar{z}$ 的 Taylor 展开的包含二次以及二次以上的高阶项为

$$g(z, \bar{z}, \beta) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\beta) z^k \bar{z}^l, \quad k, l = 0, 1, \dots \quad (1.1.15)$$

映射 (1.1.14) 可以写成

$$z \mapsto \mu z + \frac{g_{20}z^2}{2} + g_{11}z\bar{z} + \frac{g_{02}\bar{z}^2}{2} + \frac{g_{30}z^3}{6} + \frac{g_{21}z^2\bar{z}}{2} + \frac{g_{12}z\bar{z}^2}{2} + \frac{g_{03}\bar{z}^3}{6} + O(|z|^4), \quad (1.1.16)$$

其中, $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$. 在满足非退化条件

$$\begin{cases} r'(0) \neq 0, \\ e^{ik\theta_0} \neq 1 \quad (k = 1, 2, 3, 4) \end{cases} \quad (1.1.17)$$

的情况下, 对所有充分小的 $|\beta|$, 通过非线性光滑可逆的依赖参数的复坐标变换

$$z = w + \frac{h_{20}w^2}{2} + h_{11}w\bar{w} + \frac{h_{02}\bar{w}^2}{2} + \frac{h_{30}w^3}{6} + \frac{h_{12}w\bar{w}^2}{2} + \frac{h_{03}\bar{w}^3}{6}, \quad (1.1.18)$$

可将系统 (1.1.16) 转换为一个复的 Poincaré 映射标准形

$$w = e^{i\theta(\beta)}(1 + \beta + d(\beta)|w|^2)w + O(|w|^4). \quad (1.1.19)$$

当系统 (1.1.12) 的参数 α 从负到正通过零点时, 在 $x_0 = 0$ 的邻域内有一个唯一的闭不变曲线从 $x_0 = 0$ 点分岔出来, 此时, 发生超临界的 Neimark-Sacker 分岔, 即下面的定理.

定理 1.1.3 对于任意的二维单参数动力系统

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

假设在 $\alpha = 0$ 时, 系统的不动点 $x_0 = 0$ 具有复值乘子 $\mu_{12} = e^{\pm i\theta_0}$, 则存在一个 x_0 邻域, 当 α 经过零时在这个邻域内有一条唯一的闭不变曲线从 x_0 点分岔出来.

定理 1.1.3 要求非退化条件 (1.1.17) 和 $a(0) \neq 0$ 成立, 其中

$$a(0) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\theta_0} g_{21}}{2} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - 2e^{i\theta_0})e^{-2i\theta_0}}{2(1 - e^{i\theta_0})} g_{20}g_{11} \right) - \frac{1}{2}|g_{11}|^2 - \frac{1}{4}|g_{02}|^2.$$

如果条件 $e^{ik\theta_0} \neq 1$ ($k = 1, 2, 3, 4$) 不满足, 也许根本不会出现闭不变曲线, 或者从不动点分岔出数条不变曲线. 系数 $a(0)$ 确定系统出现 Neimark-Sacker 分岔时不变曲线出现的方向.

1.2 混沌及混沌控制

1.2.1 混沌简介

混沌运动是一种貌似无规则的运动, 是非线性动力学系统所特有的一种运动形式, 它广泛地存在于自然界, 如物理学、化学、生物学、地质学以及技术科学、社会科学等各个领域. 一般而言, 混沌是指在确定性的非线性系统中, 不需要附加任何随机因素亦可出现的类似随机的行为 (内在随机性).

20 世纪 60 年代, 美国气象学家 Lorenz 建立了一个三阶常微分方程组的大气对流模型来研究天气变化规律. 当选取一定参数时, 系统出现了非周期无规则行为, 天气变化变得不可预测, 这就是有趣的“蝴蝶效应”. 法国数学家 Ruelle 和荷兰学者 Takens 提出了“奇怪吸引子”的概念, 于 1971 年提出用混沌 (Chaos) 来描述湍流形成机理的新观点. 美国数学家 Smale 提出的马蹄结构和马蹄变换为 20 世纪 70 年代混沌理论的研究做出了重要的理论准备. 1975 年, 李天岩和 Yorke 提出“周期 3 意味混沌”的思想, 给出了闭区间上连续自映射的混沌定义, Chaos 一词自此被正式使用. 1978 年, Feigenbaum 发现一类周期倍化通向混沌的普适常数. 混沌系统的最大特点就在于系统的演化对初始条件十分敏感, 因此从长期意义上讲, 系统的未来行为是不可预测的. 在混沌动力学的研究中, 主要有三个方面的内容, 一是研究系统从有序到混沌态的过渡; 二是研究混沌中的有序行为; 三是研究如何有效地控制混沌或主动地利用混沌. 近年来, 混沌理论得到了很好的研究, 并且在与其它学科互相渗透中得到了广泛的应用.

1. 混沌的定义

由于混沌系统的奇异性和复杂性, 至今混沌还没有一个公认的普遍适用的数学定义. 目前已有的定义和相关的定理从不同的侧面反映了混沌的性质 [3-8].

定义 1.2.1 (Li-Yorke 意义下的混沌 [9]) 设 J 是一个一维区间, $f: J \rightarrow J$ 是连续的. 称 F 在 J 上是混沌的, 如果

- (1) 任取 $k = 1, 2, \dots$, F 总存在周期为 k 的周期点;
- (2) 存在一个不可数集 $S \subset J$, S 不含任何周期点, 并且满足
 - (a) 任取 $p, q \in S$, $p \neq q$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f^n(p) - F^n(q)| > 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf |f^n(p) - F^n(q)| > 0;$$

- (b) 任取 $p \in S$ 和 $q \in J$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |f^n(p) - F^n(q)| > 0.$$

设 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为一个可微映射. 令 $DF(X)$ 表示 F 在点 X 的 Jacobi 矩阵, $|DF(X)|$ 表示 $DF(X)$ 的行列式, $B_r(X)$ 表示以 X 为中心、以 r 为半径的闭球. 设 F 在 $B_r(Z)$ 上可微. 称 Z 是 F 在 $B_r(Z)$ 中扩张的不动点, 如果 $F(Z) = Z$, 任取 $X \in B_r(Z)$, 有 $DF(X)$ 的所有特征值大于 1. 设 Z 是 F 在 $B_r(Z)$ 中扩张的不动点, 称 Z 是 F 的 Snap-back 排斥子, 如果存在一个点 $X_0 \in B_r(Z)$, 使得 $X_0 \neq Z$, 对某个正整数 M 有 $F^M(X_0) = Z$, 并且 $|DF^M(X_0)| \neq 0$.

定义 1.2.2 (Marotto 意义下的混沌 [10]) 设 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为一个可微映射, 如果 F 有一个 Snap-back repeller, 那么 F 是混沌的.

设 X 是一个度量空间, $J \subset X$. 如果对任意的开集 $U, V \subset J$, 总存在 $k > 0$ 使得 $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$, 称 $f: J \rightarrow J$ 是拓扑传递的; 如果存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 $x \in J$ 和 x 的任一邻域 N , 总存在 $y \in N$ 和 $n \geq 0$ 满足 $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$, 称 $f: J \rightarrow J$ 对初始条件具有敏感依赖性.

定义 1.2.3 (Devaney 意义下的混沌 [11]) 设 X 是一个度量空间, 称连续映射 $f: X \rightarrow X$ 在 X 上是混沌的, 如果

- (1) f 是拓扑传递的;
- (2) f 的周期点在 X 中是稠密的;
- (3) f 对初始条件具有敏感依赖性.

考虑 Λ 上的自治向量场 $\dot{x} = f(x)$ 或映射 $x \mapsto g(x)$. 设 $\varphi(t, x)$, $t > 0$ 是由 $\dot{x} = f(x)$ 生成的流, $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ 是 $\varphi(t, x)$ ($g(x)$) 下的一个紧致不变集. 如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得对任意的 $x \in \Lambda$ 和 x 的任意邻域 U , 总有 $y \in U$ 和 $t > 0$ ($n > 0$) 满足

$|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)| > \varepsilon$ ($|g^n(x) - g^n(y)| > \varepsilon$), 则称 $\varphi(t, x)(g(x))$ 对 A 的初始条件具有敏感依赖性; 如果对任意的开集 $U, V \subset A$, 存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $\varphi(t, U) \cap V \neq \emptyset$ (存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$), 则称 $\varphi(t, x)(g(x))$ 在闭的不变集 A 上是拓扑传递的.

定义 1.2.4 (Wiggins 意义下的混沌^[12]) A 是混沌的, 如果:

- (1) $\varphi(t, x)(g(x))$ 对 A 的初始条件具有敏感依赖性;
- (2) $\varphi(t, x)(g(x))$ 在 A 上是拓扑传递的.

2. 混沌的特征

混沌运动是确定性非线性系统所特有的复杂运动形态, 出现在某些耗散系统、不可积 Hamilton 保守系统和非线性离散动力系统中. 与其他的复杂运动相区别, 混沌运动有着自己独特的特征.

1) 对初始条件的微小变化具有高度敏感的依赖性

混沌系统内包含无数不稳定的周期轨道和非周期轨道, 它们极其稠密地集中在混沌奇怪吸引子中. 混沌系统的行为对初始条件的微小变化具有高度敏感的依赖性, 其在相空间内的初始点极其临近的两条轨道, 随着时间的推进, 两条轨道的距离彼此以指数形式迅速分离而永不相遇. 具体刻画这种对初始条件的高度敏感性的是李雅普诺夫 (Lyapunov) 指数.

取两条轨道的距离为 $|\delta X|$, 对于一维变量情形, 李雅普诺夫指数 λ 可以精确地定义为

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\delta X|}{t}.$$

而对于 n 维变量情形, 将有 n 个李雅普诺夫指数 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$. 对于一维映射, 只有一个离散方程情形, 李雅普诺夫指数定义为

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(\mu, X_i)|$$

其中, f 为非线性迭代函数, n 为迭代次数.

当最大的李雅普诺夫指数 $\lambda > 0$ 时, 在初始状态相邻的轨道将按指数分离, 系统运动对应于混沌状态.

2) 有界性

混沌是有界的, 它的运动轨线始终局限于一个确定的区域, 这个区域称为混沌吸引域. 无论混沌系统内部多么不稳定, 系统的轨线都不会走出混沌吸引域.

3) 混沌吸引子具有遍历性

混沌运动在其混沌吸引域内是各态历经的, 即在有限时间内混沌轨道经过混沌区内每一个状态点.

4) 分维性

混沌系统在相空间中运动轨线,在某个有限区域内经过无限次折叠.分维性质是混沌奇怪吸引子在几何上的一个重要特征量.混沌轨道在相空间内由于无限次的拉伸、压缩和折叠,构成了无穷嵌套的自相似结构,形成混沌奇怪吸引子.容量维数就是一个这样的分形维数.考虑 N 维空间的一个集合,以边长为 ε 的 N 维体积元的集合去覆盖奇怪吸引子这个集合,设含有该集合元素的体积元的数目为 $N(\varepsilon)$,则容量维数为

$$D_{\text{cap}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

此外,还有李雅普诺夫维数、关联维数和信息维数等定义.

5) 普适性

不同系统在趋向混沌状态时表现出一些共同特征,它不依具体的系统的方程或参数而改变,如著名的 Feigenbaum 常数.

3. 通向混沌的道路

(1) 倍周期分岔通向混沌.这条通向混沌的途径是一种规则的运动状态通过周期不断加倍的倍分岔方式逐步过渡到混沌运动状态.

(2) 阵发性通向混沌.这是由法国科学家 Pomeau 和 Manneville 于 1980 年提出的一条通向混沌的道路,又称 PM 类间歇道路.阵发混沌的产生机制与切分岔密切相关.系统长时间的近似周期运动被突发的混乱运动打乱,然后又是周期运动,这种情况不断重复.随着参数的进一步变化,突发现象出现得越来越频繁,近似的周期运动几乎完全消失,最后系统完全进入混沌状态.

(3) Hopf 分岔通向混沌.将混沌看成具有无穷多个频率耦合的振动现象,可以由不动点 $\rightarrow$ 周期运动 $\rightarrow$ 准周期运动 $\rightarrow$ 混沌运动.

1.2.2 混沌控制和反控制

在自然界中,混沌几乎是无所不在、无处不有.但在许多应用问题中,混沌可能是一种不期望的现象,它会导致振荡和无规则运行,使系统彻底崩溃.这样,人们不希望出现混沌运动这种没有任何征兆的、难以预测的、甚至突然剧烈的状态变化.因此,有必要进行混沌控制^[13-15].

从实现控制的目标来看,混沌控制可以归纳为两大类.第一类是基于在混沌奇怪吸引子闭包内存在无穷多不稳定的周期轨道,控制的目标是根据人们的意愿在这些轨道中选择一条满足要求的周期轨道并进行有效的稳定控制.该控制的特点是并不产生新的周期轨道而只是将轨道固定,优点是可以把系统从混沌状态控制在任意周期轨道上而不改变系统的结构,具有良好的轨道跟踪能力和稳定性;缺点

是要有一个目标函数或给定轨道, 实现起来比较困难. 第二类没有具体的控制目标, 也不关心被控系统的最终状态是否是周期运动, 只是通过合适的策略、方法和途径, 有效地抑制混沌行为, 使 Lyapunov 指数下降进而消除混沌. 该控制的优点是设计简单, 不需特定轨道, 易于实现; 缺点是无法确保控制过程的稳定性.

从实现控制的原理来看, 混沌控制可分为反馈控制和无反馈控制. 反馈控制方法有参数微扰 OGY 法、连续变量反馈法和非线性反馈法等; 无反馈控制方法有自适应控制法、参数共振法和混沌信号同步法等. 下面只简单介绍参数微扰 OGY 法.

OGY 方法^[16], 亦称参数微扰法, 它是第一种比较有效地控制混沌运动的方法. 该方法的基本思想是: 先由相空间重构方法确定吸引子中嵌入的各种不稳定的周期轨道, 选择其中之一作为控制目标; 等待混沌运动游荡到该周期轨道附近时, 对系统某一控制参数进行小扰动, 将混沌运动稳定在该周期轨道上.

先构造一个 Poincaré 截面, 用一个含控制参数 p_k 的 n 维映射描述有限维动力系统

$$u_{k+1} = P(u_k, p_k), \quad u_k \in \mathbb{R}^n, \quad p_k \in \mathbb{R}. \quad (1.2.1)$$

如果控制参数 p_k 在参数 $\bar{P}$ 的邻域中取定常值时, 该映射呈混沌状态, 并且混沌吸引子中稠密地嵌有任意周期的双曲不动点 $u_F(\bar{P})$, 即原系统的不稳定周期轨道. 现在考虑通过对控制参数 p_k 的实时扰动, 将映射点 u_k 稳定到指定的双曲不动点 $u_F(\bar{P})$ 上. 为确定所需的控制参数扰动量 $(p_k - \bar{P})$, 将映射 (1.2.1) 在不动点 $u_F(\bar{P})$ 和参数 $\bar{P}$ 附近作线性展开

$$u_{k+1} = P(u_k, p_k) = u_F(\bar{P}) + A(u_k - u_F(\bar{P})) + b(p_k - \bar{P}), \quad (1.2.2)$$

其中, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $b \in \mathbb{R}^n$ 分别是映射 (2.4.1) 在 $(u_F(\bar{P}), \bar{P})$ 处关于 u_k 的 Jacobi 矩阵和关于 p_k 的偏导数向量. 令向量 $(u_{k+1} - u_F(\bar{P}))$ 与 $u_F(\bar{P})$ 的稳定流形相切, 由此可解出控制参数 p_k , 使映射点落在该稳定流形附近. 依此原理, 通过对控制参数的实时扰动, 可使后继映射点沿着该稳定流形逐渐稳定到 $u_F(\bar{P})$ 上.

近年来研究表明, 在一些情况下系统的混沌运动不但不是有益的, 甚至是非常重要的. 1994 年, 美国科学家 Schiff 等研究表明, 混沌有可能在大脑活动中发挥着非常重要的作用, 并第一次提出了“混沌反控制” (anticontrol of chaos) 一词. 混沌的反控制问题逐渐成为混沌理论应用研究中的热点. 近十年来, 陈关荣、赖建德和汪小帆等国内学者在混沌反控制方向做出了重要的贡献, 他们率先提出反馈混沌化的概念, 并分别在离散时间和连续时间系统里得到了很好的研究成果.

混沌反控制 (混沌化) 是指对任意给定的一个不具有混沌特性的甚至是稳定的系统或过程进行控制, 使原系统变成具有混沌特性的复杂系统. 下面是三种基本的混沌反控制方法.

(1) Lyapunov 指数混沌反控制. Lyapunov 指数混沌反控制思想是通过控制 (如加入合适的控制项) 使得原动力系统的 Lyapunov 指数有一个为正, 就能使得系统具有混沌行为.

(2) 时延反馈混沌反控制. 该方法的主要思路是通过加入时延反馈控制器, 对原动力系统进行混沌反控制. 即使很简单的一阶系统, 时延反馈也能产生非常复杂的混沌行为.

(3) 跟踪混沌系统混沌反控制. 将给定的混沌系统作为跟踪系统, 在原系统中加入适当的控制项, 使得原系统的运动轨迹跟踪给定的参考系统, 就实现了受控系统的混沌反控制.

1.3 脉冲动力系统

在自动控制、生态系统、遗传学、经济学、物理学、通信理论等许多领域的实际问题中, 普遍存在着状态变量在变化过程中的某个时刻发生的突然变化. 这种瞬时突变现象称为脉冲现象, 其数学模型归结为脉冲动力系统. 脉冲动力系统理论属于非光滑动力系统范畴, 是前沿的数学分支, 开始于 20 世纪 60 年代的 Mil'man 和 Myshkis 的工作, 随后被应用到空间飞行器脉冲运行控制^[17]、脉冲免疫^[18-20]、癌细胞化疗^[21-23]、神经网络^[24-26]、经济管理^[27,28] 等方面, 解决具体的问题, 并且得到了较大发展. 下面简要介绍脉冲动力系统的基本性质和周期解方面的一些概念和定理. 本节内容主要来自文献^{[29]~[32]}.

1.3.1 脉冲动力系统的定义

定义 1.3.1 如果一个动力系统由

(1)

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad (1.3.1)$$

其中 $f: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个开集, $\mathbb{R}^n$ 是 n 维欧几里得空间并且 $\mathbb{R}_+$ 是非负实数集,

(2) 集合 $M(t), N(t) \subset \Omega, t \in \mathbb{R}_+$,

(3) 算子 $A(t): M(t) \rightarrow N(t), t \in \mathbb{R}_+$,

来描述, 则称这个动力系统为脉冲动力系统.

设 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 是系统 (1.3.1) 的以 (t_0, x_0) 为初值的解. 点 $P_t = (t, x(t))$ 从初始点 $P_{t_0} = (t_0, x_0)$ 开始, 沿着轨线 $\{(t, x): t \geq t_0, x = x(t)\}$ 运动, 直到在时刻 $t_1 > t_0$ 处的点 P_t 到达集合 $M(t)$. 在 $t = t_1$ 处, 算子 $A(t)$ 把点 $P_{t_1} = (t_1, x(t_1))$ 变换为 $P_{t_1^+} = (t_1, x_1^+)$, 其中 $x_1^+ = A(t_1)x(t_1)$. 然后点 P_t 从 $P_{t_1^+} = (t_1, x_1^+)$ 开始继续沿着系统 (1.3.1) 的轨线 $x(t) = x(t, t_1, x_1^+)$ 运动, 直到在下一个时刻

$t_2 > t_1$ 处遇到集合 $M(t)$, 这样点 $P_{t_2} = (t_2, x(t_2))$ 又变换为 $P_{t_2^+} = (t_2, x_2^+)$, 其中 $x_2^+ = A(t_2)x(t_2)$. 类似地, 点 P_t 从 $P_{t_2^+} = (t_2, x_2^+)$ 开始继续沿着系统 (1.3.1) 的解曲线 $x(t) = x(t, t_2, x_2^+)$ 运动, 只要系统 (1.3.1) 的解存在, 就重复上述过程.

脉冲动力系统的解可以是下列三种情形之一:

- (a) 连续函数, 如果积分曲线与集合 $M(t)$ 不相交或交于算子 $A(t)$ 的不动点;
- (b) 有有限个第一类间断点的分段连续函数, 如果积分曲线与集合 $M(t)$ 交于有限个算子 $A(t)$ 的非不动点;
- (c) 有可数个第一类间断点的分段连续函数, 如果积分曲线与集合 $M(t)$ 交于可数个算子 $A(t)$ 的非不动点.

点 P_t 与集合 $M(t)$ 相遇的时刻 t_k 称为脉冲时刻. 假设脉冲微分动力系统的解 $x(t)$ 在 $t_k, k = 1, 2, \dots$ 处是左连续的, 即 $x(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k - h) = x(t_k)$. 自由选取描述脉冲动力系统的三个关系 (1), (2) 和 (3), 可得到不同的系统: 固定时刻脉冲的动力系统、变化时刻脉冲的动力系统和脉冲自治系统.

1. 固定时刻脉冲动力系统

假设集合 $M(t)$ 表示一个曲面列 $\{M_k | M_k = \{(t_k, x), x \in \Omega\}\}_{k=1}^\infty$, 这里 $t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots$, 且 $\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = +\infty$. 设算子 $A(t)$ 仅在 t_k 处有定义, 满足

$$A(t_k): \Omega \mapsto \Omega, \quad x \mapsto A(t_k)x = x + I_k(x),$$

其中, $I_k: \Omega \mapsto \Omega$. 因而集合 $N(t)$ 仅与 t_k 有关且 $N(t_k) = A(t_k)M(t_k)$. 对于上面所选择的 $M(t)$, $N(t)$ 和 $A(t)$, 固定时刻脉冲动力系统可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x), & t \neq t_k, k = 1, 2, \dots, \\ \Delta x = I_k(x), & t = t_k, k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1.3.2)$$

其中, 在 $t = t_k$ 处, $\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k)$ 并且 $x(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} x(t_k + h)$.

当 $t \in (t_k, t_{k+1}]$ 时, 式 (1.3.2) 的解满足方程

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \quad t \neq t_k, k = 1, 2, \dots;$$

当 $t = t_k$ 时, $x(t)$ 满足

$$\Delta x(t_k) = x(t_k^+) - x(t_k) = I_k(x), \quad t \neq t_k, k = 1, 2, \dots,$$

从而 $x(t_k^+) = x(t_k) + I_k(x(t_k)) = \psi_k(x(t_k))$. 式 (1.3.2) 可表示成

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x), & t \neq t_k, k = 1, 2, \dots, \\ x(t_k^+) = \psi_k(x(t_k)), & t = t_k, k = 1, 2, \dots. \end{cases}$$